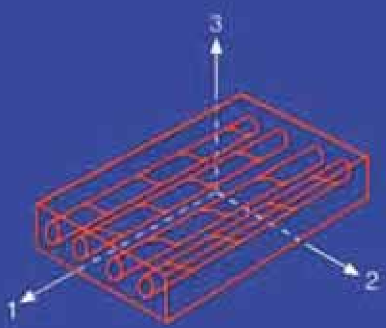
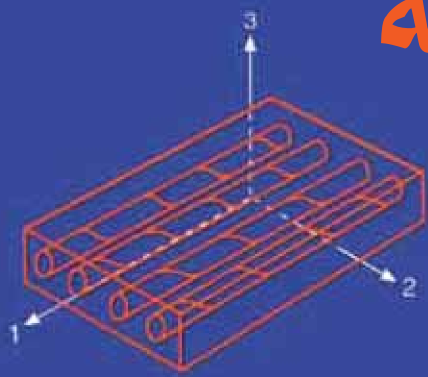
مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية

المنظمة العربية للترجمة

روبرت م. جونز

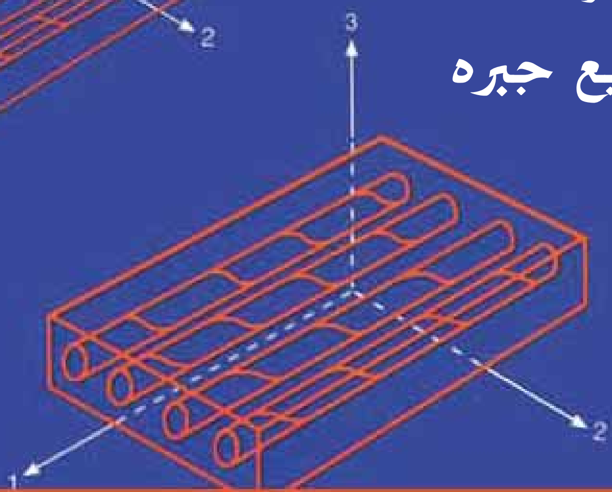
ميكانيك المواد المركَّبة





ترجمة

رفيع جبره



سلسلة كتب التقنيات الاستراتيجية والمتقدّمة

إهـداء الطبعـة الأولـى

إلى أسرتي التي أهملتها:

دونا ومارك وكارين وكريستوفر

إهـداء الطبعـة الثانيـة

إلى كريستوفر:

الشخص الذي ساعد الكثير من الآخرين،

لكنه لم يستطِع أن يساعد نفسه

المحتويـــات

تقديــم

سلسلة كتب التقنيات الاستراتيجية
مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي

يطيب لي أن أقدم لهذه السلسلة التي جرى انتقاؤها في مجالات تقنية ذات أولوية للقارئ العربي في عصر أصبحت فيه المعرفة محركاً أساسياً للنمو الاقتصادي والتقني، ويأتي نشر هذه السلسلة بالتعاون بين مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية والمنظمة العربية للترجمة، ويقع في إطار تلبية عدد من السياسات والتوصيات التي تعنى باللغة العربية والعلوم، ومنها:

أولاً: البيان الختامي لمؤتمر القمة العربي المنعقد في الرياض 1428هـ 2007م الذي يؤكد ضرورة الاهتمام باللغة العربية، وأن تكون هي لغة البحث العلمي والمعاملات حيث نصّ على ما يلي: (وجوب حضور اللغة العربية في جميع الميادين، بما في ذلك وسائل الاتصال، والإعلام، والإنترنت وغيرها).

ثانياً: «السياسة الوطنية للعلوم والتقنية» في المملكة العربية السعودية التي انبثق عنها اعتماد إحدى عشرة تقنية إستراتيجية هي: المياه، والبترول والغاز، والبتروكيميائيات، والتقنيات المتناهية الصغر (النانو)، والتقنية الحيوية، وتقنية المعلومات، والإلكترونيات والاتصالات والضوئيات، والفضاء والطيران، والطاقة، والمواد المتقدمة، والبيئة.

ثالثاً: مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي التي تفعِّل أيضاً ما جاء في البند أولاً عن حضور اللغة العربية في الإنترنت، حيث تهدف إلى إثراء المحتوى العربي عبر عدد من المشاريع التي تنفذها مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية بالتعاون مع جهات مختلفة داخل المملكة وخارجها. ومن هذه المشاريع ما يتعلق برقمنة المحتوى العربي القائم على شكل ورقي وإتاحته على

شبكة الإنترنت، ومنها ما يتعلق بترجمة الكتب الهامة، وبخاصة العلمية، مما يساعد على إثراء المحتوى العلمي بالترجمة من اللغات الأخرى إلى اللغة العربية بهدف تزويد القارئ العربي بعلم نافع مفيد.

تشتمل السلسلة على ثلاثة كتب في كلٍّ من التقنيات التي حددتها «السياسة الوطنية للعلوم والتقنية». واختيرت الكتب بحيث يكون الأول مرجعاً عالمياً معروفاً في تلك التقنية، ويكون الثاني كتاباً جامعياً، والثالث كتاباً عاماً موجهاً إلى عامّة المهتمين، وقد يغطّي ذلك كتاب واحد أو أكثر. وعليه، تشتمل سلسلة كتب التقنيات الاستراتيجية والمتقدمة على ما مجموعه ثلاثة وثلاثون كتاباً مترجماً، كما خصص كتاب إضافي منفرد للمصطلحات العلمية والتقنية المعتمدة في هذه السلسلة كمعجم للمصطلح.

ولقد جرى انتقاء الكتب وفق معايير، منها أن يكون الكتاب من أمهات الكتب في تلك التقنية، ولمؤلفين يشهد لهم عالمياً، وأنه قد صدر بعد عام 2000، وأن لا يكون ضيِّق الاختصاص بحيث يخاطب فئة محدودة، وأن تكون النسخة التي يترجم عنها مكتوبة باللغة التي ألّف بها الكتاب وليست مترجمة عن لغة أخرى، وأخيراً أن يكون موضوع الكتاب ونهجه عملياً تطبيقياً يصبّ في جهود نقل التقنية والابتكار، ويساهم في عملية التنمية الاقتصادية من خلال زيادة المحتوى المعرفي العربي.

إن مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية سعيدة بصدور هذه المجموعة من الكتب، وأود أن أشكر المنظمة العربية للترجمة على الجهود التي بذلتها لتحقيق الجودة العالية في الترجمة والمراجعة والتحرير والإخراج، وعلى حسن انتقائها للمترجمين المتخصصين، وعلى سرعة الإنجاز، كما أشكر اللجنة العلمية للمجموعة التي أنيط بها الإشراف على إنجازها في المنظمة وكذلك زملائي في مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية الذين يتابعون تنفيذ مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

الرياض 20/ 3/ 1431 هـ
رئيس مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية
د. محمد بن إبراهيم السويل

مقدمـة الطبعـة الثانيـة

لقد مضى أكثر من عقدين من الزمن على ظهور الطبعة الأولى من هذا الكتاب في عام 1975. وخلال هذه الفترة، تطوَّر موضوع المواد المركَّبة من شيء يقترب من الفضول الهندسي إلى مادة واسعة الاستعمال في التطبيقات الفضائية وفي العديد من التطبيقات الأخرى في حياتنا اليومية على السواء. وفقاً لذلك، لابد من توسيع محتويات الطبعة الأولى وتحديثها، هذا على الرغم من أنها تُعتبَر إلى حدٍّ بعيد من التحليلات الميكانيكية والسلوك الميكانيكي الأساسي السرمدي الذي لا يتأثَّر بمرور الزمن.

تضمَّنت التعديلات النوعية شرحاً أكثر شموليةً للعديد من المفاهيم، ومقارناتٍ مُحسَّنةً بين النظرية والتجربة، وأشكالاً مساعدة أكثر قرباً من القارئ؛ حيث إنها أكثر وضوحاً من الناحية البصرية في تصوير الألياف وتغيرات الأشكال، وكذلك وصفاً خاصاً بالقياسات التجريبية للخصائص، وتغطيةً أوسع لمعايير فشل الرقاقة شاملة تقييماً للكيفية التي وضعت وفقها معايير الفشل، وأخيراً، وصفاً إجمالياً جامعاً للمسائل المتعلّقة بانحناء الصفائح متعددة الطبقات وانبعاجها واهتزازها. وأضيف إلى هذا عرضُ تصميم الصفيحة الطبقية كجزء من عملية التصميم الإنشائي.

وقد تمَّ ـ عن عمد ـ إغفال ذكر «آخر» ما توصَّلت إليه البحوث من نتائج، فهذا الكتاب هو كتاب تعليمي لتدريس الأساسيات، وليس رسالة بحثية في مواضيع الإنشاءات والمواد المركَّبة المعاصرة. ولذلك، تمَّ اختيار مواضيع الكتاب بناءً على توافقها مع الفلسفة الأساسية له التي تتضمَّن بساطة العرض و»قابلية الاستيعاب» من قبل القادمين الجدد إلى مجال دراسة الإنشاءات والمواد المركَّبة. أما المواضيع الأكثر تقدماً إضافةً إلى الفروقات الدقيقة للمواضيع التي

تمَّ تناولها فيمكن التطرّق إليها بعد أن يكون الدارس قد «هضَم» هذا الكتاب واستوعب محتواه.

من الأمور التي أوصلني هذا الكتاب إلى إدراكها توقّعي أن يقوم طلابي بتفسير عبارات مجموعات المسائل الواردة في نهاية أقسام الكتاب، التي تُستخدم فيها المختصرات إلى درجة كبيرة أحياناً، بحيث تصبح مبهمة وغامضة نسبياً مثل «اشتق المعادلة (3.86)»، أو أن يغيّروها إلى الشكل التالي الأكثر منهجيةً ووصفيةً وبياناً للمطلوب:

الفرض: مادة مركَّبة سوف يتمّ تصميمها.

الطلَب: جد جزء الحجم الحرج لليف لازم لضمان أن تتجاوز متانة المادة المركَّبة متانة المادة الحاضنة، أي، اشتق المعادلة (3.86).

علاوةً على ذلك، فأنا أتوقَّع من الطلاب أن يشرحوا بالاعتماد على أرضية فيزيائية من أين يبدأون وما هي الأهداف التي يحاولون أن يصلوا إليها. وخلال قيامهم بهذا الأمر، يتوجَّب عليهم أن يشرحوا بشكلٍ وافٍ طبيعة المسألة إضافةً إلى طبيعة الحل. وأنا أريد من الطلاب أن يكتسبوا نوعاً من الرؤية الاستشرافية عند تناولهم المسألة المطلوبة كي يفهموا النصّ بشكلٍ أكثر كمالاً. أعني بذلك، أنني أريدهم أن يركِّزوا على ماهية كل مسألة، ممّا سيجعلهم يطورون إحساساً بسلوك المواد المركَّبة والإنشاءات. وأتوقَّع أيضاً أن يتمّ استخدام الأرقام المناسبة التي نوقشت على نحوٍ جيّد، فالأرقام التي لا يتمّ تفسيرها للقارئ بشكلٍ كامل تبقى ذات قيمة مشكوك بها، وتترك، بلا شكّ، مجالاً لسوء الفهم. وأتوقَّع كذلك من الطلاب أن يشرحوا ويصفوا كلّ خطوة خلال سيرورة حلّ – المسألة بواسطة تفسيرات وعلل ذات قاعدة فيزيائية، كما أتوقَّع أن يضعوا ملاحظاتهم وتعليقاتهم واستنتاجاتهم في نهاية كل مسألة عمّا تعلّموه منها. فأنا أشعر أنَّ مثل هذه المتطلَّبات تُشكل تدريباً جيداً من أجل الاستمرارية والبقاء في عالَم اليوم وعالَم الغد الأكثر اتصافاً بالتنافسية.

إنّ إكمال معالجة المسائل سيلزمه في غالبية الأحيان تحليلٌ فكريٌ عميقٌ للشروط المعنية وبحثٌ دقيقٌ عن الحلّ الصحيح. وهكذا، نرى أنَّ معظم تلك المسائل ليست بسيطة ولا سهلة التناول. والرياضيات اللازمة لها هي من مستوى منهاج الصف الأخير، باستثناء الحلول المتعلّقة بالمرونة في فصل الميكانيك

الميكروي، حيث من الواضح إنَّ المستوى يجب أن يكون أعلى من ذلك (لكن الأقسام المتعلّقة بالمرونة يمكن تخطّيها في الصفوف ذات المستوى الأدنى من المطلوب).

يُسرّني أن أعبِّر عن تقديري للأشخاص الذين حضروا حلقاتي الدراسية القصيرة التي يزيد عددها على 80 حلقة امتداداً من عام 1971 إلى عام 1995 في المختبرات الحكومية ولدى الشركات وفي الأماكن المفتوحة، فقد ساعدوا على تعديل شكل هذه الطبعة الثانية عن طريق أسئلتهم وتعليقاتهم، كما فعلت ذلك الصفوف الجامعية التي زاد عددها على العشرين، التي درَّستُ فيها على مدى سنوات.

أشكر أولئك الذين قدّموا لي مقترحاتهم وتصحيحاتهم بناءً على قراءتهم للطبعة الأولى. ويسرّني أيضاً أن أعبّر عن تقديري لأولئك الذين ساهموا في كلتا الطبعتين: باتريك بار (Patric Barr) (وهو حالياً دكتور في الطب) من أجل الرسوم التوضيحية في الطبعة الأولى، التي استُخدم قسمٌ منها في الطبعة الثانية، وآن هارديل (Ann Hardell) من أجل الرسوم التوضيحية بواسطة برنامج آدوب إليوستريتور (Adobe Illustrator) المستخدمة في الطبعة الثانية، وابنتي كارين ديفينس (Karen Devens) من أجل إنجازها مخطوطة الـ IBM ونصّ الـ GML، وسكرتيرتي نورما غوين Norma Guynn من أجل طباعتها أشياء عديدة على الآلة الكاتبة.

بلاكسبورغ، فيرجينيا
نيسان/ أبريل عام 1998

مقدمـة الطبعـة الأولـى

تعتبر المواد المركَّبة مثاليةً من أجل التطبيقات الإنشائية التي تتطلَّب قيماً عاليةً لنسبة المتانة ـ إلى ـ الوزن ونسبة الجساءة ـ إلى ـ الوزن. وتُعتَبر الطائرات والمركبات الفضائية إنشاءات نموذجية حسّاسة ـ للوزن حيث تكلفة المواد المركَّبة فيها فعّالة. وعندما تُستغَل المحاسن التي تتميَّز بها المواد المركَّبة بشكلٍ كامل، فإنَّ كلاًّ من الطائرات والمركبات الفضائية سيتمّ تصميمها بطريقة مختلفةً كثيراً عن الطريقة الحالية.

تشتمل دراسة المواد المركَّبة في واقع الأمر عدة مواضيع، منها على سبيل المثال سيرورات التصنيع والمرونة غير موحَّدة المناحي ومتانة المواد غير موحَّدة المناحي والميكانيك الميكروي. وفي الحقيقة، لا يستطيع أيّ شخص أن يدّعي الفهم التامّ لكل هذه المجالات، ومن المرجَّح أن يميل أيّ ممارس إلى أن يقصر اهتمامه على واحدٍ أو اثنين من المجالات الفرعية ضمن الإمكانيات الواسعة للتحليل مقابل التصميم أو الميكانيك الدقيق (الميكروي) مقابل الميكانيك الماكروي الجسيمي، . . . الخ.

إنّ الهدف من هذا الكتاب هو تعريف الطالب على المفاهيم الأساسية للسلوك الميكانيكي للمواد المركَّبة. في الواقع، لن يتمّ تقديم سوى نظرة عامة عن هذه المجموعة الواسعة من المواضيع، حيث المقصود من التوزيع المتوازن لمجالات الموضوعات المدروسة هو إكساب المعارف الجوهرية للمجال العريض للمواد المركَّبة، وقد تمَّ إظهار ميكانيك المواد المركَّبة الطبقية المقوَّاة بالألياف كمثالٍ مستمرٍ على ذلك. أُغفِلت مواضيع هامة عديدة كي يصبح بالإمكان أن تقتصر التغطية المتّبعة في الكتاب على فصل دراسي جامعي واحد. رغم ذلك، يمكن القول إنّ النقاط المتناولة توفِّر بالفعل قاعدة ثابتة من أجل

القيام بدراسات وأبحاث لاحقة، وقد اختيرت بعناية بحيث تؤمّن الاستمرارية والتوازن. علاوةً على ذلك، تمَّ انتقاء المادة المدروسة بشكلٍ يحرص على إظهار درجةٍ عاليةٍ من المقارنة بين النظرية والتجربة، وذلك من أجل توطيد الثقة في النظريات المستنبطة.

عولجت في الكتاب كامل سلسلة المواضيع الممتدّة من الميكانيك الميكروي والميكانيك الماكروي مروراً بنظرية التصفيح، الطبقي والأمثلة على مسائل انحناء الصفيحة وانبعاجها واهتزازها، بحيث تكون الدلالة الفيزيائية للمفاهيم واضحة. ففي الفصل الأول، نجد مقدمة مستفيضة عن المواد المركَّبة والدافع إلى استعمالها في التطبيقات الإنشائية الراهنة. وفي الفصل الثاني، عُرضت علاقات الإجهاد - انفعال للرقاقة مع الثوابت الهندسية للمواد، وقورنت كذلك نظريات المتانة بالنتائج التجريبية. أمّا الفصل الثالث، فتمَّ فيه تقديم الميكانيك الميكروي بواسطة طريقتي مقاربة هما مقاربة ميكانيك المواد ومقاربة المرونة. كما قورنت المقاييس المتوقَّعة (Predicted Moduli) مع القيم المقيسة. وعُرضت في الفصل الرابع نظرية التصفيح بالاستعانة بمخطط تصنيف جديد للصفائح الطبقية، وقورنت القيم المتوقَّعة لجساءة الصفيحة الطبقية، مع النتائج التجريبية، كما نوقشت أيضاً مفاهيم متانة الصفيحة الطبقية، بالإضافة إلى الإجهادات ما بين الصفائح الطبقية والتصميم. وفي الفصل الخامس، دُرِس الانحناء والانبعاج والاهتزاز لصفيحة مسندة ببساطة باستخدام مميزات تصفيح طبقية مختلفة من أجل إظهار تأثيرات ترابط معاملات الجساءة في مسألة ذات معنى فيزيائي. وعولجت مواضيع متنوعة في الفصل السادس مثل التعب وميكانيك الكسر وآثار القصّ العرضاني. وأخيراً، زُوِّد الكتاب بملحقات عن المصفوفات والموتِّرات (التنسورات)، وعن الحدود الأعظمية والحدود الدنيا لدالات متغّير وحيد، وعن منحنيات إجهاد ـ انفعال نموذجية.

كُتب هذا الكتاب بشكلٍ رئيسي كي يكون كتاباً جامعياً، إلا أنه يتلاءم جيداً ليكون دليلاً من أجل الدراسة الذاتية للمواد المركَّبة. ووفقاً لذلك، النظريات المعروضة بسيطة وتوضح المفاهيم الأساسية، مع أنها قد لا تكون الأكثر دقّةً. لقد تمَّ تركيز الاهتمام على التحاليل مقارنةً بالنتائج التجريبية، وليس على أحدث التحليلات المنصبّة على المواد التي تُعتَبر «الأكثر رواجاً» في الوقت الراهن. ربّما يكون هذا قد أنقص الدقّة، لكنّ الأهداف التعليمية جرت مراعاتها

بشكلٍ أفضل. تضمَّن الكتاب أسماء العديد من المراجع من أجل تسهيل الدراسة اللاحقة. يُشترط على القارئ أن يكون ذا خلفية تشتمل على مقرّر دراسي متقدّم في ميكانيك المواد أو على حلقات دراسية متفرقة تتناول علاقات الإجهاد-انفعال ثلاثية الأبعاد ونظرية الصفيحة. إضافةً إلى ذلك، تُعتبَر معرفة المرونة غير موَّحدة المناحي أمراً مرغوباً فيه، رغم أنها ليست شيئاً جوهرياً.

هناك أشخاص عديدون كانوا كريمين إلى أقصى درجة في دعمهم الذي قدَّموه لإنجاز هذا الكتاب.

أودّ أن أشكر بشكلٍ خاصّ الدكتور ستيفن و. تساي (Dr. Stephen W.Tsi) من (مخبر مواد القوى الجوية) على إلهامه لي بالأمثلة على مدى الأعوام العشرة الأخيرة، وعلى توجيهاته خلال آخر عدة سنوات.

وأُبدي تقديري العميق لجهود ستيف (Steve)، وجهود الدكتور ر. بريون بايبس (Dr. R. Bryon Pipes) من (جامعة ديلاوير Delaware) والدكتور توماس كروس (Dr. Thomas Cruse) من (طائرات برات وويتني Pratt and Whitney Aircraft) الذين راجعوا المخطوطة البدئية وقدَّموا العديد من الملاحظات المفيدة. ويبقى هناك آخرون ساهموا في تحضير مادة هذا الكتاب، لذا أقدِّم شكري إلى مارفين هاويث (Marvin Howeth) من (جنرال ديناميكس General Dynamics) في فورث وورث (Forth Worth) في تكساس Texas من أجل صوره العديدة؛ وإلى جون بيم (John Pimm) من شركة (إل تي في ايروسبيس كوربورايشن (LTV Aerospace Corporation) من أجل الصورة في القسم 4.7؛ وإلى الدكتور نيكولاس باغانو (Nicholas Pagano) من (مختبر مواد القوى الجوية) من أجل كثير من الأشكال التوضيحية؛ وإلى الدكتور ر. بيرون بايبس من (جامعة ديلاوير) من أجل العديد من الصور والأشكال التوضيحية في القسم 4.6؛ وأخيراً إلى الدكتور ب. وولتر روزن (Dr. B. Walter Rosen) من شركة (ماتيريال ساينسيز كوربورايشن Materials Sciences Corporation) في بلو بيل (Blue Bell) في بينسيلفانيا Pennsylvania من أجل الصورة في الفقرة 3.5.

وأنا أقدِّر أيضاً الإذن الممنوح من شركة (تيكنوميك بابليشينغ كومباني Technomic Publishing Company, Inc). من ويستبورت (Westport)، كونيكتيكت (Connectticut) من أجل السماح بإعادة طباعة ضمن نصّ الكتاب عدة أشكال توضيحية ظهرت سابقاً في الكتب العديدة لشركة تيكنوميك، وفي

مجلة (*Journal of Composite Materials*) خلال السنوات العديدة الأخيرة. كذلك، أنا ممتنٌّ جداً للدعم الذي قدّمه (مكتب الأبحاث العلمية في القوى الجوية ـ إدارة علوم الفضاء) و(مكتب أبحاث سلاح البحرية ـ برنامج الميكانيك الإنشائي) إلى بحثي المتعلّق بالصفائح متعددة الطبقات والقواقع التي نوقشت في الفصلين الخامس والسادس. وأنا مدينٌ أيضاً إلى طلاب الصفوف الدراسية الكثيرة في معهد التقانة في ميثوديست الجنوبية (Southern Methodist) وفي مركز تطوير طيران سلاح البحرية في وارمينيستر (Warminister) في بينسيلفانيا على صبرهم ومساعدتهم خلال تطوير المسودات والمذكرات التدريسية التي قادت في النهاية إلى تأليف هذا الكتاب. وفي النهاية، لابد أن أفرد شكراً خاصاً مميَّزاً من أجل هارولد س. مورغان (Harold S. Morgan) على مساهماته الوافرة والمتنوّعة، ومن أجل مارتي كانكل (Marty Kunkle) على قيامها بطباعة المخطوطة على الآلة الكاتبة (هذا مع العلم بأنني قمتُ بطباعة جزء منها بنفسي!).

ر. م. ج.

الفصل الأول
مدخل إلى المواد المركَّبة

1.1 المقدمة

إنّ الهدف من هذا الفصل هو الإجابة عن الأسئلة الأساسية الثلاثة فيما يتعلَّق بالمواد المركَّبة والإنشاءات، التي نجدها في الشكل 1-1: (1) ما هي المادة المركَّبة؟ (2) لماذا تُستخدَم المواد المركَّبة بدلاً من المعادن؟ و (3) كيف تُستخدَم المواد المركَّبة في الإنشاءات؟ وكجزء من الماهية (The What)، سوف يتمّ تعريف المجموعة الكلية للمواد المركَّبة وتصنيفها وتحديد مميزاتها. بعد ذلك سنركِّز انتباهنا من أجل هذا الكتاب على المواد المركَّبة الطبقية المقوّاة بالألياف. وأخيراً، وبهدف مساعدتنا على فهم طبيعة المادة التي سنحاول نمذجتها بواسطة معادلات الميكانيك، سوف نصف باختصار تصنيع المواد المركَّبة والإنشاءات. الماهية بشأن الغاية، سوف نستقصي مزايا المواد المركَّبة على المعادن من ناحية المتانة والجساءة والوزن والكلفة ضمن نواحٍ أخرى إضافية. وفي النهاية، في الإجابة عن السؤال الثالث بشأن الكيفية، سوف نُنعِم النظر في أمثلة تتناول تطبيقات إنشائية مهمة للمواد المركَّبة، وفي سِيَر تاريخية قصيرة لحالاتٍ منها، كي تتبيَّن لنا مبرِّراتٌ أكثر تفسِّر سبب لعب المواد المركَّبة دوراً يزداد باستمرار في عالَم إنشاءات اليوم والغد.

2.1 الماهية – ما هي المادة المركَّبة؟

تدلّ الكلمة (مركَّبة) composite في التعبير (المادة المركَّبة) composite material على أنّ هناك مادتين أو أكثر تجتمعان على مستوى المقياس العياني (الماكروي) macroscopic scale لتشكِّل مادة مفيدة ثالثة. والأمر الجوهري هنا هو الفحص العياني (الماكروي) للمادة حيث يمكن تمييز المكوِّنات بواسطة العين المجرَّدة.

فهناك مواد مختلفة عديدة يمكن أن تجتمع على المقاس الميكروي microscopic scale، كما يحدث في السبائك المعدنية، لكنّ المادة الناتجة تكون – من أجل كل الأغراض العملية– متجانسة على المستوى العياني، وهذا يعني أنّ المكوِّنات لا يمكن تمييزها بواسطة العين المجرَّدة، وأنها تتصرَّف بشكلٍ أساسي بصورة مشتركة أثناء الخدمة. وتكمن ميزة المواد المركَّبة في أنها – إذا تمَّ تصميمها بشكل جيّد – تُظهر عادةً أفضل السمات التي تتمتَّع بها مكوِّناتها، وفي غالبية الأحيان تُظهِر بعض السمات التي لا يمتلكها أيٌّ من عناصرها المكوِّنة. ومن بعض الخصائص التي يمكن تحسينها عن طريق تشكيل مادة مركَّبة نذكر:

- المتانة
- الجساءة
- متانة التآكل
- متانة الاهتراء
- الجاذبية
- الوزن
- عمر التعب
- السلوك المرتبط بدرجة الحرارة
- العزل الحراري
- الموصلية الحرارية
- العزل الصوتي

• **الماهية:** **ما هي المادة المركَّبة؟** • **لماذا:** **لماذا تُستخدَم المواد المركَّبة بدلاً من المعادن؟** • **الكيفية:** **كيف تُستخدَم المواد المركَّبة في التطبيقات الإنشائية؟**
الشكل 1–1: الأسئلة الأساسية في موضوع المواد المركَّبة والإنشاءات

بطبيعة الحال، لا تتحسَّن جميع تلك الخصائص بنفس الوقت، كما لا يلزم عادةً تحقيق ذلك. في الحقيقة، تكون بعض الخصائص في حالة تعارض مع خصائص أخرى، فعلى

سبيل المثال، نذكر العزل الحراري مقابل الموصلية الحرارية. ويكمن الهدف المتوخَّى ببساطة في توليد مادةٍ تتمتع فقط بالمميزات المطلوبة لأداء المهمة التصميمية.

تمتلك المواد المركَّبة تاريخاً طويلاً من الاستعمال. رغم أنّ البداية المايكروية لذلك غير معروفة، فإنّ جميع السجلات التاريخية تحتوي على إشارات إلى شكلٍ من أشكال المادة المركَّبة. مثلاً، كان القشّ يُستعمَل من قبل اليهود من أجل زيادة متانة الطوب المصنوع من الطين، كما استخدم المصريون القدماء الخشب المضغوط عندما تبيَّن لهم أنَّه يمكن إعادة تهيئة الخشب من أجل تحقيق درجة أعلى من المتانة ومتانة التمدّد الحراري وكذلك الانتفاخ الناجم عن امتصاص الرطوبة. وفي العصور الوسطى، كانت السيوف والدروع تُصنَع باستخدام عدة طبقات من معادن مختلفة، أمّا في العصور الأحدث، فإنّ المواد المركَّبة ذات المصفوفة الراتنجية المقوّاة بالألياف التي تمتلك قيماً عالية لنسبة المتانة إلى الوزن ونسبة الجساءة إلى الوزن أصبحت ذات أهمية كبيرة في التطبيقات الحسّاسة–للوزن مثل الطائرات والمركبات الفضائية.

1.2.1 تصنيف المواد المركَّبة ومميّزاتها

توجد أربعة أنواع شائعة القبول من المواد المركَّبة، وهي:

(1) المواد المركَّبة الليفية التي تتكوَّن من ألياف ضمن مصفوفة.

(2) المواد المركَّبة الصفائحية الطبقية التي تتكوَّن من طبقات من مواد مختلفة.

(3) المواد المركَّبة الحبيبة التي تتألف من حبيبات ضمن مصفوفة.

(4) تجميعات تتشارك فيها كلٌّ الأنماط الثلاثة المذكورة أعلاه، أو بعض منها.

وسوف تُدرَس هذه الأنواع من المواد المركَّبة وتُناقَش في الأقسام الفرعية اللاحقة، وأنا مدينٌ إلى البروفيسور أ. ج. هـ. دييتز A. G. H. Dietz [1−1] من أجل أسلوب الكتابة، ومعظم المادة الموجودة في المعلومات المعروضة.

1.1.2.1 المواد المركَّبة الليفية

تتميَّز الألياف الطويلة بأشكالها المختلفة بأنها، ذاتياً، أكثر متانةً وجساءة من نفس المادة في شكلها الحجمي. فعلى سبيل المثال، تتكسر ألواح الزجاج العادي عند تعرّضها لإجهادات تعادل فقط آلاف معدودات من الأرطال لكل إنش مربع (باوند/إنش^2 أو باوند للبوصة المربعة psi) (20 ميغاباسكال)، بينما تمتلك الألياف الزجاجية في أشكالها المتوفّرة تجارياً مقاومات من 400 ألف إلى 700 ألف psi (2800 إلى 4800 ميغا باسكال)؛ وحوالى 1 مليون psi (7000 ميغاباسكال) في الأشكال المحضَّرة في المخابر. من الواضح إذاً أنّ تكون هندسة الليف وبنيته الفيزيائية ذات أهمية استثنائية بطريقةٍ ما بالنسبة إلى تقييم متانته، ويجب أخذها بعين الاعتبار في التطبيقات الإنشائية. وبشكلٍ أصحّ، نقول إنّ المفارقة في امتلاك الليف خصائص تختلف عن الشكل الحجمي تعود إلى البنية الأكثر كمالاً لليف. ففي الألياف، تصطف البلّورات على طول محور الليف. علاوةً على ذلك، يوجد في الألياف عدد أقلّ من العيوب الداخلية مقارنةً بالمادة الحجمية، فمثلاً، في المواد التي تحتوي على انخلاعات (dislocations)، يمتلك الشكل الليفي انخلاعاتٍ أقلّ من الشكل الحجمي.

خصائص الألياف

لا يتميَّز الليف هندسياً بالقيمة العالية جداً لنسبة الطول إلى القطر فحسب، وإنما أيضاً بقطره الذي يقارب قياس البلورة. نجد في الجدول 1-1 معاملات المتانة والجساءة الخاصة بألياف عدة مواد مختارة مرتَّبة ترتيباً تصاعدياً حسب متوسط قيمتي النسبتين (المتانة\ الكثافة S/ρ) (الجساءة\ الكثافة E/ρ). ذُكرت في الجدول، للمقارنة، المواد الإنشائية الشائعة مثل الألمنيوم والتيتانيوم والفولاذ. ولكنّ المقارنة المباشرة بين الألياف والمعادن الإنشائية ليست أمراً مقبولاً، لأنّ الألياف يجب أن تُحاط بمصفوفة كي تستطيع الأداء ضمن عنصرٍ إنشائي، في حين إنّ المعادن الإنشائية تكون "جاهزة- للاستعمال- الفوري". وتجدر الملاحظة أنّه تمَّ إيراد كثافة كل مادة ، لأنه من الشائع استعمال نسبتي

المتانة إلى الكثافة، والجساءة إلى الكثافة، كمؤشرات عن فعّالية ليفٍ ما، خاصةً في التطبيقات الحسّاسة للوزن، مثل الطائرات والمركبات الفضائية.

الجدول 1-1: خصائص الألياف والأسلاك(*)

الليف أو السلك	الكثافة، ρ lb/in^3 (kN/cm^3)	متانة الشدّ، S 10^3 lb/in^3 (GN/cm^3)	S/ρ 10^5 in (km)	جساءة الشدّ، E 10^6 lb/in^2 (GN/m^2)	E/ρ in 10^7 (Mm)
ألمنيوم	0.097(26.3)	90(0.62)	9(24)	10.6(73)	11(2.8)
تيتانيوم	0.170(46.1)	280(1.9)	16(41)	16.7(115)	10(2.5)
فولاذ	0.282(76.6)	600(4.1)	21(54)	30(207)	11(2.7)
زجاج-E	0.092(25.0)	500(3.4)	54(136)	10.5(72)	11(2.9)
زجاج-S	0.090(24.4)	700(4.8)	78(197)	12.5(86)	14(3.5)
كربون	0.051(13.8)	250(1.7)	49(123)	27(190)	53(14)
بيريليوم	0.067(18.2)	250(1.7)	37(93)	44(300)	66(16)
بور	0.093(25.2)	500(3.4)	54(137)	60(400)	65(16)
غرافيت	0.051(13.8)	250(1.7)	49(123)	37(250)	72(18)

(*) مُقتبَس عن دييتز Dietz [1-1].

هناك اهتمامٌ كبير بألياف الغرافيت أو الكربون في مجال الإنشاءات المركَّبة الراهنة. يُصنَع كلا النوعين من ألياف طليعية من الحرير الصناعي (الرايون) (rayon) أو القطران (pitch) أو البولي أكريلونتريل (polyacrylonitrile PAN) يتمّ تسخينها ضمن جوٍّ من غازٍ خامل إلى حوالى 3100 ˚F (1700 ˚C) كي تتفحم الألياف. وللحصول على ألياف الغرافيت، يتجاوز التسخين درجة 3100 فهرنهايت (1700 ˚C) كي تُحوّل ألياف الكربون جزئياً إلى غرافيت. إنّ تقانة التصنيع الفعلية هي أمر مسجَّل الملكية، لكن من المعروف أنّ شدّ الليف (fiber tension) هو عامل (بارامتر) رئيسية في تقانة التصنيع. إضافةً إلى ذلك، مع زيادة درجة حرارة عملية التصنيع يزداد مُعامِل الليف (fiber modulus)، لكنّ المتانة تتناقص في غالبية الأحيان. تكون الألياف في الحالة النموذجية أرقّ بكثير من الشعرات البشرية، لذلك تكون قابلة للثني بسهولة بالغة،

وهكذا نستطيع أن نحيك ألياف الكربون أو الغرافيت ضمن نسيج قماشي محبوك. وبالمقابل، تُصنَع ألياف البورون بواسطة توضُّع بخار البور على سلك تنغستين وطلي البورون بطبقة رقيقة من كربيد البورون، يكون قطر الألياف هنا مقارباً لقطر نواة أقلام الرصاص الميكانيكية، وبالتالي لا يمكن ثنيها ولا حياكتها في نسيج محبوك.

خصائص الشعيرات البلورية

تمتلكُ الشعيرةِ البلوريةِ (wisber) بشكلٍ أساسي، مثلُ الليفِ، تقريباً نفسُ قطرِ تقريباً البلورةِ، لكنها بشكلٍ عام قصيرةٌ جداً ومكتنزةٌ، مع أنّ نسبةَ الطولِ إلى القطرِ قد تبلغُ عدة مئات. وهكذا تُعَدُّ الشعيرةُ البلورية مثالاً أكثرَ وضوحاً، حتى، على مفارقة اختلاف–خاصية–المادة–بشكلِها الحجمي–البللوري. ونعني بذلكَ أنّ الشعيرةَ البلورية أكثرَ كمالاً حتى من الليفِ، ولهذا تمتلكُ خصائص أعلى منه. ويتمّ الحصولُ على الشعيراتِ البلوريةِ بواسطة التبلورِ بمقياسٍ صغيرٍ جداً، ممّا يؤدي إلى اصطفافِ البلوراتِ بشكلٍ يقاربُ حدودَ الكمالِ. وفي مادةِ الحديدِ مثلاً التي تمتلكُ بنية بلورية ذاتُ متانةٍ نظريةً تبلغُ psi 2900000 (20 جيغا باسكال)، يمتلك الفولاذ الإنشائي، المتوفّر في الأسواق، الذي يتكوَّن بشكل رئيسي من الحديد، متانةٍ تتراوح قيمتها بين psi 75.000 وحوالى psi 100.000 (570 إلى 690 ميغا باسكال). وينجم التفاوت الكبير بين المتانة النظرية والمتانة الفعلية عن العيوب الموجودة في البنية البلورية للفولاذ. تُدعى العيوب السابقة باسم الانخلاعات (dislocations) (انقطاع الاستمرارية في البنية البلورية)، وهي تتحرك بسهولة في المواد القابلة للطرق (ductile). تغيّر حركة الانخلاعات العلاقة بين البلورات وبالتالي تغيّر متانة المادة وجساءتها. ولا يوجد في الشعيرة البلورية القريبة من الكمال سوى عدد محدود جداً من الإنخلاعات، ولهذا السبب تمتلك شعيرات الحديد البلورية متانة أعلى بشكل ملحوظ من الفولاذ بشكله الحجمي. ويعطي الجدول 1–2 مجموعة ممثلة لخصائص الشعيرات البلورية بالتوازي مع ثلاثة معادن (ولكن كما هو الحال مع الألياف فإنّ الشعيرات البلورية لا يمكن أن تُستعمَل بمفردها، ولذلك لا تُعتَبر المقارنة المباشرة بين الشعيرات البلورية والمعادن ذات معنى يعتدّ به).

الجدول 1-2: خصائص الشعيرات البلورية(*)

الشعيرة البلورية	الكثافة، ρ lb/in^3 (kN/m^3)	المتانة النظرية، S_T 10^6 lb/in^2 (GN/m^2)	المتانة التجريبية، S_E 10^6 lb/in^2 (GN/m^2)	S_E/ρ 10^5 in (km)	معامل جساءة الشدّ، E 10^6 lb/in^2 (GN/m^2)	E/ρ 10^7 in (Mm)
نحاس	0.322(87.4)	(12) 1.8	0.43(3.0)	13(34)	18(124)	6(1.4)
نيكل	0.324(87.9)	(21) 3.1	0.56(3.9)	17(44)	31(215)	10(2.5)
حديد	0.283(76.8)	(20) 2.9	1.9(13)	67(170)	29(200)	10(2.6)
B_4C	0.091(24.7)	(45) 6.5	0.97(6.7)	106(270)	65(450)	71(18)
SiC	0.115(31.2)	(83) 12	1.6(11)	139(350)	122(840)	106(27)
Al_2O_3	0.143(38.8)	(41) 6	2.8(19)	196(490)	60(410)	42(11)
C	0.060(16.3)	(98)14.2	3(21)	500(1300)	142(980)	237(60)

(*) مُقتَبس عن: .Sutton, Rosen and Flom [1-2] (بإذن من مجلة **جمعية مهندسي المواد البلاستيكية** *Society of Plastic Engineers Journal*).

خصائص مصفوفة المواد

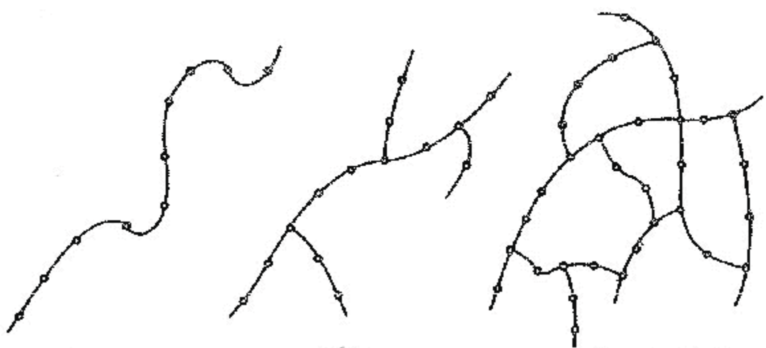
في الحالة الطبيعية، تمتلك الألياف والشعيرات البلورية استعمالات قليلة ومحدودة ما لم يتمّ ربطها سويةً كي تأخذ شكل عنصر إنشائي يستطيع أن يتحمّل الحمولات. تُدعى المادة المصفوفة عادةً المصفوفة (matrix) (ويجب عدم الخلط بينها وبين المفهوم الرياضياتي. إنّ الغاية المتوخّاة من المصفوفة متشعّبة الأغراض: دعم الألياف أو الشعيرات البلورية، وحماية الألياف أو الشعيرات البلورية، ونقل الإجهاد ما بين الألياف أو الشعيرات البلورية المكسورة...الخ. وفي الحالة النموذجية، تكون المصفوفة ذات قيم أقلّ بشكلٍ معتبَر من الألياف أو الشعيرات البلورية من ناحية الكثافة والجساءة والمتانة، ولكنّ تجميع الألياف أو الشعيرات البلورية مع مصفوفة يستطيع أن يعطينا متانة وجساءة مرتفعتين جداً، مع الحفاظ في نفس الوقت على كثافة منخفضة. و يمكن أن تكون مواد المصفوفات بوليميراتٍ أو معادنَ أو موادَّ سيراميكة أو من الكربون، وتتزايد كلفة كلٍّ من هذه المصفوفات بازدياد القدرة على متانة الحرارة.

توجد البوليميرات (وهي كلمة مركَّبة تتكوَّن من مقطعين: <بولي> تعني المتعدد (branched)، و<مير> تعني الوحدة أو الجزيء) في ثلاثة أشكال رئيسية: الخطّية (linear)، والمتفرّعة، والمتصالبة الوصلات (cross – linked). يعتبر البوليمير الخطّي مجرَّد سلسلة من الوحدات (الميرات). أمّا البوليمير المتفرّع، فيتألَّف من سلسلة أولية من الوحدات ترافقها سلاسل أخرى تتّصل بها في الأبعاد الثلاثة بطريقة تشابه تماماً أغصان الشجرة، كما هو موضَّح في الشكل 1–2. وأخيراً، يمتلك البوليمير المتصالب عدداً كبيراً من السلاسل ثلاثية الأبعاد ذات الارتباطات الوافرة فيما بينها، كما يظهر الشكل 1–2.

تعتبر البوليميرات الخطّية صاحبة أدنى المقادير من ناحية المتانة والجساءة، بينما تتمتّع البوليميرات المتصالبة بالمقادير القصوى منها بسبب بنيتها الداخلية التي تلازمها درجة أعلى من المتانة والجساءة. تشتمل الفئات الثلاث الرئيسية للبوليميرات الإنشائية على المطاطيات والبوليميرات ذات التلدّن الحراري (thermoplastic) والبوليميرات ذات التصلّب الحراري (thermosets). المطاطيات هي بوليميرات متصالبة تكون في حالة شبه متبلورة (semicrystaline) عند درجة حرارة أقل بكثير من درجة حرارة الغرفة العادية، لكنها تتصرف كالمطاط الذي نعرفه جميعاً عند درجة حرارة أعلى من درجة حرارة الغرفة (تذكّر الفشل الكارثي الذي أصاب حلقات O المطاطية في مكوك الفضاء تشالنجر Challenger). أمّا البوليميرات ذات التلدّن الحراري، فهي بوليميرات ذات فروع، لكنها بشكلٍ عام لا تتصالب كثيراً أو كلياً.

لذلك يمكن عادةً وتكرارياً تلييمها (softened) بالتسخين وتصليدها (hartened) بالتبريد. وكأمثلة على البوليميرات ذات التلدّن الحراري، نجد النيلون والبولي إيثيلين والبولي سلفون (polysulfone). وأخيراً، فإنَّ البوليميرات ذات التصلب الحراري هي بوليميرات خضعت لتفاعلات كيميائية حتى أصبحت كل جزيئاتها تقريباً متصالبة بشكل لا عكوس في شبكة ثلاثية الأبعاد. وهكذا، ما أن "يتصلَّب" الإيبوكسي، حتى يغدو عاجزاً عن تغيير شكله. وكأمثلة على البوليميرات ذات التصلب الحراري،

نجد الإيبوكسيدات والفينولات (Phenolics) والبولي إيميدات (polyimides). وتمتلك مادة المصفوفة العضوية الإيبوكسيدية النموذجية مثل نارمكو 2387 [1−3]



الشكل 1−2: بنية البوليميرات

(Narmco 2387) كثافة تساوي $0.044\ lb/in^3$ ($11.9\ kN/m^3$) ومتانة انضغاط تساوي 23.000 psi (0.158 G Pa) ومُعامِل انضغاط يساوي 560,000 psi (3.86 G Pa) ومتانة شدّ تساوي 4200 psi (0.029 G Pa) ومُعامِل شدّ يساوي 490,000 بسي (3.38 G Pa).

تشتمل مواد المصفوفات الأخرى على المعادن التي يمكن جعلها تسيل حول جملة من الألياف موضوعة في مكان مناسب بواسطة الانتشار الترابطي (diffusion bonding) لتلتصق بالانتثار أو بواسطة التسخين مع الارتشاح (infiltration) تحت الخلاء. من الأمثلة الشائعة نذكر الألمنيوم والتيتانيوم وسبائك النيكل−الكروم. يمكن أن يتمّ صبّ المواد المركبّة المصفوفة السيراميكية من ردغة مصهورة (slurry) حول ألياف تحت التحريك داخله بحيث تأخذ اتجاهات عشوائية، أو يكون لها توجّه مفضّل يتبع اتجاه التدفّق بسبب حركة التحريك، أو بواسطة بعض الطرق الأخرى لإدخال المادة السيراميكة. بالمقابل، هناك خيار آخر يمكن في ترسيب بخار مادة المصفوفة السيراميكية حول مجموعة من الألياف موضوعة سلفاً في مكان مناسب. في النهاية، نذكر أنّ مادة

المصفوفة الكربونية يمكن أيضاً أن ترسب من البخار على جملة ألياف موضوعة سلفاً في المكان المناسب. يمكن كخيار آخر أن ترتشح مادة سائلة حول ألياف موضوعة في المكان المناسب؛ ومن ثمَّ يتمّ تفحيمها في مكانها بواسطة التسخين إلى درجة حرارة عالية. ويجب أن تُكرَّر العملية المشتملة على ارتشاح السائل والتفحيم مراتٍ عديدة لأنّ تفحيم السائل يؤدي إلى نقص حجم المصفوفة. لا يتمّ الحصول على الحدّ المستطاع من متانة وجساءة المصفوفة ما لم يتم الاستمرار في ملء الفراغات (حيث تصبح منفصلة عن بعضها البعض مع استمرار التكثيف).

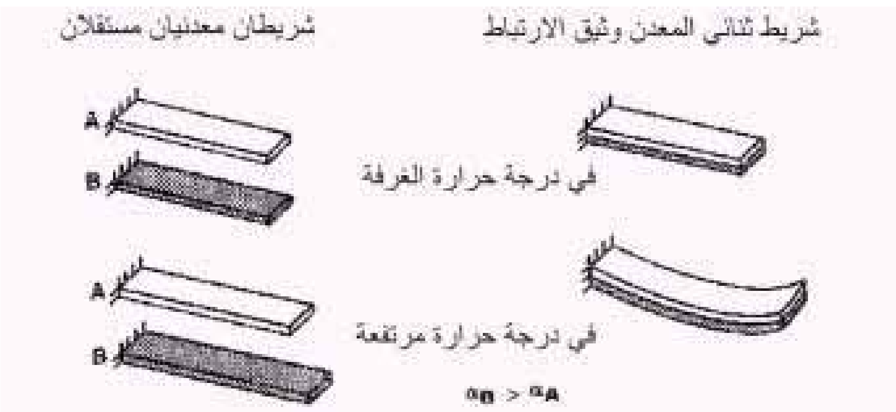
1. 2. 1. 2 المواد المركَّبة الصفائحية الطبقية

تتألَّف المواد المركَّبة الصفائحية الطبقية (laminated) من طبقات مرتبطة ببعضها البعض ومكوّنة على الأقل من مادتين مختلفتين عن بعضهما البعض. يُستخدَم التصفيح لجمع الميّزات الأفضل لطبقات المكوّنات والمادة المصفوفة من أجل الحصول على مادة ذات فائدة أكبر. المميزات التي يمكن تحسينها بالتصفيح هي المتانة والجساءة والوزن المنخفض ومتانة التآكل ومتانة الاهتراء وجمال المظهر أو الجاذبية والعزل الحراري الصوتي... الخ. وتكمن أفضل طريقة لبيان هذه الادعاءات في الأمثلة الواردة في الفقرات التالية التي يتمّ فيها وصف ثنائيات المعدن ومعادن التغليف والزجاج الصفائحي والصفائح الطبقية ذات الأساس البلاستيكي والموادّ المركَّبة الليفية الصفائحية.

ثنائيات المعدن:

إن ثنائيات المعدن (bimetals) هي صفائح طبقية تتألف من معدنين مختلفين يمتلكان عادةً مُعامِلي تمدّد حراري مختلفين عن بعضهما البعض بشكلٍ هام. وعند تغيّر درجة الحرارة تلتفّ ثنائيات المعدن أو تنحني بمقدار قابل للتوقّع، ولهذا تُعتَبر مناسبة تماماً للاستعمال في الأجهزة التي تقيس درجة الحرارة. على سبيل المثال، يمكن صناعة مُنظم حرارة (ثرموستات) بسيط من عتلة شريطية تتكوَّن من معدنين ملتصقين معاً كما هو موضَّح في الشكل 1-3. وهنا، يمتلك المعدن A معُامِل تمدّد حراري α_A و يمتلك المعدن B مُعامِل تمدّد حراري α_B أكبر من α_A. فإذا أخذنا بعين الاعتبار الحالتين

التاليتين: (1) شريطان معدنيان غير ملتصقين لديهما مُعاملا تمدّد حراري مختلفان يوضعان بجانب بعضهما البعض بدون أن يتمّ التصاقهما. (2) نفس الشريطين المعدنيين وقد تمَّ لصقهما معاً. في الحالة (1) عند درجة حرارة الغرفة يكون للشريطين المعدنيين نفس الطول، وعند تسخينهما يزداد طول كليهما (هذا هو التغيّر الأولي الملحوظ لهما، لكنهما في الحقيقة يزدادان أيضاً عرضاً وثخانةً). وفي الحالة (2) عند درجة حرارة الغرفة يكون للشريطين المعدنيين نفس الطول أيضاً، لكنهما هنا ملتصقان معاً. وعندما يُسخَّن الشريط ثنائي المعدن الملتصق، يسعى الشريط B إلى التمدّد الحراري أكثر من الشريط A، ولكن باعتبارهما ملتصقين بشكل وثيق فإنّ الشريط B يسبّب انحناء الشريط ثنائي المعدن! وهذا الانحناء الحادث بتأثير حمولة يبدو أنها كانت ستسبّب في ظروف أخرى مجرّد استطالة هو مثالنا (الوصفي) الأول حول الظاهرة البنيوية لإقران بين الانعطاف والاستطالة التي سوف ندرسها بتفصيلٍ أكبر في الفصل الرابع.



الشكل 1–3: عتلة من شريط ثنائي المعدن (مُنظم حرارة)

معادن التغليف

يهدف تغليف (cladding) أو تغطية معدن بمعدن آخر إلى الحصول على أفضل الخصائص من كليهما. فعلى سبيل المثال، لا تعتبر سبائك الألمنيوم عالي–المتانة (high-strength) منيعةً ضد التآكل، بينما يُظهر الألمنيوم النقي وبعض سبائك الألمنيوم

مناعة شديدة ضد التآكل ولكنها ضعيفة نسبياً. وهكذا تُعَدُّ سبيكة الألمنيوم عالية المتانة المغطاة بسبيكة ألمنيوم منيعة–للتآكل مادةً مركَّبةً تمتلك متانة عالية، وبنفس الوقت منيعة أمام التآكل، أي أنها تتمتَّع بمزايا فريدة من نوعها وجذّابة تتفوّق بها على خصائص مكوِّناتها الأساسية.

في ستينيات القرن العشرين دخلت أسلاك الألمنيوم المغلَّفة بحوالى 10% نحاس إلى سوق الأسلاك الكهربائية كبديل عن الأسلاك النحاسية. فسلك الألمنيوم بحدّ ذاته اقتصادي السعر وخفيف الوزن، لكنه يسخن أكثر ممّا ينبغي، كما أنه صعب توصيله إلى النهايات الطرفية في مفاتيح التبديل ومآخذ التيار الكهربائي الجدارية. إنّ وصلات أسلاك الألمنيوم تتمدّد وتتقلّص مع مرور التيار الكهربائي وانقطاعه، وهكذا يتعرَّض السلك إلى الكسر بسبب التعب (fatigue)، وهذا ينجم عنه حدوث دارات قصر كهربائي (short sircuits or shorts)، وبالتالي احتمال اندلاع حرائق. ومن جهة أخرى، نجد أنّ السلك النحاسي غالي الثمن وثقيل الوزن نسبياً، لكنه يبقى بارداً ويمكن وصله بسهولة إلى مفاتيح التبديل ومآخذ التيار الكهربائي. أمّا سلك الألمنيوم المغلَّف بالنحاس، فهو خفيف الوزن وقابل للوصل، ويبقى بارداً، كما أنه أقلّ ثمناً من السلك النحاسي. علاوةً على ذلك، يُعتبَر سلك الألمنيوم المغلَّف بالنحاس شبه منيع ضد مشكلة السرقة الاعتيادية في مواقع التعمير، نظراً إلى الانخفاض الكبير هنا في القيمة المستردة (salvage value) مقارنةً بسلك النحاس.

الزجاج الصفائحي

تمَّ توسيع مفهوم حماية طبقة من مادة معيّنة بواسطة طبقة من مادة أخرى –كما وُصف في الفقرة السابقة (معادن التغليف)– بطريقة فريدة نوعاً ما ليُستخدَم في زجاج الوقاية في العربات. فزجاج النوافذ العادي لديه قدرة على الصمود كافية للمحافظة على شفافيته في الظروف المناخية القصوى، لكنه قصفٌ أو هشٌّ (brittle) للغاية وخطر بسبب إمكانية تحطّمه إلى قطع عديدة ذات حواف حادّة خاصةً عند الاصطدامات. من جهةٍ أخرى، تُعتَبر المادة البلاستيكية المدعوة بولي فينيل بوتيرال (polyvinyl butyral)

متينةً جداً (very tough) (تتحمل انفعال إلى درجات عالية بدون أن تتكسر)، لكنها قابلة للتشوه بشكل كبير، كما أنها عرضة للخدش بسهولة. يتألف زجاج الوقاية من طبقة من البولي فينيل بوتيرال بين طبقتين من الزجاج، فالزجاج في المادة المركَّبة يحمي المادة البلاستيكة من الخدوش ويعطيها الجساءة، بينما تؤمِّن المادة البلاستيكة صفة المتانة لتلك المادة المركَّبة. وهكذا، بوجودهما سويةً يحمي كلٌّ من الزجاج المادة البلاستيكة الطرفَ الآخر بطرق مختلفة، ويؤدّي ذلك إلى مادة مركَّبة تحسَّنت مميزاتها بشكل هائل بالنسبة إلى مكوِّناتها الأساسية. في الواقع، حُذفت نهائياً صفة التعرّض إلى الخدش بسهولة للمادة البلاستيكة بسبب كونها الطبقة الداخلية من الصفيحة الطبقية (laminate) المركَّبة.

الصفائح الطبقية ذات الأساس البلاستيكي

هناك موادٌ عديدةٌ يمكن أن تُشبَّع بأنواع متباينة من المواد البلاستيكة من أجل تحقيق أغراض شتّى. ليس المُنتَج الشائع الفورميكا (formica) ببساطة إلا عبارة عن طبقات من ورق اللفّ (kraft paper) الثقيل المشبع براتنج فينولي، وُضعت فوقها صفيحة تزيينية مُشبَعة بمادة بلاستيكة، وُضعت فوقها بدورها حصيرة سللوزية مُشبَعة بمادة بلاستيكية. تُستعمَل الحرارة والضغط من أجل التصاق الطبقات مع بعضها البعض بشكل وثيق. وهناك تعديل مفيد قيد التداول يتضمن توضع طبقة من الألمنيوم بين الطبقة التزيينية وطبقة ورق اللفّ من أجل تبديد الحرارة بسرعة، مثل حرارة سيجارة محترقة، أو حرارة مقلاة ساخنة موضوعة على منضدة المطبخ بدلاً من تركها بقعة محروقة. تعتبر الفورميكا مثالاً جيِّداً لمادة مركَّبة مؤلَّفة من عدة عناصر، أي مادة تُصنَع من أكثر من مكوِّنَين يساهم كلٌّ منها مساهمةً أساسية – لكنها مختلفة– في المادة المركَّبة الناتجة.

يمكن أن تُشبَع طبقات من قماش الزجاج أو الأميانت (الحرير الصخري) بالسليكون لتوليد مادة مركَّبة لها خصائص معُتبَرة عند درجات الحرارة العالية. ويمكن للزجاج أو الكفلار (Kevlar) أو أقمشة النايلون أن تُشكل صفائحياً مع أنواع شتّى من الراتنجات لتوليد مادة مركَّبة متانة للصدم وللاختراق تناسب على نحوٍ فريد دروع

شخصية خفيفة الوزن. في الحقيقة، تبدو لائحة الأمثلة بلا نهاية، لكن الأمثلة المذكورة أعلاه تكفي لتحقيق الغاية من هذا الشرح.

1. 2. 1. 3 المواد المركَّبة الحبيبيّة

تتألَّف المواد المركبة الحبيبية (particulate composite materials) من حبيبات مادةٍ أو أكثر تُعلَّق ضمن مصفوفة مادة أخرى. ويمكن أن تكون الحبيبات إمّا معدنية أو لا معدنية، وينطبق نفس الأمر على المصفوفة. وسوف نتكلم على التركيبات الأربعة الممكنة لهذه المكوّنات في الفقرات التالية.

المواد المركَّبة الحبيبيّة اللامعدنية في صفوفة لامعدنية

إنّ المثال الأكثر شيوعاً عن منظومة حبيبية لا معدنية مصفوفة لا معدنية، هي في الواقع المادة المركَّبة الأكثر شيوعاً على الإطلاق وهي الخرسانة. فالخرسانة هي عبارة عن حبيبات من الرمل والحصى (حبيبات صخرية) تُربَط سويةً بشكل وثيق بواسطة خليطٍ من الأسمنت والماء تفاعَلَ كيميائياً وأصبح قاسياً. وتكون متانة الخرسانة في الحالة الطبيعية معادلة لمتانة الحصى، لأنّ المصفوفة الأسمنتية أكثر قوة من الحصى. ويتم تغيير تراكم المتانة صعوداً حتى الوصول إلى متانة الحصى من خلال تغيير نوع الأسمنت من أجل زيادة أو تقليل سرعة التفاعل الكيميائي. وقد تمَّ تأليف كُتب عديدة حول الخرسانة وعن شكلٍ مختلف آخر هو الخرسانة المسلَّحة (reinforced concrete) التي يمكن اعتبارها على السواء مادة مركَّبة ليفية ومادة مركَّبة ذات حبيبات.

يمكن أن تشكِّل قشيرات flakes من مواد لا معدنية مثل الميكا والزجاج مادةً مركَّبةً فعّالةً عندما تُعلَّق في زجاجٍ أو مادةٍ بلاستيكية على التوالي. تمتلك القشيرات بصورة أولية هندسةً ثنائية الأبعاد ذات متانة وجساءة في كلا الاتجاهين مقارنةً باتّجاه واحد فقط في حالة الألياف. وفي العادة، تتنضّد القشيرات الواحدة موازية للأخرى، ممّا يؤدي إلى كثافة أعلى منها في مفاهيم تنضيد الألياف. ووفقاً لذلك، يتطلَّب ارتباط القشيرات مصفوفة أقلّ من الألياف. تتراكب القشيرات مع بعضها البعض بشكل كبير جداً، بحيث تكون المادة المركَّبة الحاوية على القشيرات كتيمةً تجاه السوائل أكثر بكثير

من مادة مركَّبة عادية لها نفس المكوِّنات المادية. تُستعمَل المواد المركَّبة ميكا–ضمن–زجاج بشكلٍ واسع في التطبيقات الكهربائية بسبب ميِّزاتها الجيِّدة في ميدانَي العزل والتشغيل. وتُظهِر قشيرات الزجاج ضمن مصفوفة راتنجية بلاستيكية إمكانيات كامنة تشبه – إن لم تكُن تفوق– تلك في المواد المركَّبة ذات الألياف الزجاجية. ونتيجة كثافة التنضيد الأعلى فيها، سيكون من السهل حتى تحقيق قيمٍ عاليةٍ من معاملات الجساءة والمتانة بواسطة المواد المركَّبة ذات قشيرات الزجاج أكثر منه بواسطة المواد المركَّبة ذات الألياف الزجاجية. لكنّ الصدوع المجهرية السطحية تقلِّل من متانة المواد المركَّبة ذات قشيرات الزجاج نسبةً إلى المواد المركَّبة الرائجة في الوقت الراهن ذات الألياف الزجاجية الأكثر كمالاً.

المواد المركَّبة الحبيبية المعدنية مصفوفة لا معدنية

يتألف الوقود الدافع الصلب في الصواريخ من حبيبات لاعضوية مثل مسحوق الألمنيوم ومؤكسدات من البيركلورات ضمن رابط عضوي مرن من مثل بولي يورايثان (polyurethane) أو مطاط البولي سلفيد. تشكِّل الحبيبات نسبة تصل حتى 75% من الوقود الدافع تاركةً 25% فقط للمادة المصفوفة. والغرض من ذلك هو تفاعل احتراق مستقر من أجل تأمين قوة دفع تحت السيطرة. وهكذا، يجب أن تكون المادة المركَّبة منتظمة المميزات، ويجب ألاّ تتصدع ؛ وإلاّ فإنّ الاحتراق سوف يتمّ بشكلٍ متقطع وغير مستقر، والذي يمكن أن يتطوَّر فعلياً إلى انفجارات سوف تؤثِّر –على أقلّ تقدير– تأثيراً عكسياً على مسار الصاروخ. تتناسب القوة الدافعة الآنية للصاروخ مع مساحة سطح الاحتراق؛ ولهذا السبب يتمّ صب الوقود الدافع الصلب بواسطة فتحةٍ نجمية الشكل – على سبيل المثال– بدلاً من فتحةٍ دائرية. بسبب التباين بين معاملات جساءة الحبيبات والمادة المصفوفة، ينشأ عدد من معضلات تحليل الإجهاد على علاقة مع تدعيم الوقود الصلب في حاوية محرِّك–الصاروخ ومع الإجهادات الداخلية. يمكن إنقاص الإجهادات الداخلية عن طريق محاولة أمثلة (optimize) شكل مقطع الاحتراق؛ ويمثل هذا، مرةً أخرى، سبباً لجعل الفتحة غير دائرية.

إنّ وجود قشيرات معدنية في مُعلَّق هو أمر شائع. وعلى سبيل المثال، يعتبر دهان الألمنيوم فعلياً قشيرات ألمنيوم مُعلَّقة ضمن الدهان. وعند التطبيق، تتوجّه القشيرات بحيث توازي السطح وتوفِّر تغطية جيِّدة جداً. وبشكلٍ مشابه، يمكن أن تُطبَّق قشيرات الفضة لتؤمِّن موصلية كهربائية جيِّدة.

لحام القصدير البارد هو مسحوق معدني مُعلَّق ضمن راتنج تصلّب حراري. وتكون المادة المركَّبة هنا قوية وقاسية وموصلة للحرارة والكهرباء. ويؤدي إدخال النحاس في راتنج الإيبوكسي إلى زيادة الموصلية بشكلٍ هائل. وهناك العديد من الإضافات المعدنية إلى المواد البلاستيكية التي تزيد الموصلية الحرارية، وتُخفّض مُعامِل التمدّد الحراري، وتُقلِّل الاهتراء.

المواد المركَّبة الحبيبية المعدنية في مصفوفة معدنية

على عكس الحالّ في السبائك، لا تنحلّ الحبيبة المعدنية في مصفوفة معدنية. من الشائع استعمال حبيبات الرصاص في السبائك النحاسية وفي الفولاذ لتحسين قابلية التشغيل (بحيث ينفصل المعدن ويسقط بشكل قُشارة (shaving) أكثر منه بشكل جذاذة chip). إضافةً إلى ذلك، يُعتبَر الرصاص مزلِّقاً طبيعياً في المساند (الرولمانات) المصنوعة من سبائك النحاس.

يكون العديد من المعادن قصفاً هشّاً في الحالة الطبيعية عندما توجد هذه المعادن عند درجة حرارة الغرفة، ولذلك يجب تشغيلها عندما تكون ساخنة. ومع ذلك، يمكن أن تُعلَّق حبيبات هذه المعادن مثل التنغستين والكروم والموليبدينوم... الخ، في مصفوفة مطاوعة، وتكون المادة المركَّبة الناجمة عن ذلك مطاوعة، وتمتلك بنفس الوقت ما لدى مكوِّناتها القصفة من مميزات في درجة الحرارة – المرتفعة. تُدعى العملية الحالية التي تُستعمَل لتعليق الحبيبات القصفة التلبيد السائل (liquid sintering)، وهي تتضمَّن ارتشاح المادة المصفوفة حول الحبيبات القصفة. ولحسن الحظ، تصبح الحبيبات القصفة خلال عملية التلبيد السائل مدوَّرةً، وبالتالي وبشكل طبيعي أكثر مطاوعةً.

المواد المركَّبة الحبيبية اللامعدنية في مصفوفة معدنية

يمكن أن تُعلَّق حبيبات لا معدنية مثل السيراميك في مصفوفة معدنية، وتُدعى المواد المركَّبة الناتجة باسم المواد السيراميكية المعدنية (سيرميت acermet)، وهناك فئتان شائعتان من هذه المواد، وهما فئة المواد المركَّبة ذات الأساس- الأوكسيدي، وفئة المواد المركَّبة ذات الأساس- الكربيدي.

وبانحراف بسيط عن المخطط الحالي للتصنيف، يمكن أن تكون المواد السيراميكية المعدنية (السيرميتات) إما حبيبات أوكسيد ضمن مصفوفة معدنية وإما حبيبات معدنية ضمن مصفوفة أوكسيدية. وتُستعمَل مثل هذه المواد السيراميكية المعدنية (السيرميتات) في صناعة الأدوات وفي التطبيقات ذات درجة الحرارة - العالية حيث نحتاج إلى متانة الحت.

تمتلك المواد السيراميكية المعدنية (السيرميتات) ذات الأساس الكربيدي حبيبات من كربيد التنغستين والكروم والتيتانيوم. يُستعمَل كربيد التنغستين في مصفوفة من الكوبالت في أجزاء الآلات التي تتطلَّب قساوة عالية جداً مثل قوالب سحب الأسلاك والصمّامات الخ...، ويُظهر كربيد الكروم في مصفوفة من الكوبالت متانة عالية للتآكل والاهتراء؛ ويتمتع كذلك بمعامِل تمدّد حراري قريب من مُعامِل الفولاذ، لذا فهو مناسب تماماً للاستعمال في الصمّامات. ويُستعمَل كربيد التيتانيوم في مصفوفة إمّا من النيكل أو من الكوبالت في كثيرٍ من الأحيان في التطبيقات ذات درجة الحرارة - العالية مثل أجزاء العنفات. وتُستعمَل المواد السيراميكية المعدنية (السيرميتات) أيضاً كعناصر وقود وقضبان تحكّم في المفاعلات النووية، فعناصر الوقود يمكن أن تكون حبيبات أوكسيد اليورانيوم في سيراميك فولاذي غير قابل للصدأ، بينما يُستعمَل كربيد البور في الفولاذ غير القابل للصدأ في قضبان التحكّم.

1. 2. 1. 4 دمج المواد المركَّبة

يبدي عدد من المواد المركَّبة متعددة الأطوار أكثر من مميزة تميِّز الفئات المختلفة من المواد المركَّبة الليفية والصفائحية والحبيبية التي ناقشناها أعلاه. فعلى سبيل

المثال، تعتبر الخرسانة المسلَّحة مادة حبيبية (لأنّ الخرسانة تتألف من حصى ضمن رابط من معجون–أسمنتي) ومادة ليفية على السواء (بسبب التقوية بواسطة الفولاذ). كذلك، من الواضح أنَّ المواد المركَّبة الطبقية المقوّاة بالألياف هي مواد مركَّبة صفائحية وليفية على السواء. وهكذا، فإنّ أيّ نظام تصنيفي هو نظام اعتباطي وغير كامل. ورغم هذا، يجب أن يفيد هذا النظام في إطلاع القارئ على الإمكانيات الواسعة للمواد المركَّبة.

تُعتَبر المواد المركَّبة الطبقية المقوّاة بالألياف صنفاً هجيناً من المواد المركَّبة، له صلة بكلٍّ من المواد المركَّبة الليفية وتقنيات التصفيح. وهنا تُلصق طبقات من المادة المقوّاة بالألياف سويةً، بحيث تتوجَّه ألياف كل طبقة بشكل نموذجي نحو جهة مختلفة عن الأخرى، للحصول على معاملات متانة معاملات جساءة مختلفة للصفيحة الطبقية في الاتّجاهات المتباينة. وهكذا يمكن ملاءمة متانة وجساءة المادة المركَّبة المقوّاة بالألياف حسب المتطلّبات المحدَّدة لتصميم العنصر الإنشائي الذي يتمّ بناؤه. وتتضمَّن الأمثلة على المواد المركَّبة الصفائحية المقوّاة بالألياف حاويات محركّات الصواريخ وهياكل القوارب وألواح أجنحة الطائرات وأقسام من أجسامها ومضارب التنس ومقابض مضارب الغولف...الخ

1. 2. 2 السلوك الميكانيكي للمواد المركَّبة

تمتلك المواد المركَّبة عدداً من مميزات السلوك الميكانيكي التي تختلف عن تلك المميزات في المواد الهندسية الأكثر تقليديةً. وتكون بعض هذه المميزات مجرَّد تعديل في السلوك التقليدي؛ بينما تُعتَبر مميزات أخرى جديدة كلياً وتتطلَّب إجراءات تحليلية وتجريبية جديدة.

تكون معظم المواد الهندسية الشائعة متجانسة (homogeneous) ومتماثلة المناحي (isotropic) بنفس الوقت:

يمتلك الجسم المتجانس خصائص موحَّدة في كل أنحائه، أي إن الخصائص مستقلّة عن الموقع ضمن الجسم.

ويمتلك الجسم متماثل المناحي خصائص مادية تبقى نفسها في كل الاتّجاهات انطلاقاً من نقطة ما في الجسم، أي إن الخصائص مستقلّة عن التوجّه في نقطة ما في الجسم.

إنّ الأجسام التي تمتلك خصائص مادية متماثلة المناحي متعلقة بدرجة الحرارة ليست متجانسة عندما تتعرَّض إلى تدرج حراري، لكنها تبقى متماثلة المناحي.

وعلى العكس تكون المواد المركَّبة في غالبية الأحيان غير متجانسة (inhomogeneous) (أو لا متجانسة (nonhomogeneous) أو متغايرة (heterogeneous): حيث يمكن استعمال هذه التعابير الثلاثة كلٍّ واحد كبديل عن الآخر) ولا متماثلة المناحي nonisotropic على السواء (ثلاثية المناحي "orthotropic" أو – بشكلٍ أعمّ- غير متماثلة المناحي "anisotropic"، ولا يحل هذان التعبيران كلّ واحد محل الآخر):

يُظهر الجسم غير المتجانس خصائص غير موحَّدة على امتداد الجسم، أي إن الخصائص تتعلق بـــ الموقع ضمن الجسم.

يُظهر الجسم ثلاثي المناحي خصائص مادة تختلف حسب اتجاهات ثلاث متعامدة مع بعضها في نقطةٍ ما في الجسم، ويمتلك إضافةً إلى ذلك ثلاثة مستويات ذات خاصية تناظر للمادة متعامدة مع بعضها البعض. وهكذا، تعتمد الخصائص على التوجّه في نقطة ما في الجسم.

يُظهر الجسم غير متماثل المناحي خصائص مادية تختلف حسب كل الاتجّاهات في نقطةٍ ما في الجسم، ولا توجد مستويات تناظر خاصة المادة. ومرةً أخرى تعتمد الخصائص على التوجّه في نقطة ما في الجسم.

لدى بعض المواد المركَّبة أشكال بسيطة جداً من عدم التجانس. فعلى سبيل المثال، يمتلك زجاجُ الوقاية الصفائحيّ ثلاثَ طبقات، كلٌّ واحدة منها متجانسة ومتماثلة المناحي؛ وهكذا يكون عدم التجانس للمادة المركَّبة عبارة عن دالة ذات عتبات (step function) في الاتجاه العمودي على مستوي الزجاج. كذلك، نجد أنّ بعض المواد المركَّبة الحبيبية غير متجانسة، لكنها في الآن ذاته متماثلة المناحي، على الرغم من أنّ بعضها ثلاثية المناحي وبعضها الآخر غير متماثلة المناحي. وهناك مواد مركَّبة أخرى

معقَّدة أكثر من ذلك بشكلٍ نموذجي، خاصةً تلك التي لديها ألياف متموضعة وفق زوايا عديدة في الفضاء.

نظراً إلى الطبيعة المتغايرة الملازمة للمواد المركَّبة، فإنها تُدرس بشكل ملائم انطلاقاً من وجهتي نظر اثنتين: الميكانيك المايكروي (المجهري) والميكانيك الماكروي (العياني):

الميكانيك الماكروي هو دراسة سلوك المادة المركَّبة بحيث يتمّ على المقياس المايكروي فحصُ التأثير المتبادل بين المواد المكوِّنة من أجل تقرير أثرها في خصائص المواد المركَّبة.

والميكانيك الماكروي هو دراسة سلوك المادة المركَّبة بحيث يُفترَض أنّ المادة متجانسة، ويتمّ استبيان آثار المواد المكوِّنة فقط كخصائص عيانية (ماكروية) ظاهرية وسطية للمادة المركَّبة.

وفي هذا الكتاب، سوف يتمّ في البدء تركيز الاهتمام على الميكانيك الماكروي، لأنه من بين الاثنين يمكن تقدير قيمته بشكل أكثر يسراً، كما أنه الموضوع الأكثر أهميةً عند تحليل التصميم الإنشائي. وبعد ذلك، سوف يتمّ استقصاء الميكانيك المايكروي من أجل اكتساب إمكانية تقدير كيفية تحديد نسب مكوِّنات المواد المركَّبة، وكيفية ترتيبها، بحيث ننجح في تحقيق متانات ومعاملات جساءات معيَّنة.

إنَّ استخدام مفهومَي الميكانيك العياني والميكانيك المايكروي يسمح بضبط المادة المركَّبة بحيث يمكن الوفاء بمتطلَّبات إنشائية محددة وخسارة القليل جداً من إمكانية أو قدرة المادة. وتعدُّ إمكانية ضبط المادة المركَّبة حسب عملها أو وظيفتها واحدةً من أهمّ الحسنات التي تتميَّز بها المادة المركَّبة من المادة العادية. فالضبط المثالي الكامل لمادة مركَّبة يعطينا فقط الجساءة والمتانة المطلوبتين في كلّ اتجاه من الاتجاهات لا أكثر. في المقابل، يُفترض أنّ تمتلك المادة متماثلة المناحي– بالتعريف– فائضاً من المتانة والجساءة في أيّ اتّجاه آخر مختلف عن ذاك الاتجاه الذي يتطلَّب المتانة أو الجساءة الأكبر.

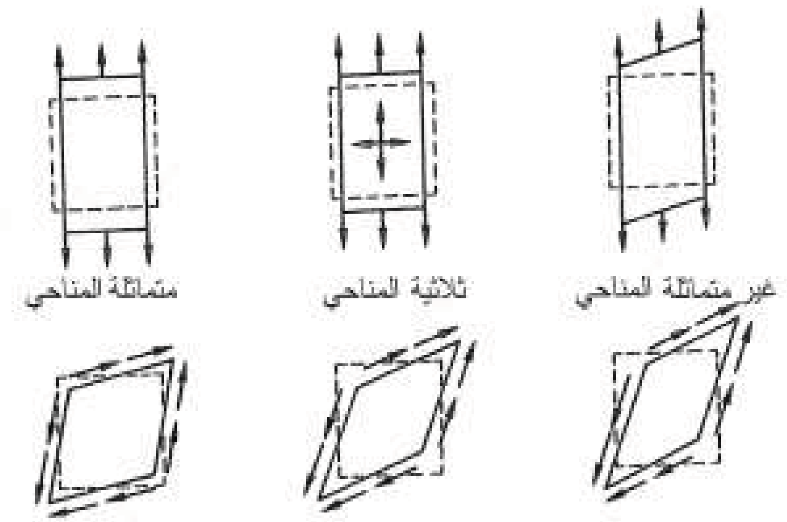
إنّ عدم تماثل المناحي (الذي يكون في أكثر الأحيان ثلاثي المناحي لا غير) الملازم للمواد المركَّبة يقودنا إلى مميزات في السلوك الميكانيكي مخالفة تماماً لتلك التي نصادفها في المواد التقليدية متماثلة المناحي. يبيّن الشكل 1-4 سلوك المواد متماثلة المناحي وثلاثية المناحي وغير متماثلة المناحي عند تعرّضها لأحمال وإجهاد عمودي وإلى إجهاد قصّ، ويُناقَش ذلك في الفقرات اللاحقة.

بالنسبة إلى المواد متماثلة المناحي، يؤدي تطبيق إجهاد عمودي إلى الاستطالة في اتجاه الإجهاد والتقلّص في الاتّجاهات المتعامدة عليه، لكن بدون تشوه قصّ. كذلك يؤدّي تطبيق إجهاد قصّ إلى تشوه قصّ فقط بدون حدوث استطالة أو تقلّص في أيّ اتّجاه. ولا نحتاج، من أجل الحسابات الكمّية للتشوهات، إلاّ إلى معرفة خاصتين من مميزات المادة، هما مُعامِل يونغ "Young's modulus" (مُعامِل الاستطالة أو ميل منحني الإجهاد-انفعال للمادة) ونسبة بواسون "Poisson's ratio" (النسبة السلبية لانفعال التقلّص الجانبي إلى انفعال الاستطالة المحوري الناجم عن إجهاد الاستطالة المحوري). ويمكن أن يُستعمَل مُعامِل القصّ (نسبة إجهاد القصّ إلى انفعال القصّ في نقطةٍ ما) كبديل عن أيٍّ من مُعامِل يونغ أو نسبة بواسون.

بالنسبة إلى المواد ثلاثية المناحي، وكما هو الحال في المواد متماثلة المناحي، يؤدي تطبيقُ إجهاد عمودي في اتّجاه رئيسي للمادة (على طول واحد من تقاطعات المستويات المتعامدة الثلاثة لتناظر المادة) إلى استطالةٍ في اتجاه الإجهاد وإلى تقلّصٍ عمودي على الإجهاد. ويكون مقدار الاستطالة في أحدّ الاتّجاهات الرئيسية للمادة تحت إجهاد عمودي في هذا الاتّجاه مختلفاً عن الاستطالة في اتّجاه رئيسي آخر للمادة تحت نفس ذلك الإجهاد العمودي في ذلك الاتّجاه الآخر، وهكذا نجد مُعاملات يونغ مختلفة في الاتّجاهات الرئيسية المتعدّدة للمادة. إضافةً إلى ذلك، ونظراً إلى خصائص مختلفة في الاتّجاهين الرئيسيين الاثنين للمادة، يمكن للتقلّص أن يكون إمّا أكثر أو أقلّ من التقلّص الذي نجده في مادة متماثلة المناحي تعرَّضت إلى حمل مماثل، ولديها نفس مُعامِل المرونة في اتّجاه الحمل. وهكذا، تترافق نسب بواسون مختلفة مع أزواج مختلفة من

الاتّجاهات الرئيسية للمادة (ومع ترتيب أرقام اتجاهات الإحداثيات التي تميِّز تلك الأزواج).

يؤدي تطبيق إجهاد قصّ إلى تشوه قصّ، لكنّ مقدار تشوه القصّ يكون مستقلاً تماماً عن مُعاملات يونغ ونسب بواسون المختلفة، هذا يعني أنّ مُعامِل القصّ لمادة ثلاثية المناحي –على عكس المواد متماثلة المناحي– ليس متعلقاً بالمميزات الأخرى للمادة. وهكذا، يحتاج توصيف السلوك الميكانيكي للموادّ ثلاثية المناحي على الأقلّ إلى خمسٍ من مميزات المادة (وسوف نجد العدد الصحيح للمميزات في الفصل الثاني).



الشكل 1–4: السلوك الميكانيكي لمواد متنوِّعة

بالنسبة إلى المواد غير متماثلة المناحي، لا يؤدّي تطبيق إجهاد عمودي إلى استطالة في اتّجاه الإجهاد وتقلّص في الاتّجاه العمودي عليه فحسب، بل إلى تشوه قصّ أيضاً. والعكس بالعكس، إذ يؤدّي تطبيق إجهاد قصّ إلى استطالة وتقلّص بالإضافة إلى الاعوجاج الخاصّ بتشوه القصّ. وهذا الإقران بين كلا نمطي الحمولة، وكلا نمطي التشوه، أي إقران القص–استطالة، هو صفة مميّزة أيضاً للمواد ثلاثية المناحي التي

تخضع إلى إجهاد عمودي في اتّجاه غير رئيسي للمادة. على سبيل المثال، القماش هو مادة ثلاثية المناحي تتألَّف من مجموعتين من الألياف المحبوكة بزوايا قائمة مع بعضها البعض. وإذا خضع القماش إلى إجهاد عمودي بزاوية 45° بالنسبة إلى أحد اتّجاهي الألياف، يحدث استطالة واعوجاج على السواء، ويستطيع القارئ بسهولة أن يبيّن هذا الأمر. ومن أجل وصف السلوك الميكانيكي للموادّ غير متماثلة المناحي، وبسبب مميزات الاستجابة الإضافية، هناك ضرورة لخصائص مادية أكثر حتى من خصائص المواد ثلاثية المناحي.

إنّ الإقران بين أنماط التشوه وأنواع الحمولات يولِّد معضلات ليس من السهل التغلّب عليها، وعلى أقلّ تقدير، فإنها تسبِّب إعادة توجيه طرائق التفكير. على سبيل المثال، من الواضح أنّ عيّنة الشدّ التقليدية (عظمة- الكلب) لدى الجمعية الأمريكية للاختبار والمواد (ASTM) التي نراها في الشكل 1-5 لا يمكن أن تُستخدَم لتحديد مُعامِلات الشدّ للمواد ثلاثية المناحي المتعرِّضة لحمل في الاتّجاهات غير الرئيسية للمادة (ولا للمواد غير متماثلة المناحي). فبالنسبة إلى مادة متماثلة المناحي، يكون التحميلُ على عيّنة الشد (عظمة-الكلب) في واقع الأمر تطويلاً مفروضاً، الأمر الذي يقابل صدفةً فقط إجهاداً مفروضاً، وذلك نتيجة التناظر في المادة متماثلة المناحي. ولكن في مادة ثلاثية المناحي محمَّلة-خارج-المحور أو مادة غير متماثلة المناحي، لا يحدث إلاّ التطويل المفروض والمحدَّد بسبب غياب التناظر في المادة حول محور التحميل ووجود نهايات للعيّنة مثبَّتة بإحكام. ووفقاً لذلك، تنتج إجهادات قصّ إضافةً إلى الإجهادات العادية من أجل معاكسة ميل العيّنة الطبيعي إلى القص.

وعلاوةً على هذا، يكون لدى العيّنة ميلٌ إلى الانحراف، وهكذا، فإنّ الانفعال الذي نقيسه ضمن الطول العياري (gage) للعيّنة في الشكل 1-5 لا يمكن استخدامه مع الحمل المحوري لتحديد المُعامِل أو الجساءة المحورية. إذاً، لا بدّ لنا في الحالة النموذجية من استخدام طرائق أكثر تعقيداً من اختبار عينة (عظمة- الكلب) الجمعية الأمريكية للاختبار والمواد من أجل تحديد الخواص الميكانيكية لمادة مركَّبة ما.



الشكل 1-5: عيّنة الشدّ (عظمة- الكلب) لدى الجمعية الأمريكية للاختبار والمواد

لقد تمَّ عرض المميزات المذكورة أعلاه للسلوك الميكانيكي للمواد المركَّبة بطريقة كيفية وبدون برهان، لكن في الفصول اللاحقة، سوف يتمّ إقامة الدليل على وجود هذه المميزات، وسوف تُقدَّم مشاهدات أكثر اتّصافاً بالنواحي الكمّية.

3.2.1 المصطلحات الأساسية للمواد المركَّبة الصفائحية المقوَّاة بالألياف

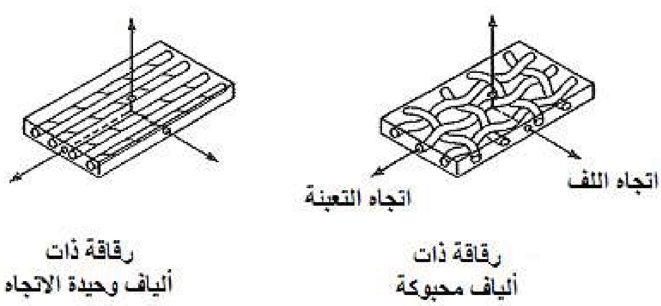
في القسم الباقي من هذا الكتاب سوف يتمّ التركيز على الصفائح الطبقية المركَّبة المقوَّاة بالألياف. وتكون الألياف المقصودة طويلةً ومستمرة مقارنةً بالشعيرات البلورية (whiskers). كما تكون المفاهيم التي تُطرَح هنا قابلة للتطبيق بشكل أساسي على الصفائح الطبقية المركَّبة المقوّاة بالألياف، لكنها صالحة أيضاً لصفائح طبقية أخرى ولمواد مركَّبة تحوي الشعيرات البلورية بعد إجراء بعض التعديلات الواضحة. وهذا يعني أنّ الصفائح الطبقية المركَّبة المقوَّاة بالألياف تُستخدَم كمثال نظامي في كل مكان من هذا الكتاب، لكنّ المفاهيم المُستخدَمة لتحليل سلوكها تكون في غالبية الأحيان قابلةً للتطبيق على أشكال أخرى من المواد المركَّبة. وفي حالات عديدة، سوف يتمّ توضيح قابلية التطبيق هذه بواسطة مثال إضافي إلى المثال الرئيسي المتعلِّق بالصفائح الطبقية المركَّبة المقوَّاة بالألياف.

سوف يتم عرض المصطلحات الأساسية للصفائح الطبقية المركَّبة المقوَّاة بالألياف في الفقرات التالية. وبالنسبة إلى الرقاقة (lamina)، سوف يتم وصف تشكيلات ووظائف المواد المكوِّنة أي الألياف والمصفوفة. وبعد ذلك، ستُناقَش مميزات الألياف

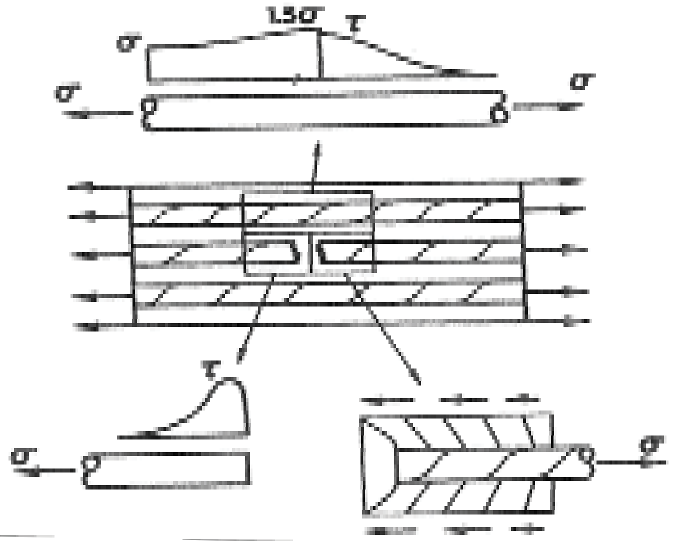
والمصفوفة. وفي النهاية، سوف يتمّ تعريف الصفيحة الطبقية (laminate) من أجل استكمال هذه المقدّمة من مميزات الصفائح الطبقية المركَّبة المقوَّاة بالألياف.

1.3.2.1 الرقاقات

تعتبر الرقاقة اللبنة الأساسية للصفيحة الطبقية، وهي عبارة عن ترتيبٍ مسطَّح (وأحياناً منحني كما في القوقعة) لألياف أحادية الاتّجاه أو ألياف محبوكة مع بعضها البعض ضمن مصفوفة. ويبيّن الشكل 1−6 رقاقتين مسطَّحتين نموذجيتين مع محوريهما الرئيسيين للمادة، حيث يوازي أحدهما اتّجاهَ الألياف ضمن الرقاقة، ويتعامد الثاني هذا الاتجاه. تعتبر الألياف العامل المقوِّي الرئيسي أو عامل التحميل، وتكون عموماً جسيئةً وقوية، ويمكن أن تكون المصفوفة عضوية أو معدنية أو سيراميكية أو كربونية. وتكمن وظيفة في تدعيم الألياف وحمايتها وتأمين توزيع ونقل الحمل بينها. وتعتبر الوظيفة الأخيرة ذات أهمية خاصة عندما ينكسر ليفٌ ما، كما في الشكل 1−7، حيث نجد أنَّ الحمل ينتقل من جزء من الليف المكسور إلى المادة المصفوفة، ومن ثمَّ إلى الجزء الآخر من الليف المكسور، بالإضافة إلى الألياف المجاورة. وتكون الآلية التي ينتقل بها الحمل هي إجهاد القصّ الذي يحدث في المصفوفة ؛ فإجهاد القصّ يقاوم سحب الليف المكسور وانفصاله. وتشكل آلية نقل− الحمل هذه الوسيلة التي تتحمَّل فيها المواد المركَّبة المقوَّاة بالشعيرات البلورية، أيَّ حملٍ يتجاوز المتانة الأصلية المُلازمة للمصفوفة على الإطلاق.

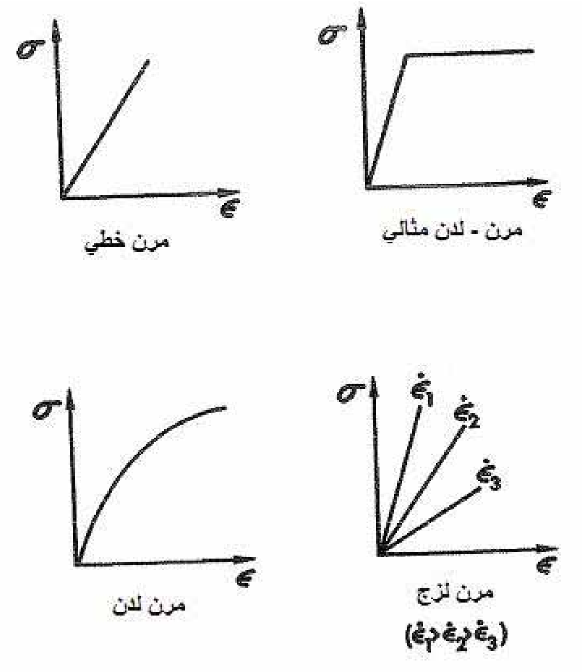


الشكل 1−6: نمطان رئيسيان للرقاقات (laminae)



الشكل 7-1: تأثير الليف المكسور في إجهادات المصفوفة والألياف

نوقشت حتى الآن بإيجاز خصائص مكوِّنات الرقاقة أي الألياف والمصفوفة. وقد تمَّ تمثيل سلوكها الخاصّ بالإجهاد-انفعال كواحد من أربع فئات رُسِمَت في الشكل 1-8. تُظهِر الألياف بشكلٍ عام السلوك المرن الخطّي، على الرغم من أنّ قضبان الفولاذ المقوِّية للخرسانة تقترب أكثر من السلوك المرن- اللدّن المثالي. ويُظهِر الألمنيوم إضافةً إلى العديد من البوليميرات وبعض المواد المركَّبة السلوكَ المرن-اللدن الذي يُعتَبر في الحقيقة سلوكاً مرناً غير خطّي إذا لم يحصل إزالة للحمولة. وفي العادة، تكون مواد المصفوفات الراتنجية مرنة لزجة إذا لم تكُن لدنة لزجة، وهذا يعني أنَّ سلوكها يتعلق بسرعة الانفعال أو أنَّها تمتلك سلوك إجهاد-انفعال خطّي أو غير خطّي. وتُسمى أحياناً علاقات الإجهاد-انفعال المتنوّعة بالعلاقات التأسيسية، وذلك لأنها تصف القانون الميكانيكي الأساسي للمادة، تُعامَل عادة المواد المركَّبة المقوَّاة بالألياف، مثل إيبوكسي-بورون وإيبوكسي-غرافيت



الشكل 1–8 أنواع مختلفة لسلوك الإجهاد

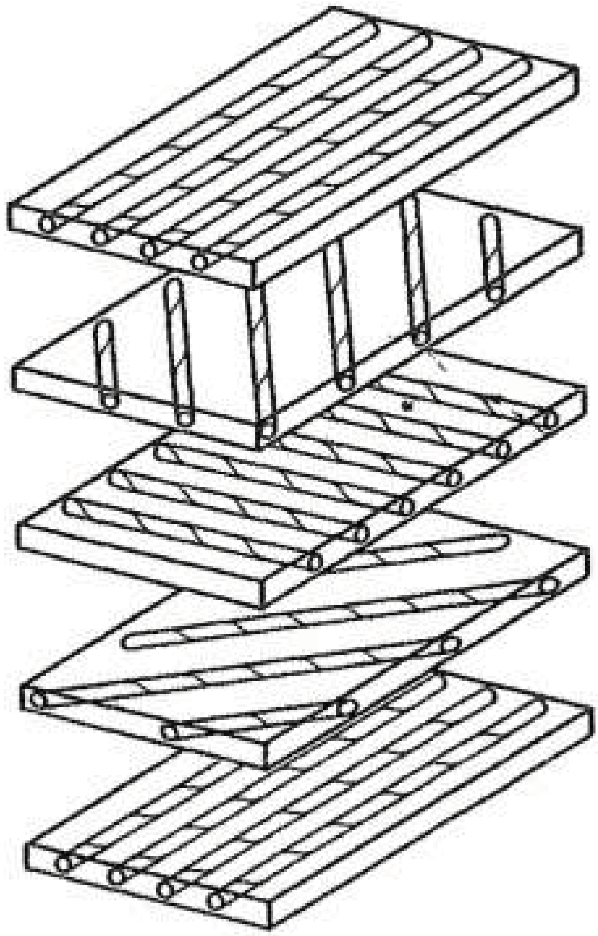
على أنها مواد مرنة خطّية، وذلك لأنَّ الألياف التي هي مرنة خطِّية بشكل رئيسي توفر القسم الأعظم من المتانة والجساءة. ويتطلَّب تحسينُ هذا التقريب الأخذَ بعين الاعتبار بعضاً من أشكال اللدونة أو المرونة اللزجة أو كليهما (اللدونة اللزجة). ولم يتمّ بذل سوى جهدٍ ضئيلٍ للغاية من أجل تطبيق أمثال هذه النماذج أو الحالات المثالية لسلوك المادة المركَّبة في التطبيقات الإنشائية.

1. 2. 3. 2 الصفائح الطبقية

الصفيحة الطبقية (laminate) هي تنضيد من رقاقات ملتصقة مع بعضها البعض ذات توجّهات متعددة لاتّجاهات المادة الرئيسية في الرقاقات، كما هو موضَّح في الشكل 1–9. ويجب ملاحظة أنَّ توجّه الألياف ضمن الطبقات في الشكل 1–9 ليس

متناظراً بالنسبة إلى السطح الأوسط للصفيحة الطبقية. وتكون طبقات الصفيحة الطبقية في العادة ملتصقة مع بعضها البعض بواسطة المصفوفة نفسها التي تُستخدَم في الرقاقات المنفردة. وهذا يعني أنّ قسماً من المصفوفة في الرقاقة يغلِّف سطوح الرقاقة، ويُستخدَم من أجل لصق الرقاقة بالرقاقات المجاورة لها بدون إضافة المزيد من مادة المصفوفة. ويمكن للصفائح الطبقية أن تتألف من صفائح من مواد مختلفة أو – في السياق الذي نتناوله حالياً– من طبقات من الرقاقات المقوَّاة بالألياف. ويمكن أن تُبنى قوقعة طبقية اسطوانية دائرية عن طريق لفّ ألياف مغطاة بالراتنج حول قالب قابلٍ للإزالة يُدعى الشياق (mandril) باتّجاه معيّن في البدء نسبة إلى محور القوقعة الاسطوانة ثم في اتجاهٍ آخر، مع تكرار ذلك حتى الوصول إلى السماكة المطلوبة.

يكمن أحد الأغراض الرئيسية للتصفيح في ضبط علاقة متانة وجساءة المادة المركَّبة بالاتجاه بحيث تلائم بيئة التحميل للعنصر الإنشائي. وتُعتبر الصفائح الطبقية مناسبةً بشكل فريدٍ لهذا الهدف، لأنّ اتّجاهات المادة الرئيسية لكل طبقة يمكن توجيهها حسب الحاجة. فعلى سبيل المثال، يمكن توجيه ست طبقات من صفيحة طبقية ذات عشر طبقات وفق اتّجاهٍ معيّن، بينما يتمّ توجيه الطبقات الأربعة الباقية بحيث تعمل 90° مع ذاك الاتّجاه؛ فتكون لدى الصفيحة الطبقية الناتجة متانة وجساءة استطالة أعلى بحوالى 50% في أحدّ الاتّجاهين مقارنةً بالآخر. وتكون نسبة معاملات جساءة الاستطالة بين الاتجاهين المعنيَين حوالى 6:4 على وجه التقريب، لكنّ نسبة معاملات جساءة الانعطاف تبقى غير معلومة لأنّ طريقة ترتيب الطبقات غير محددة في هذا المثال. علاوةً على ذلك، إذا لم يتمّ تنضيد الرقاقات بشكل متناظر حول السطح الأوسط للصفيحة الطبقية، تكون النتيجة معاملات جساءة تمثّل الإقران بين الانحناء والاستطالة. وسوف تُناقَش هذه المميزات وفق أسس كمّية مُحكَمة في الفصل الرابع.



الشكل 1–9: منظر لبناء الصفيحة الطبقية بدون التصاق الرقاقات

1. 2. 4 تصنيع المواد المركَّبة الصفائحية المقوَّاة بالألياف

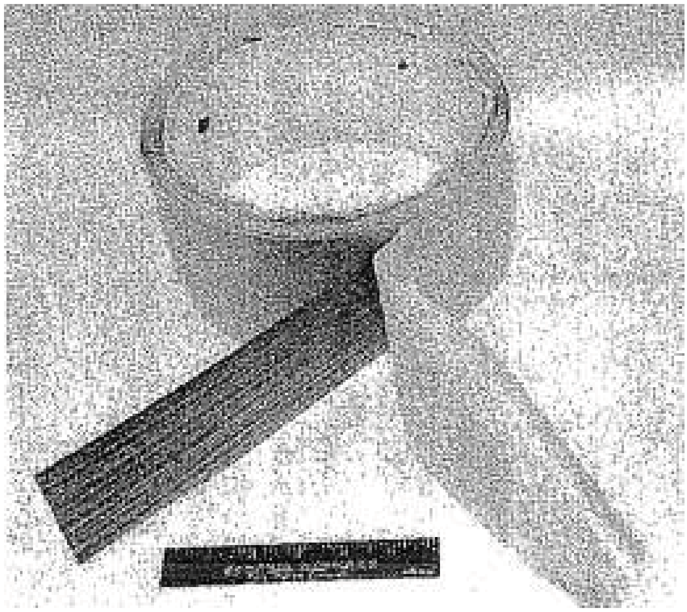
على خلاف معظم المواد التقليدية، هناك علاقة وثيقة جداً بين تصنيع مادة مركَّبة واستعمالها النهائي. وفي غالبية الأحيان، يكون تصنيع المادة فعلياً جزءاً من عملية تصنيع العنصر الإنشائي أو حتى البنية الإنشائية الكاملة، وهكذا، لا يكون الوصف الكامل لعملية التصنيع ممكناً ولا حتى مرغوباً به. وفي هذا القسم من الكتاب، تمَّ اقتصار مناقشة

تصنيع المواد المركَّبة الصفائحية المقوَّاة بالألياف بكيفية تجميع الألياف والمواد المصفوفة من أجل تصنَيع الرقاقة؛ وبكيفية تجميعِ الرقاقات بعد ذلك وشيّها كي تُصنَع الصفيحة الطبقية.

1. 2. 4. 1 الشكل الابتدائي للمواد المكوّنة الأساسية

يمكن تجارياً الحصول على أشكالٍ متعددة من الألياف والمصفوفات، سواء بشكل منفرد أو على شكل رقاقات. فالألياف متوفّرة بشكل منفرد، أو على شكل شلة (roving) تتألف من مجموعة من الألياف المستمرة والمحزومة سويةً بدون فتل. ويمكن للألياف أن تكون أحادية الاتّجاه أو محبوكة مع بعضها البعض، وتكون الألياف في غالبية الأحيان مُشبَعة أو مغلَّفة بمادة راتنجية، مثل الإيبوكسي، التي تُستخدَم لاحقاً كمصفوفة. يُشار إلى هذه العملية بالإشباع المُسبَق (preimpregnation)، وتُدعى مثل تلك الألياف المُسبَقة الإشباع باسم "ألياف مُسبقَة الإشباع" (prepreg).

وعلى سبيل المثال، تتوفَّر ألياف أحادية الاتّجاه في مصفوفة من الإيبوكسي على شكل شريط (شريط مُسبَق الإشباع)، حيث تتوضع الألياف على امتداد الاتجاه الطولي للشريط (انظر الشكل 1−10). ويتمّ الحفاظ على الألياف في موقعها ليس فقط بواسطة المصفوفة وإنما أيضاً بواسطة ظهارة (backing) قابلة للإزالة، الذي يمنع كذلك الشريط من الالتصاق مع نفسه ضمن اللفافة (roll). ويشبه هذا الشريط بشدة الشريط المتين المقوّى بالزجاج وشديد الاحتمال وواسع الاستعمال كحزام للعلب. وبشكل مشابه، تتوفَّر أقمشة وحصائر مُسبَقة الإشباع يتمّ فيها حبكُ الألياف مع بعضها البعض ثم إشباعها بواسطة الراتنج. وهناك تنويعات أخرى لهذه الأشكال الرئيسية للألياف والمواد المصفوفة.



الشكل 1–10: شريط مُسبَق الإشباع إيبوكسي– ألياف بورون
(بإذن من شركة جنرال ديناميكس General Dynamics)

1. 2. 4. 2 بناء الطبقات

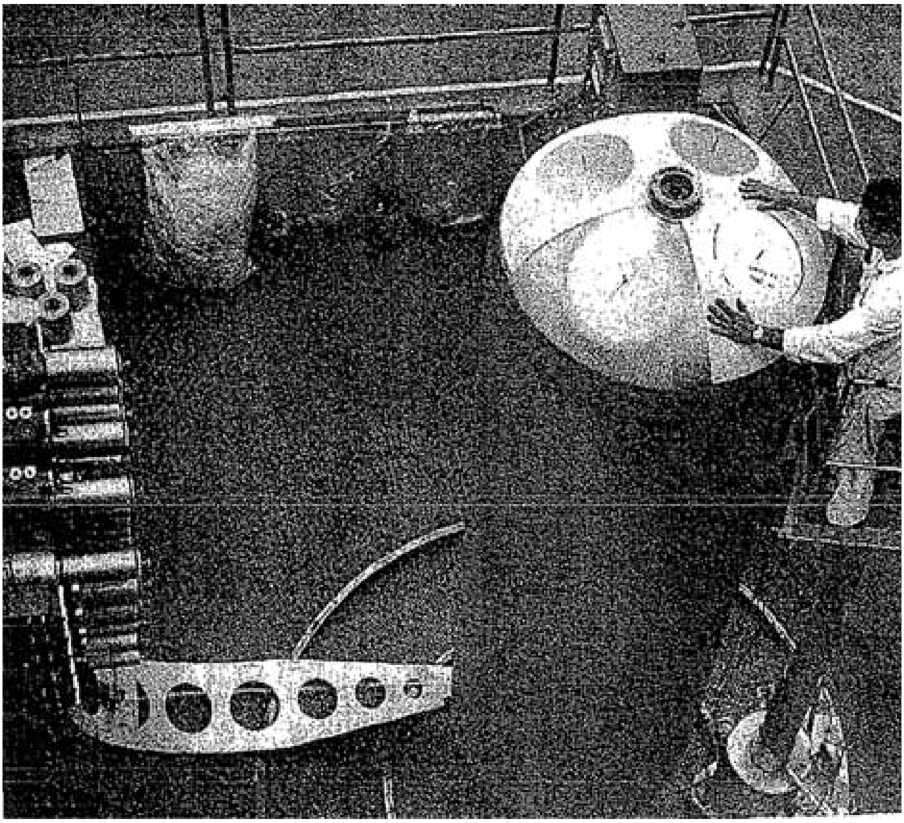
هناك ثلاث عمليات رئيسية لبناء الطبقات (layup) في المواد المركَّبة الصفائحية المقوَّاة بالألياف وهي اللفّ (winding) والفرش (laying) والقولبة (molding). ويعتمد اختيار عملية بناء الطبقات (وكذلك عملية الشوي) على عدة عوامل: حجم العنصر المعني وشكله، التكلفة، الجدول الزمني، الإلمام والخبرة بتقنيات معيّنة الخ...

تتضمن عمليات اللفّ والفرش لفّ الخيوط وفرش الأشرطة أو التغليف بها ولفّ القماش أو التغليف به. يتألَّف لفّ الخيوط من إمرار الليف عبر سائل راتنجي، ومن ثم لفّه حول الشياق (mandril) (انظر الشكل 1–11). يتمّ التغليف بالألياف وفق اتّجاهات مختلفة حول النواة كي نحصل على المتانة والجساءة في العديد من الاتجاهات. بعد ذلك،

تُشوى كامل المجموعة، بما فيه النواة ، ثم تتمّ بعد ذلك إزالتها. وإذا كانت النواة عبارة عن مصبوبة رملية، فإنّ استعمالَ خرطوم مائي لتنظيف وعاء الضغط الجديد يتكفَّل حينها بحلّ المصبوبة الرملية. تكون بعض النوى تجميعات شبيهة – بدعامات – البراميل، وهذا يستدعي تفكيكها عن طريق فتحة في وعاء الضغط الجديد. يبدأ فرش الأشرطة بشريط يتألَّف من ألياف مُسبَقة الإشباع متماسكة بواسطة مادة داعمة قابلة للإزالة. يُفتح الشريط ويُفرش لإعطاء الشكل المطلوب وفق الاتّجاهات المطلوبة لطبقات الشريط. ويمكن أن يُجرى فرش الشريط يدوياً أو آلياً بواسطة آلة لفرش الأشرطة آلياً، والمبينة في الشكل 1–12. يبدأ لفّ القماش أو فرشه بقماش مُسبَق الإشباع يُنشَر ويوضع بالشكل والتوجّه المطلوبين. ويُعتَبر لفّ القماش وفرشه أقلّ مطاوعةً ونجاعةً من لفّ الخيوط أو فرش الأشرطة من حيث تحقيق الأهداف المنشودة من المتانة والجساءة، وذلك بسبب قلة كفاءة الصفة ثنائية الأبعاد للألياف في القماش مقارنة بالشريط أو الألياف أحادية الاتجاه. وهذا يعني أنّ الصفة ثنائية الأبعاد للقماش لا تسمح بالوصول إلى المقادير الكبيرة من المتانة والجساءة التي نستطيع الحصول عليها بواسطة الأشرطة ذات الاتجاه الوحيد، لأنّ القماش لديه دوماً اتّجاهان للمتانة والجساءة متساويان بشكل أساسي (لكن ليس بشكل حتمي). إضافةً إلى ذلك، تكون الألياف المحبوكة في غالبية الأحيان متضرّرة إلى حدٍّ ما بسبب الانحناء الملازم لعملية الحياكة. وتُستخدَم طبقات القماش غالباً كطبقات مالئة في الصفائح الطبقية حيث لا تكون قيمة المتانة والجساءة ذات أهمية حاسمة.

يمكن أن تبدأ عمليات القولبة يدوياً أو بواسطة التوضع الآلي لألياف مُسبَقة الإشباع في طبقات. وفي غالبية الأحيان، تكون الطبقات مُسبَقةُ الإشباع مُسبقةَ القَطْع (Precut) أيضاً. ويتلو ذلك ضغط الطبقات تحت درجات حرارة مرتفعة لتشكيل الصفيحة الطبقية النهائية ضمن مكبس، كما يُشاهَد في الشكل 1–13. وتُستعمَل القولبة – على سبيل المثال– لتصنيع القبب (radomes) (المحافظ المقبَّبة لهوائيات الرادارات) ذات تفاوتات ضيقة (close tolerances) في السماكة. وقولبة الراتنج بالانتقال (Resiss-Transfer Molding) (RTM) هي عملية يتمّ فيها تسخين ألياف أو

(sheets) نسيج جافّة وألواح راتنجية صلبة، وتشكيلها على قالب أو أداة معيّنة كما في الشكل 1-14.

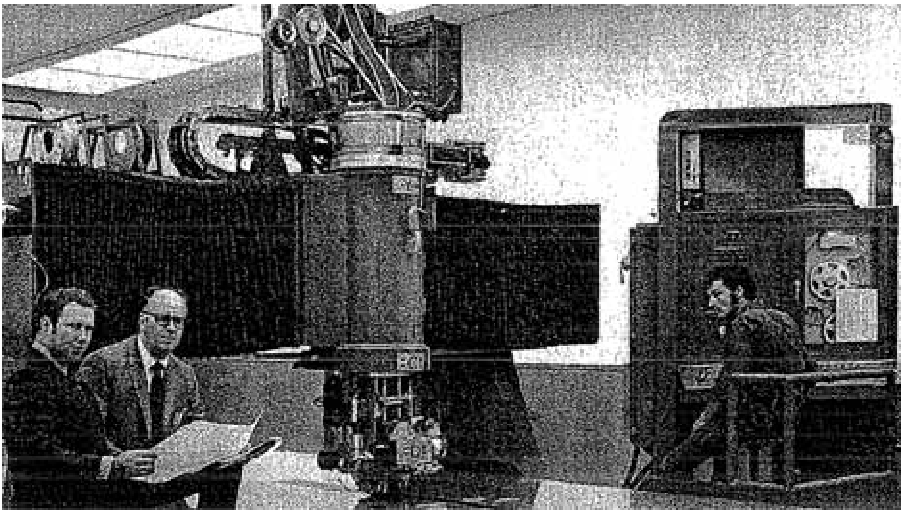


الشكل 1-11: لفّ الخيوط في صندوق محرّك صاروخي

(بإذن من ستراكشرال كومبوزيتس إندستريز *Structural Composites Industries*)

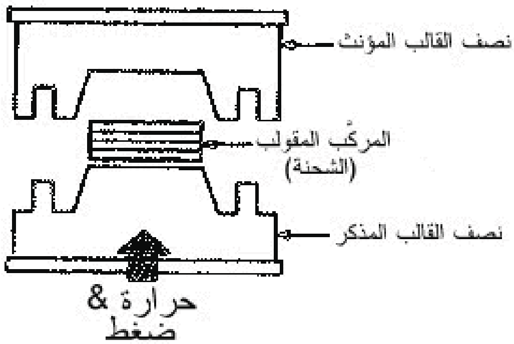
وهكذا، نتمكّن من صنع أجزاء معقَّدة الشكل بسرعة وبخطوة واحدة (متجنّبين خطوة الإشباع المُسبَق للألياف). إنّ الاستخدام الناجع لمثل عمليات القولبة هذه يتضمَّن التحديد المايكروي والتحكّم بعدد كبير من خصائص المادة ومن معاملات التصنيع. يبيّن الشكل 1-15 مجموعة من الإيبوكسي- بورون لهيكل جسم طائرة الـــ F-111، وهو

جزء مركَّب آخر تمَّت قولبته. وفي واقع الأمر، تمَّت قولبة الثلث العلوي من الهيكل ونتج الثلثان السفليان بواسطة توضع وشريط.

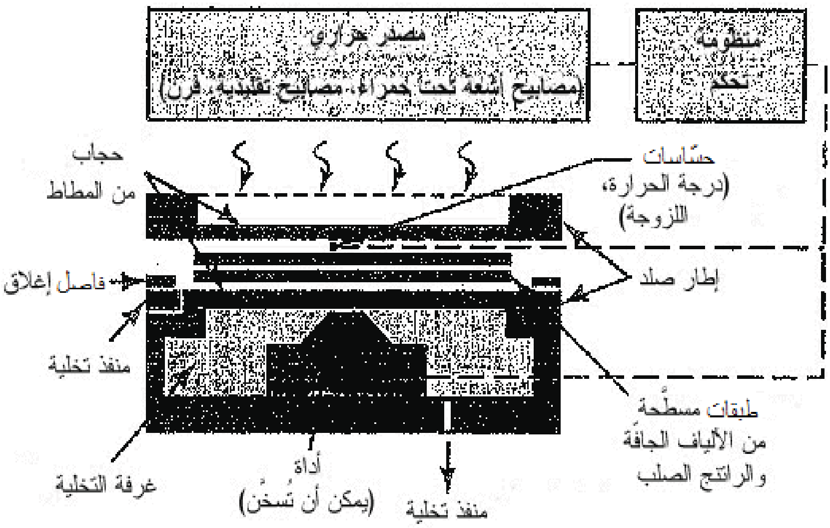


الشكل 1−12: آلة فرش الأشرطة آلياً
(بإذن من جنرال ديناميكس *General Dynamics*)

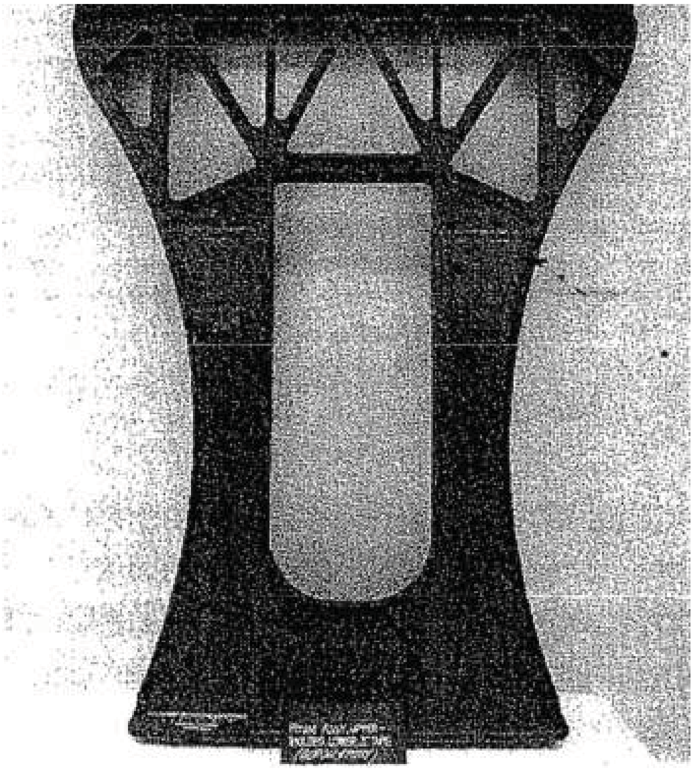
يتألَّف مركَّب قولبة الصفائح (sheet molding compound- SMC) من ألياف مقطَّعة ذات توجّه عشوائي ضمن مصفوفة من الراتنج ومادة مالئة. يتمّ إنتاج مركَّب قولبة الصفائح بالطريقة المستمرة، كما في الشكل 1−16. وهنا نلاحظ أنّ الغشاء الرقيق من البولي إيتيلين يحمي مجموعة الاسطوانات من أن "تلتصق" مع عجينة الراتنج والمادة المالئة. وتُستخدَم لفافات مركَّب قولبة الصفائح الشبيهة ببساط بعد ذلك في آلات القولبة بالضغط لتشكيل أجزاء كبيرة المساحة مثل جوانب السيارات والشاحنات.



الشكل 1-13: القولبة بالضغط

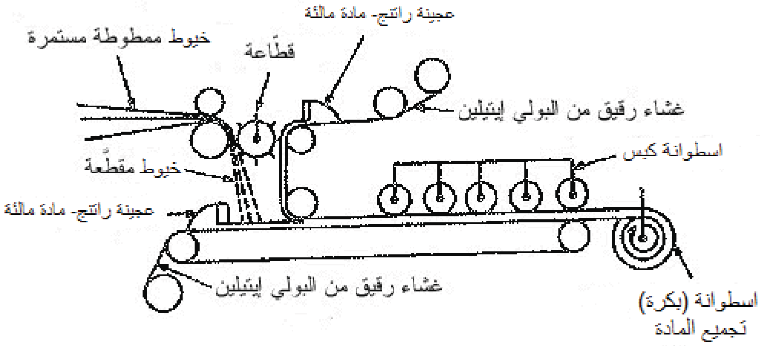


الشكل 1-14: قولبة الراتنج بالانتقال

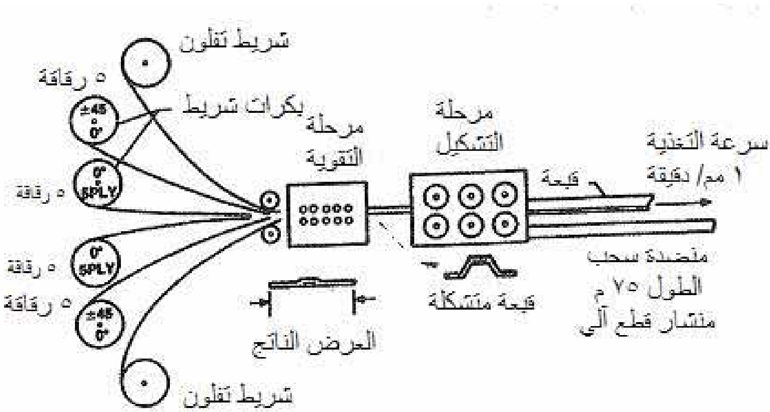


الشكل 1-15: مجموعة هيكل جسم طائرة الــ F-111
(بإذن من جنرال ديناميكس *General Dynamics*)

يمكن لعملية تشكيل اللفافات أن تُستخدَم للإنتاج المباشر لأشكال إنشائية طويلة بكميات كبيرة. يكون شكل المادة الداخلة عبارة عن لفافات من شريط مقوّى بألياف ذات توجّهات مختلفة. يتمّ تقوية الطبقات ومن ثمّ تشكيلها وفق دعامة لها شكل القبعة، على سبيل المثال، كما في الشكل 1-17. ونلاحظ هنا وجود طبقة أكثر جساءةً مثل إيبوكسي-بورون في طبقات الإيبوكسي- زجاج المحيطة. وتزيد مثل هذه الطبقة المتينة المتوضعة بشكلٍ مثيرٍ جداً جساءة الانحراف، على الرغم من تصنيعها السهل، على عكس أية دعامة معدنية.

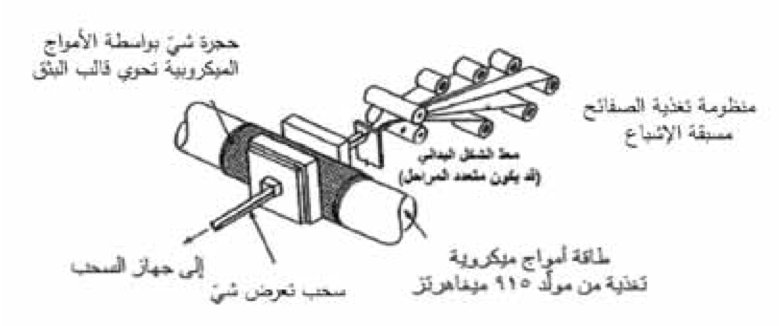


الشكل 1-16: آلة مركَّب قولبة الصفائح



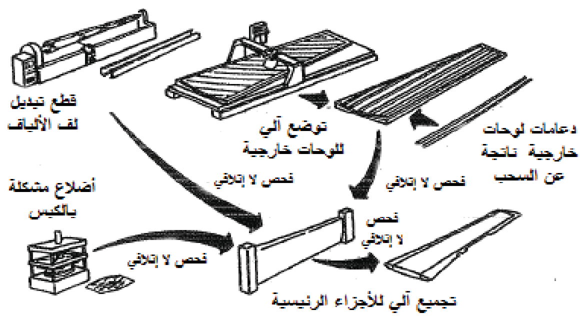
الشكل 1-17: عملية التشكيل بالدرفلة (لدحرجة)

يُستخدَم السحب بالبثق المستمر (continous extrusion) أيضاً لصنع أشكال إنشائية من المواد المركَّبة. تكون المادة الواردة هنا عادةً أحادية الاتجاه، ويجب سحبها من خلال قالب البثق، وذلك لأنَّ المادة المركَّبة غير المشوية تكون بالكامل ليّنة جداً ممّا يسمح بدفعها (كما في عمليات التشكيل بالبثق extrusion). ويمكن أن يتمّ التشكيل المسبق للمادة الواردة بواسطة عدة موجهات واسطوانات، كما في الشكل 1-18.



الشكل 1–18: السحب بالبثق

لقد تناولنا أعلاه عدداً متنوّعاً من عمليات التصنيع، ولكننا بالتأكيد لم نذكر جميع العمليات الممكنة. ويمكن على الأغلب استعمال تلك العمليات لإنتاج أجزاء عديدة مختلفة الأغراض والمميزات. ويمكن دمج الأجزاء المتنوعة بشكل جيد لتشكيل جزء إنشائي وحيد مثل جناح طائرة، كما يظهر في الشكل 1–19. وبعد إتمام كل عملية، يخضع كل جزء من الأجزاء إلى فحص لا إتلافي (Nondestructively Inspected-NDI).



الشكل 1–19: الدمج بين عمليات التصنيع لإنتاج جناح طائرة

3.4.2.1 الشوي (الشيّ)

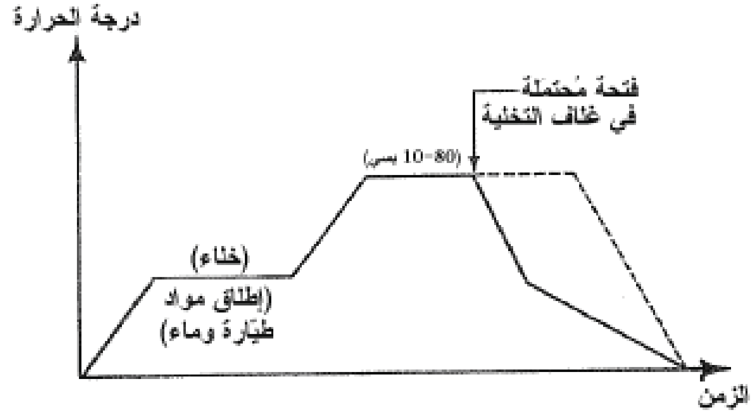
يشير تعبير الشوي بشكل أساسي إلى عملية تصليب مواد المصفوفة البوليميرية (المواد الحاضنة). فمواد المصفوفة المعدنية تُسخَّن ببساطة ثم تُبرَّد حول الألياف كي تتصلَّب. أمّا مواد المصفوفة السيراميكية والكربونية، فإمّا أن تُرسب من البخار أو تُخلَط

مع الألياف ضمن عجينة وتُصلب أو – في حالة المصفوفة الكربونية– تخضع إلى ارتشاح سائل بشكل متكرِّر يتلوه عملية الكربَنة. وهكذا، سنركِّز بحثنا هنا على شوي البوليميرات.

في حالة المصفوفة ذات التصلّب الحراري، تُضاف الحرارة عادةً كعامل محفِّز من أجل تسريع تفاعل البلمرة الكيميائي الطبيعي. تتألَّف الإيبوكسيات ذات الجزأين – مثل تلك الموجودة في محل بيع المواد في جوار أيّ شخصٍ منا– من أنبوب من الإيبوكسي وأنبوب من مادة كيميائية مقسِّية يتفاعلان سويةً عند مزجهما. ولا تُضاف الحرارة في حالة الإيبوكسي ذي الجزأين، بل تُطرَح إلى الخارج كناتج للتفاعل. وبالنسبة إلى جميع الإيبوكسيات تقريباً، تُطرَح إلى الخارج غازات متطايرة خلال عملية الشوي، وتنجم تلك الغازات المتطايرة عن تسخين المذيبات التي تُستخدَم لمنع حدوث شوي (تصليب) الإيبوكسي قبل أن يحين موعد التجميع.

يمكن القول بشكلٍ عام إنه كلّما ارتفعت درجة الحرارة خلال عملية الشوي، قَصُر زمن الشوي (وبالطبع بدون احتراق المادة). ونحتاج إلى الحرارة لعدة أسباب هي: (1) لا تتفاعل بعض المحفِّزات و/أو المقسِّيات إذا كانت تحت درجة حرارة حرجة؛ (2) ضرورة حركة الجزيئات من أجل تماس المجموعات الكيميائية التفاعلية؛ (3) تؤدي الحرارة إلى طرح المواد المتطايرة إلى خارج المذيبات والماء (وإلاّ حدثت الفجوات، وهنا يجب أن نلاحظ أنَّ المواد المتطايرة لن تُطرَح بشكل غازات إذا تمَّ تطبيق الضغط في نفس الوقت)؛ وأخيراً (4) يسيل الراتنج بشكل أكثر سهولةً ممّا يعطي توزيعاً منتظماً. ونحتاج إلى الضغط من أجل تقوية (تحجيم) منظومة الألياف والمصفوفة، ومن أجل طرح الراتنج الزائد خارجاً.

نشاهد في الشكل 1–20 دورة شوي نموذجية لدرجة الحرارة بدلالة الزمن مع الإشارة إلى أفعال أخرى ضمنها. يتكوَّن مقياس الزمن من عدة ساعات، بينما يتكوَّن مقياس درجات الحرارة من مئات من درجات الفهرنهايت (°F) (أو مئات من الدرجات المئوية (°C)).



الشكل 1-20: دورة شوي إيبوكسي نموذجية

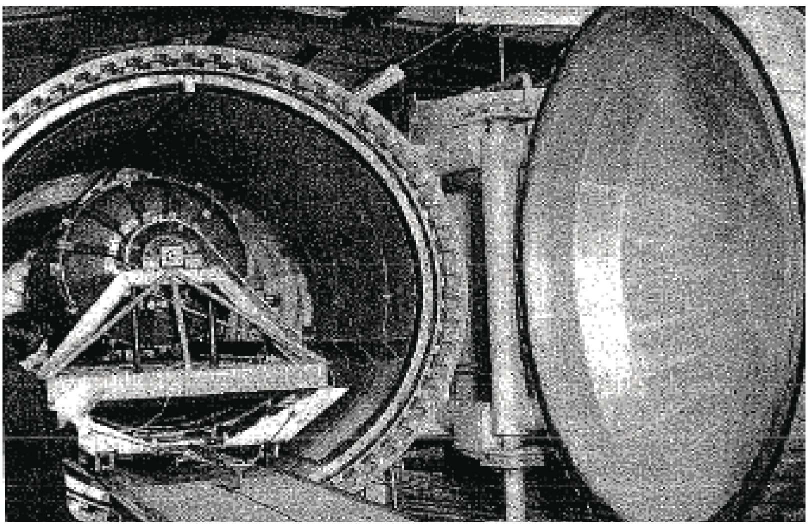
تبتدئ دورة الشوي بارتفاع تدريجي في درجات الحرارة ضمن محيط من الخلاء، بحيث يمكن طرح المواد المتطايرة والماء (البخار) إلى الخارج. بعد ذلك، تزداد درجة الحرارة تدريجياً إلى درجة حرارة الشوي القصوى التي تُثبت لمدة عدة ساعات من الزمن من أجل إحداث درجة عالية من الوصلات المتصالبة، ويكون ذلك مع تطبيق الضغط لتقوية الرقاقات.

يجب أن ندرس سلوك الراتنج خلال عملية الشوي. فقبل الشوي، يكون الشكل البدئي للصفيحة الطبقية عبارة عن رقاقات متموضعة بجوار بعضها البعض في شروط المرحلة- ب (مشوية جزئياً لتقليل سيلان الراتنج خلال التصفيح أو القولبة). يكون الراتنج نصف صلب مع متانة وجساءة يمكن إهمالهما. ومع ازدياد درجة الحرارة تدريجياً، يبدأ الراتنج بالتصالب، ويصبح ذلك هاماً عندما نصل إلى درجة حرارة التهلم gel (درجة الحرارة التي تصل عندها اللزوجة إلى حدٍّ عالٍ بحيث لا تحدث بعدها أية تغيرات في الأبعاد). يؤدي التصالب التدريجي إلى التصلّب، ولكنّ درجة الحرارة المرتفعة تسبّب التلين؛ وبالتالي تُنقص الجساءة. وعند الوصول إلى درجات الحرارة القصوى (في حال الالتزام بدورة الشوي المحدَّدة الذي يعني أيضاً ضرورة المحافظة على درجة الحرارة لمدة محددة)، يصبح التصالب شبه تامّاً. ويكون الراتنج في هذا الوقت قد تصلَّب، ولكنه يمتلك جساءة منخفضة بسبب درجة الحرارة العالية. بعد ذلك،

تنخفض درجة الحرارة تدريجياً إلى درجة حرارة الغرفة خلال فترة زمنية تقارب الساعة لتجنّب الصدمة الحرارية، أمّا الضغط، فيمكن تحريره سريعاً. وإذا تم إجراء مرحلة شيّ لاحق، لا يحدث تصالب إضافي ما لم يتمّ تجاوز درجة الحرارة القصوى السابقة وتثبيت الحرارة لمدة لا تقلّ عن ساعة (بافتراض أنّ درجة الحرارة القصوى السابقة قد ثُبتت لمدة ساعة تقريباً).

يمكن إجراء الشوي في العديد من الأجهزة: القوالب المسخَّنة (الشكل 1−13)، والمكبس الساخن (صفائح مسخَّنة تُكبس مع بعضها) والصاد والموصَد (المحمّ) (autoclave) الذي يُمثل بشكل أساسي نسخة كبيرة جداً لـــ "طنجرة" الطبخ بالضغط الاعتيادية، كما في الشكل 1−21.

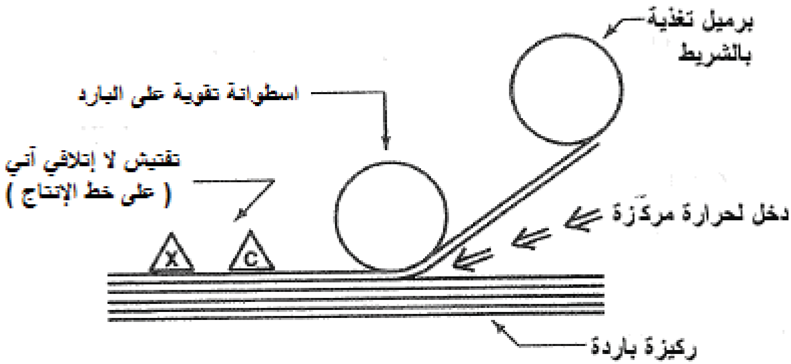
لا تتضمَّن عملية الشوي للمصفوفات ذات التلدن الحراري (thermoplastic-matrix) حدوث التصالب بل مجرَّد الانصهار والتبريد. وهذا يعني أنّ المصفوفة ذات التلدن الحراري تكون بالأساس مادة صلبة يمكن – مثل المعادن– أن تُسخَّن كي تتلين، وتُبرَّد كي تتصلّب.



الشكل 1−21: صاد وموصَد (autoclave)
(بإذن من ثيوكول *Thiokol*)

في حالة بعض مواد التلدن الحراري، تحدث درجة صغيرة من وصلات التصالب، لذلك لا نستطيع أن نُخضع مثل تلك المواد إلى أكثر من عدد محدود من دورات التسخين-التبريد. كذلك، لا نحتاج إلى أن تدوم مدة درجة الحرارة المرتفعة [التي تقارب عادةً 1000 ˚F (500 ˚C)] إلاّ ثواني قلائل لا غير. وهكذا، يستطيع جهاز التسخين بواسطة الليزر والتقوية بواسطة الدرفلة (roller) في الشكل 1-22 أن يقوم بشكلٍ سريع ومتزامن برصّ طبقات الشريط وشيّها.

يعني تعبير الشوي المشترك (cocuring) أنّ الجزأين اللازم وصلهما سويةً يتمّ شيُّهما بشكل متزامن، وفي حالة تماسّ من أجل تحقيق التصاق دائم بينهما. و تنطبق هذه العملية على السواء على المواد المركَّبة المصفوفة المتصلّبة حرارياً (thermoset) والمواد المركَّبة ذات المصفوفة المتلدنة حرارياً (باستثناء أنّ الشوي المشترك لجزأين لهما مصفوفة رابط متصلّبة حرارياً لن يكون بالطبع دائماً).



الشكل 1-22 جهاز توضع طبقات وشوي لمصفوفة ذات تلدن حراري

3.1 الغاية - الميزات الحالية والكامنة للمواد المركَّبة المقوَّاة بالألياف

دُعي ظهور المواد المركَّبة المقوَّاة بالألياف المتقدِّمة بأكبر ثورة تقنية من نوعها منذ اختراع المحرِّك النفّاث [1-4]، ويثير هذا الادّعاء الدهشة إلى حدٍّ كبير باعتبار أنّ التأثير الهائل للمحرِّك النفّاث في أداء الطائرات الحربية واضحٌ بيسرٍ بدون أيّ شكّ. كما أنّ التأثير في الطيران التجاري كان حتى أكثر بروزاً من ذلك، لأنّ الخطوط الجوية

تحوّلت خلال فترة من الزمن لا تتجاوز عدة سنوات من استعمال طائرات تدفعها المراوح إلى أساطيل نفّاثة بالكامل نتيجة الأداء الأفضل مع نقص تكلفة الصيانة.

إنّ الصفة المتقدّمة التي استخدمناها في تعبير المواد المركّبة المتقدّمة المقوّاة بالألياف هي للتمييز بين المواد المركّبة ذات الألياف المتمتّعة بجساءة ومتانة فائقة جداً مثل البورون والغرافيت وبعض الألياف المألوفة أكثر والأقل قدرةً مثل الزجاج. وتمتلك مثل تلك المواد المركّبة المتقدّمة ميّزتين رئيسيتين اثنتين ضمن مزايا أخرى عديدة: متانة وجساءة محسّنتان خاصةً عند مقارنتها بمواد أخرى على أساس وحدة الوزن. فعلى سبيل المثال، يمكن أن تُصنَع مواد مركّبة لديها نفس المتانة ونفس الجساءة المتوفّرة في الفولاذ عالي المتانة، ولكنها أقلّ وزناً بمعدل 70%! كما أنه هناك مواد مركّبة متقدّمة أخرى لديها من المتانة ما يفوق بثلاثة أضعاف الألمنيوم – المادة الإنشائية شائعة الاستعمال في بناء الطائرات – ولكنها لا تزيده وزناً إلاّ بمعدل 60% لا غير! علاوةً على ذلك – وكما تمَّ ذكره سابقاً– يمكن ضبط المواد المركّبة بحيث تفي بشكل فعّال بالمتطلّبات التصميمية في المتانة والجساءة والمعاملات (parameters) الأخرى، وكل هذا وفق اتجاهات مختلفة. وسوف تقود هذه الميزات إلى تصميمات جديدة للطائرات والمركبات الفضائية تفترق بشكل جذري عن الجهود السابقة التي تعتمد على المواد التقليدية. ومع ذلك، اجتذب التيتانيوم في خمسينيات القرن العشرين الصناعة الفضائية لأسباب مشابهة، ولكنها وجدت فيه مساوئ جدّية بعد إنفاق عدة ملايين من الدولارات في الأبحاث والتطوير وصناعة الألات. وقد أدّت تلك التجربة تعيسة الحظ مع التيتانيوم إلى مقاربة أكثر حذراً – وبنفس الوقت أكثر توازناً واكتمالاً– نحو تطوير المواد المركّبة. وفي الحقيقة، تبدو مزايا المواد المركّبة ملزمةً إلى حدٍ أصبح البحث والتطوير يُجرى في حقول عريضة بدلاً من اقتصاره على المسارات الأكثر جلاءً. فقد بزغت منظمات كاملة من أجل تحليل وتصميم وإنتاج الأجزاء المصنوعة من المواد المركّبة. وسوف ندرس مزايا المتانة والجساءة للمواد المركّبة المتقدّمة في الفقرة 1. 3. 1، بينما سندرس ميزاتها من ناحية الكلفة في الفقرة 1. 3. 2، وميزاتها من ناحية الوزن في الفقرة 1. 3. 3.

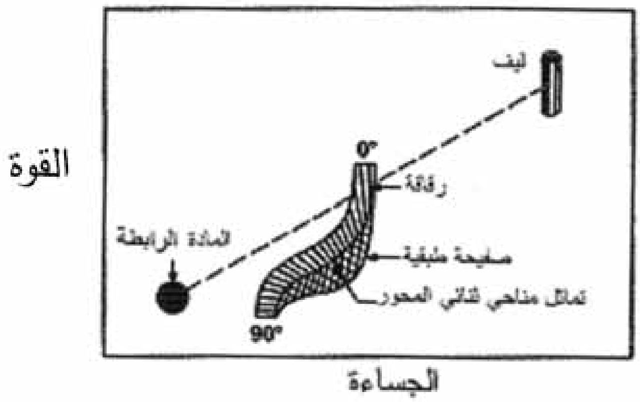
1 .3 .1 ميزات المتانة والجساءة

إنّ إحدى أكثر الطرق شيوعاً للتعبير عن فعالية متانة أو جساءة مادة ما هي في استخدام نسبة أيٍّ من قيمتيهما إلى الكثافة أي وزن لكل وحدة حجم. ولا يتضمَّن مثل هذا المؤشر أو الدليل (index) كلفة تحقيق متانة أو جساءة معيَّنتين، لكنّ مقارنات الكلفة لا تصلح على الأرجح بحدّ ذاتها، لأنّ هناك عوامل عديدة، عدا عن كلفة المادة الخامّ، تؤثِّر في الكلفة.

عند اعتبار بعض مزايا المواد المركَّبة المقوَّاة بالألياف، فإنّ المتانة والجساءة العاليتين جداً هما على الأرجح أكثر المزايا تبادراً إلى الذهن. وفي غالبية الأحيان، لا نعبِّر عن صفتي المتانة والجساءة هاتين بواسطة القيّم المطلقة، بل باستخدام مقادير نسبية حيث نقسم قيّمهما على الكثافة. ويعتبر حاصل قسمة المتانة على الكثافة والجساءة على الكثافة، ببساطة، وسيلةً للتعبير عمّا ندعوه المتانة النوعية والمُعامِل النوعي أو الجساءة النوعية التي تكون ذات جاذبية خاصة عندما نتعامل مع إنشاءات حسّاسة للوزن مثل الطائرات والمركبات الفضائية. وهذا يعني أننا نسأل أنفسنا: ما الذي ستقدّمه لنا هذه المادة مقابل كل وحدة وزن نستعملها؟

في أول الأمر، نقوم باستقصاء كيفية مساهمة خصائص المكوِّنات الأساسية للمادة المركَّبة – أي الألياف والمصفوفة – بشكلٍ عامّ في تحديد خصائص الرقاقة. وبعد ذلك، نستقصي كيفية تأثير خصائص الرقاقة في خصائص الصفيحة الطبقية. في انتقالنا من خصائص المكوِّنات الأساسية للمادة المركَّبة إلى مستوى الرقاقة، ثم في نهاية الأمر إلى مستوى الصفيحة الطبقية، تم في الشكل 1–23 تمثيل قيم المتانة على المحور الرأسي عمودي و قيم الجساءة أو المُعامِل على المحور الأفقي. وفي الحالة النموذجية، تكون الألياف المستخدمة في المواد المركَّبة المتقدِّمة عالية المتانة جداً، وفي غالبية الأحيان، عالية المُعامِل جداً. وتنطوي الخطوة التالية على وضع هذه الألياف في مصفوفة، عموماً، منخفضة المتانة ومنخفضة الجساءة لاصطناع رقاقة مقوَّاة محورياً. وتُشكِّل هذه الرقاقة طبقة تتّصف، بشكلٍ جوهري، بمتانات وجساءات مختلفة باختلاف الاتّجاهات. ففي الاتجاه الذي تأخذه الألياف، تصل المتانة والجساءة إلى القيّم العظمى لهاتين الخاصّتين،

بينما في الاتجاه العمودي على الألياف – أي ذي الزاوية °90– تظهر القيم الدنيا للخواص مع بعض التغيُّر بين هاتين النهايتين عندما تتغيَّر الزاوية بين °0 و°90. في الحقيقة، من الممكن في بعض المواد المركَّبة أن نحصل على قيم لخاصّتي المتانة والجساءة أدنى حتى منها عند الزاوية °90، وذلك في بعض الزوايا بالنسبة إلى المحور، وعموماً في جوار الزاوية °60. وعند الزاوية °90، تكون متانة الرقاقة وجساءتها مشابهة بشكلٍ أكبر إلى خصائص المصفوفة منه إلى خصائص الألياف، بينما عند الزاوية °0 بالنسبة إلى اتّجاه الألياف، نجد أنّ خصائص الألياف هي المسيطرة.

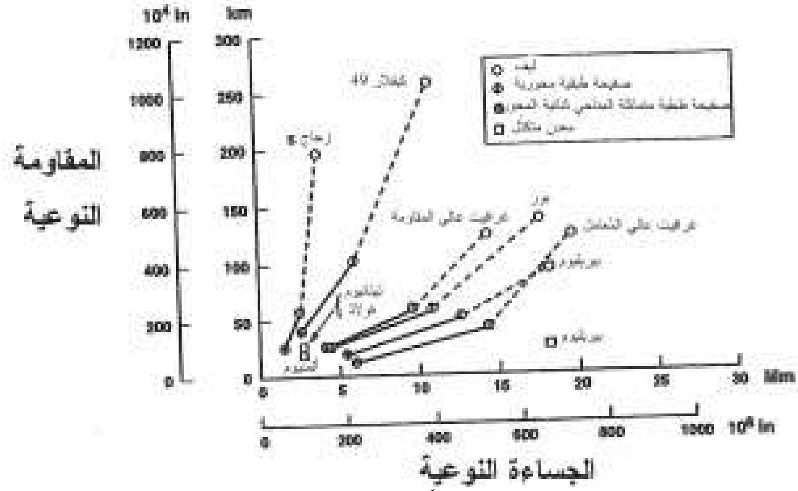


الشكل 1–23: الانتقال من خصائص المكوّنات الأساسية إلى خصائص الرقاقة إلى خصائص الصفيحة الطبقية

الصفيحة الطبقية هي مزيج ملتحم لرقاقات ذات زوايا متنوِّعة، ولا نتوقّع أن تكون خصائص هذه الصفيحة الطبقية عالية مثل خصائص رقاقة الزاوية °0 ولا منخفضة مثل خصائص رقاقة الزاوية °90، بل ذات قيّم وسطى بين الحالتين. وفي الواقع الفعلي، يجب أن تتضمَّن المنطقة المشار إليها بكلمة صفيحة طبقية في الشكل 1–23 كلاً من حالتي الزاويتين °0 و°90، لأننا نستطيع صنع صفيحة طبقية – إذا شئنا ذلك– بحيث تكون كل الألياف بزاوية °0 أي إن زاوية جميع الطبقات تكون °0. وفي مكانٍ ما من المنطقة المُشار إليها بـــ صفيحة طبقية، يوجد ما يُسمّى نقطة تماثل المناحي أو نقطة تماثل مناحي ثنائية المحور (bianially isotropic)، حيث تتساوى قياسات بعض

الخصائص في المستوي أو على الأقل في اتّجاهين من الاتّجاهات من ناحية الجساءة والمتانة. وما يُدعى الصفيحة الطبقية متماثلة المناحي ثنائية المحور هي صفيحة طبقية اصطناعية تُستخدَم ببساطة كقاعدة من أجل مقارنة إحدى الصفائح الطبقية المركَّبة بواحدة أخرى أو مقارنة مادة مركَّبة ما بمعدنٍ ما. وسوف نستخدم نمط الرسم البياني للخصائص في الشكل 1−23 كمخطّط أساسي لأغراض المقارنة.

يعطي الشكل 1−24 تمثيلاً للمتانة والجساءة في عدة مواد على قاعدة الفعالية لكل وحدة وزن. وقد أشير إلى خصائص المعادن الإنشائية الشائعة بواسطة مربعات مفتوحة.



الشكل 1−24: المتانة والجساءة في المواد المركَّبة وفي المعادن

وأُشير إلى عدة أنواع من المواد المركَّبة المتقدِّمة بثلاثة أشكال من الدوائر: مُثِّلت الألياف وحدَها بدوائر مفتوحة؛ وتمَّ إظهار الرقاقات ذات الألياف المحورية كدوائر داخلها خطّ رأسي؛ بينما ظهرت الرقاقات ذات العدد المتساوي من الألياف في اتّجاهين عموديين على بعضهما البعض كدوائر داخلها خطّ أفقي وخطّ رأسي. ومن الواضح أنّ المواد الأكثر فاعليةً تقع في الزاوية العلوية اليمنى من الشكل 1−24. إنّ الألياف وحدَها تكون أشدّ جساءةً ومتانة منها عندما توضع في مصفوفة. ولكن كما رأينا سابقاً، لا تُستخدَم الألياف بدون مصفوفة بسبب المزايا الهامة لاجتماع الألياف ضمن مصفوفة.

كذلك، يكون التشكيل وحيد الاتجاه أكثر جساءةً ومتانة في اتّجاه الألياف من التشكيل متماثل المناحي ثنائي المحور في أيٍّ من الاتجاهين ، وتقع الصفائح الطبقية عملياً بين التشكيل وحيد الاتجاه والتشكيل متماثل المناحي ثنائي المحور.

لنقُارن الآن أشكالاً مختلفة من مواد مركَّبة محدّدة مع معادن من الصنف الإنشائي. يحتل كل معدن نقطة واحدة فقط على منحنى المتانة النوعية بدلالة الجساءة النوعية، أي المربعات المفتوحة في الشكل 1–24. ولا نحتاج هنا إلى أخذ المكوِّنات الأساسية بعين الاعتبار، كما لا توجد مظاهر توجيه، وهكذا، ليست هناك ضرورة لأكثر من نقطة واحدة لتمثيل جساءتها وبنفس الوقت متانتتها. لكنْ في حالة المواد المركَّبة، يجب اعتبار عوامل تتعلق بقوة بالاتّجاه. تتضمن المعادن الحجمية للتطبيقات الإنشائية الفولاذ والتيتانيوم والألمنيوم في الزاوية السفلية اليسرى من الشكل 1–24 والبيريليوم في الزاوية السفلية اليمنى منه. لنقابل الآن خصائصَ تلك المعادن الحجمية بخصائص ليف الغرافيت عالي المُعامِل الذي نجده في الأعلى، وإلى أقصى اليمين في الشكل 1–24، نلاحظ أنّ الغرافيت يبدو رائعاً للوهلة الأولى، لكننا لا نستطيع استعمال الغرافيت حصراً على شكل ليف. وعلينا أن نرجع القهقرى من القدرات المتوفّرة في شكل الليف إلى شكل الصفيحة الطبقية أحادية الاتجاه على الأقلّ، هذا إذا لم نرجع ربما أكثر باتّجاه الصفيحة الطبقية متماثلة المناحي ثنائية المحور. وتحتلّ التطبيقات الفعلية الحقيقية مكاناً ما بين هاتين الصفيحتين الطبقيتين المركَّبتين البسيطتين.

يمكن استخدام الصفيحة الطبقية أحادية الاتجاه في تطبيقات خاصّة معيّنة. وعلى سبيل المثال، يمكن جعل جميع الألياف مصطفّة في الاتّجاه المحوري لدعامة أو عمود للاستفادة من كل القدرات الممكنة لمادة مركَّبة من الإيبوكسي– غرافيت في بيئة التحميل الخاصة تلك. لكنْ في أجنحة الطائرات، لا نستطيع توجيه كل الألياف في اتّجاهٍ واحد، بل يجب استعمال توجّهات عديدة للألياف لتحقيق التوازن الصحيح بين المتانة والجساءة اللازمتين للتكيّف مع الحمولات من شتّى الاتّجاهات. بالطبع، يمكن أن تكون الحمولات أكبر في أحّد الاتّجاهات منها في اتّجاهٍ آخر، وسوف نخلّ حينها بنظام الألياف لنتكيَّف مع

مستويات الحمولة الأعلى. ولا نستطيع ببساطة أن نقوم بهذا الإخلال بالخصائص الاتّجاهية في حالة تعاملنا مع بنية معدنية، إذ علينا أن نقبل بانتظام وتوحّد الخصائص في كل مكان في حالة البنية المعدنية (إلاّ إذا أضفنا إليها دعامات).

لقد تمَّ تمثيل مجموعة واسعة التنوّع من المواد في الشكل 1–24، مثلاً نجد إلى جانب الإيبوكسي– غرافيت عالي المتانة – غرافيت عالي المُعامِل الذي يوجد في الحالة الطبيعية في مكان أكثر بعداً باتّجاه يمين الشكل من الإيبوكسي غرافيت عالي المتانة. وعموماً، يُستحصَل الإيبوكسي– غرافيت عالي المُعامِل بواسطة درجة حرارة أعلى لعملية تشكّل الغرافيت في الألياف الغرافيتية مقارنةً بالغرافيت عالي المتانة. ويقع البورون في موضع قريب إلى حدٍّ ما من الغرافيت عالي المتانة، بينما يقع البيريليوم في موضع أكثر اتّجاهاً إلى اليمين عندما يكون على شكل ليف وفي موضع منخفض كثيراً في المخطّط عندما يكون على شكل معدن حجمي. ويكون البيريليوم على شكل ليف أكثر متانة بكثير، أي إنه أعلى بكثير في الرسم البياني منه عندما يكون على شكل معدن حجمي.

ولذلك، تمتلك المواد المركَّبة ذات ألياف البيريليوم تفوّقاً واضحاً على البيريليوم الحجمي من ناحية المتانة. وتؤدي ألياف البيريليوم ضمن المادة المركَّبة إلى خسارة في الجساءة نوعاً ما نظراً إلى اضطرارنا هنا لاستعمال مادة مصفوفة أقلّ جساءةً من أجل الإحاطة بألياف البيريليوم. ورغم هذا، تبقى لدينا أفضلية معتبرة من حيث المتانة. وبشكلٍ معاكس، نرى أنّ الألياف الزجاجية تأخذ موقعاً في القسم الأيسر من الرسم البياني، وهذا يدلّ على أنها ذات متانة عالية جداً، لكنها ليست ذات جساءة مرتفعة. وعندما نضع الألياف الزجاجية في شكل قابل للاستخدام، أي في مادة مركَّبة أحادية الاتجاه، فإننا نحصل على نفس الجساءة النوعية للمعادن الإنشائية العادية، لكنّ الليف الزجاجي يمتلك بالتأكيد متانة نوعية أعلى. ويمتلك الليف الزجاجي في الشكل متماثل المناحي ثنائي المحور نفس المتانة النوعية تقريباً للفولاذ أو التيتانيوم، لكنه يتفوَّق على الألمنيوم. بالمقابل، يتمتع الليف الزجاجي بمعُامِل نوعي أقلّ من أيٍّ من المعادن التقليدية. لذلك،

سوف نستعمل، بشكلٍ عام، الزجاج في التطبيقات الحساسة للمتانة، بينما سوف نستعمل أيّ شكلٍ من الغرافيت –حتى الغرافيت عالي المتانة– في التطبيقات الحساسة للجساءة. وكخلاصة، نقول أنه من أجل التطبيقات الحساسة للجساءة، سنستعمل الإيبوكسي – غرافيت، أمّا من أجل التطبيقات الحساسة للمتانة، فيمكن أن نستعمل الإيبوكسي – زجاج أو الإيبوكسي كيفلار.

على سبيل المثال، يمكننا أن نصنع وعاء ضغط حساس للمتانة من الإيبوكسي– زجاج. وهنا، سوف نلفّ الألياف بحيث لا تكون أحادية الاتّجاه (محورية)؛ بل تقاوم إجهادات وعاء الضغط ذات التوجّهات المتنوّعة. يُظهر وعاء الضغط حالة إجهاد ثنائية المحور، لذلك يجب علينا أن نفعل أكثر من مجرَّد اللفّ المحيطي للألياف. وفي بعض الحالات، يكون بعض اللفّ المحوري ضرورياً، كما يمكننا أيضاً أن نلفّ بعض الألياف بزاوية °45 ± أو بزوايا أخرى. ونستطيع إيجاد الزاوية الموافقة لجعل المتانة مثالية في هذه البنية عالية التحميل ثنائي المحور. وتُصنع بعض أوعية الضغط من الإيبوكسي غرافيت، وكذلك من الألياف الزجاجية أو من الإيبوكسي كيفلار.

يقع الإيبوكسي كيفلار ®49 في موضع متوسط بين مجموعة خطوط الإيبوكسي– زجاج S وخطوط الإيبوكسي– غرافيت عالي المتانة في الشكل 1–24. ويعتبر الإيبوكسي– كيفلار عضواً آخر في عائلة المواد التي يمكن استعمالها من أجل تطبيق تصميمي خاص. وفي الواقع الفعلي، تمتلك أصناف عديدة من الكيفلار خصائص تقع في الجوار العام للمنطقة المُشار إليها بكلمة كيفلار في الشكل 1–24. وللحصول على توازن معيّن بين المتانة والجساءة، من المحتمل أنك تريد مادة تقع في منطقة المواد الممتدّة من الكيفلار إلى الغرافيت عالي المتانة بدلاً من عبور كامل المسار حتى الألياف الزجاجية أو كامل المسار حتى الغرافيت عالي المُعامِل. وهذا يعني أنك يجب أن تنظر إلى المتطلّبات النوعية لتصميمك، كي تُحدد المادة التي تحتاجها فعلاً.

تبدي ألياف البورون الكفاءة الأعلى من حيث المتانة والجساءة في الشكل 1– 24. وعندما توضع في رقاقة كألياف أحادية الاتجاه، تتدنّى المتانة النسبية للإيبوكسي–

بور بشكل مُعتَبر، بينما لا تتدنّى الجساءة النسبية إلاّ بشكلٍ ضئيل. وفي التشكيل متماثل المناحي ثنائي المحور، يظل الإيبوكسي- بورون أكثر جساءةً من الفولاذ أو التيتانيوم، بالرغم من كونه يتمتع بنفس المتانة النسبية. وتبدي ألياف الغرافيت عالي المتانة في المواد المركَّبة سلوكاً مشابهاً لذلك، لكنّ ألياف الغرافيت عالي المُعامِل – رغم كون جساءتها أكبر من بقية المواد في كل التشكيلات- تُظهر عموماً متانات نسبية أصغر (بل أصغر حتى من الألمنيوم عندما توضع في تشكيل متماثل المناحي ثنائي المحور). يمتلك الإيبوكسي- زجاج S في حالة تنضيد طبقات أحادية الاتّجاه (محورية) حوالى مرتين ونصف المتانة النسبية للفولاذ أو التيتانيوم، لكنه لا يزيدهما من حيث الجساءة (في الواقع يكون في التشكيل متماثل المناحي ثنائي المحور أقلّ جساءةً من الفولاذ أو التيتانيوم). يمتلك البيريليوم حوالى ستة أضعاف الجساءة النسبية للفولاذ أو التيتانيوم أو الألمنيوم، لكنه لا يفوقهم متانة. أمّا أسلاك البيريليوم، فهي أشدّ متانة بكثير – لكنها ليست أكثر جساءةً- من البيريليوم الحجمي. وتبدي أسلاك البيريليوم ضمن مصفوفة بعضاً من نفس المميزات العامة في حالة مواد مركَّبة أخرى.

تعتبر ازدواجية الرسم البياني في الشكل 1-24 هامّة، أي إن الجساءة تكون في غالبية الأحيان مساوية للمتانة في الأهمية، بل إنها تتفوق عليها في بعض الأحيان. ويميل بعض الناس لقول كلمة متانة في حين إنهم يعنون في الواقع الجساءة. لذلك، علينا أن نميّز بحرص وبشكلٍ كامل بين هذين المفهومين الفيزيائيين المختلفين اختلافاً شديداً عن بعضهما البعض.

إنّ ميزات المواد المركَّبة المقوَّاة بالألياف من حيث المتانة والجساءة ليست جميعها قابلةً للتحويل بشكل مباشر إلى ميزات إنشائية. وأحد الأسباب البارزة لهذه الظاهرة هي حقيقة أنّ الوصلات بين عناصر مصنوعة من مواد مركَّبة هي في الحالة العامة أكثر حجماً من تلك في العناصر المعدنية. وتتمّ دراسة هذه المعوقات النسبية المنقصة للفعالية لأنها تؤثِّر بوضوح في عوامل التكاليف في تطبيقات المواد المركَّبة. وسوف ندرس قيوداً محدِّدة أخرى لاحقاً.

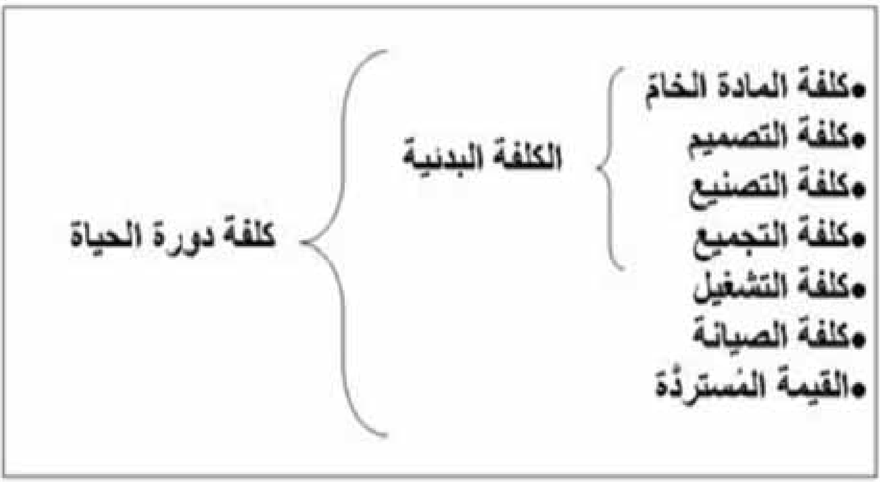
2. 3. 1 ميزات الكلفة

يعتمد إنقاص كلفة مادة ما، أي سعر كلّ رطل من البنية الإنشائية – ضمن عوامل أخرى– على تزايد خبرة التصنيع في عملية معيّنة، وعلى تطوير تقانات تصنيعية جديدة أكثر كفاءةً. لقد انخفض سعر ألياف مادة الغرافيت الخامّ من عدة مئات من الدولارات لكل lb ‏(600–800 kg/$) في السنوات الأولى من سبعينيات القرن العشرين إلى 20 دولاراً لكل lb ‏(40 kg/$) في عام 1990، وذلك بسبب تزايد خبرة التصنيع وتزايد الفعالية في الإنتاج على نطاق واسع. بالمقابل، كان سعر كل رطل من ألياف البوردندن يعادل أيضاً عدة مئات من الدولارات (600–800 kg/$) في أول سنوات سبعينات القرن العشرين، وصارت تكلِّف حوالى 100 دولار للرطل (200 kg/$) في عام 1980 بسبب التقييدات التقنية الملازمة لها. وتقترن الأسعار الأخيرة بالبوردن المترسب على قاعدة من التنغستين. ولو كان باستطاعتنا استخدام قاعدة من الزجاج، لكنّا قد استطعنا تذليل إحدى العوائق التقنية، ولكانت كلفة ألياف البوردن قد انخفضت على الأرجح إلى ما صارت عليه ألياف الغرافيت، إضافةً إلى ذلك، يمكن إنتاج ألياف أصغر بواسطة عملية الركيزة الزجاجية. وإحدى الصعوبات المرافقة للعمل مع البوردن هي أنه يتفاعل كيميائياً مع العديد من مواد المصفوفات، الأمر الذي نجده بدرجة أقلّ مع الكربون. لهذا، ينبغي استخدام تغليف معيَّن للألياف، وهذا يزيد الكلفة و ينقص في بعض الأحيان الفعالية الكامنة للمادة المركَّبة الناتجة.

هناك العديد من العوامل التي يجب أخذها بالحسبان بالنسبة إلى كلفة بنية إنشائية أو منتجٍ ما. علينا أولاً أن ننظر إلى عنصر يركِّز العديد من الناس غالباً انتباهاً شديداً عليه، وهو كلفة المادة الخامّ. ومع ذلك فكلفة المادة الخامّ هي مجرَّد عنصر صغير فقط ضمن العملية الشاملة لتحديد الكلفة الحقيقية لمنتجٍ ما بالنسبة إلى طول عمر استخدامه. لدى المواد المختلفة تكاليف مرافقة مختلفة من أجل تصميم بنية إنشائية ما. ويتطلب الأمر كمية معيّنة من المال من أجل تصنيع أو إنتاج الغرض، كما نحتاج كميات مختلفة من المال لتجميع أجزاء تُصنَع بطرق متنوِّعة. ويمكن أن تتطلَّب أجزاء متشابهة المظهر من

مواد مختلفة تقنيات ربط وتثبيت مختلفة جداً عن بعضها البعض. وتؤلِّف العناصر الثلاثة الأولى المذكورة أعلاه ما يُدعى الكلفة البدئية للمنتج التي تمثل ما ندفعه من أجله عندما يخرج من باب المصنع. وعندما نضيف إلى تلك الكلفة البدئية تكاليف التشغيل (الاستعمال) والصيانة خلال دورة حياة المنتج، كما يوضح الشكل 1-25، فإننا نبدأ حينها بالحصول على الصورة الصحيحة عن الكلفة الحقيقية للمنتج. فالاقتصار على استعمال الكلفة البدئية فقط من أجل اتّخاذ كل القرارات هو أمر غير واقعي على الإطلاق؛ إذ يجب الأخذ بالحسبان تكاليف التشغيل والصيانة.

في أغلب الأحيان، تكون تكاليف التشغيل في بنية مركَّبة أقلّ منها في بنية معدنية. لهذا، باستطاعتنا بشكل تلقائي تحمل دفع مبلغ أعلى في الكلفة البدئية للبنية المركَّبة من أجل الحصول على تلك التكاليف المنخفضة خلال التشغيل، طالما أنّ العنصر الرئيسي – أي كلفة دورة الحياة- هو أقلّ في البنى المركَّبة. تتألَّف كلفة دورة الحياة من التكاليف البدئية التي ذكرناها إضافةً إلى تكاليف التشغيل وتكاليف الصيانة، لكن يُطرَح منها القيمة المستردة كما في الشكل 1-25.



الشكل 1 – 25 عناصر كلفة دورة الحياة

بعد ذلك، يجب علينا أن نجري تحليلاً لكلفة مجمل المنظومة ونسأل: ما هو الخيار الأقل سعراً؟ وكما تقول إحّدى الإعلانات التلفزيونية: "يمكنك أن تدفع ثمني الآن، أو يمكنك أن تدفعه لاحقاً". ففي كثير من حالات استخدام البنى المركَّبة، حتى لو دفعنا في البداية، من الممكن جداً الحصول على دورة حياة أقل كلفةً. لقد وصل تطوير البنى المركَّبة إلى النقطة التي نجد فيها بعض تطبيقات البنى المركَّبة أقلّ كلفةً بدائية و أقلّ كلفة تشغيل على السواء. لهذا، تكون كلفة دورة الحياة في صالح البنى المركَّبة أكثر منه بكثير مع بعض البنى المعدنية.

تتضمَّن كلفة التشغيل بنوداً مثل الوقود وغيره من المواد المستهلكة. ومن الواضح أنّ تكاليف الصيانة تتضمن الإصلاحات والتعديلات الدورية للبنية. فبعد مرور السنوات، يكون مُجمَل بنية الطائرة قد استُبدِلت تقريباً جزءاً جزءاً! وتُمثّل الفئة الأخيرة القيمة المُستَرَدَّة، ما هي قيمة المنتج في نهاية حياته؟ لنأخذ هنا بعين الاعتبار طائرة من الألمنيوم تتبقّى لها قيمة بعض الخردة في نهاية حياتها المفيدة. فعندما تصبح بنيتها غير صالحة للطيران، نكون أمام كومة من الألمنيوم يمكن أن نسترجع منها بعض القيمة المُستردَّة. تخيّل الطائرة على أنها كومة كبيرة من علب البيرة من الألمنيوم! لكنّ هذه القيمة لا تكون ذات أهمية حقيقية مقارنةً بالكلفة الأصلية. ومن المُعترَف به أنه في بنية مركَّبة لا توجد قيمة مُستَرَدَّة على الإطلاق إذا كانت هذه البنية مصنوعة بكاملها من بعض المواد المركَّبة. فليس هناك أيّ شيء يمكن أن نفعله بالبنية بعد أن ننتهي منها كبنية. وعلى سبيل المثال، لو صنعنا المنتج المطلوب من الإيبوكسي- غرافيت، فحينها نجد أنه بعد شوي مصفوفة الإيبوكسي (الإيبوكسي هو بوليمير تصلِّب حراري، وهذا يعني أنّ عملية الشوي هي عملية أحادية الاتّجاه) تأخذ المادة المركَّبة بصورة دائمة ذلك الشكل المشوي. لا نستطيع هنا أن نصهر البنية كي نحوِّلها إلى أيّ شيءٍ آخر. في هذا الوضع تصبح الطائرة كومة من خردةٍ ذات قيمة مُستردَّة تساوي الصفر (في واقع الأمر، يجب أن تدفع مبلغاً من المال لشخصٍ ما كي يخلّصك منها). ورغم هذا، حتى القيمة المُستردَّة لطائرة الألمنيوم لا تكون أعلى من الصفر بمقدارٍ كافٍ – نسبةً إلى الكلفة البدئية- كي تجعل القيمة المستردَّة أمراً ذا قيمة معتبرة في التحليل الاقتصادي الإجمالي.

لماذا تم وصف العناصر المتنوِّعة للكلفة؟ السبب هو أنك بحاجة إلى أن تتلمس المقارنات التي يجب أن تقوم بها في التصميم الإنشائي من أجل أن تقرِّر أية مادة هي الأفضل بالنسبة إلى تطبيقك الخاص. وعلى الدوام، تشكل الكلفة إحدى الاعتبارات الأساسية في التصميم الإنشائي. فقد تبدو مادة ما ذات كفاءة عالية جداً من وجهة نظر الوزن، لكننا يجب عادةً أن نفكِّر أيضاً بالكلفة. إنّ قدرة المواد المركَّبة على المنافسة من ناحية الكلفة تكون عموماً أفضل في تطبيقات الإنشاءات الحسّاسة للوزن، ويعود ذلك ببساطة إلى أنّ المتانة النسبية والمُعامِل النسبي للمواد المركَّبة تكون عموماً عاليةً جداً مقارنةً بالمعادن الإنشائية الاعتيادية. وهذا يعني أنّ المواد المركَّبة فعّالة بشكلٍ خصوصي في الإنشاءات الحسّاسة للوزن.

نحصل على ميزات المواد المركَّبة من ناحية الكلفة عندما نتملك ونتعرف إلى مفاهيم تصنيع أكثر سهولة في بعض الأحيان للبنى المركَّبة المتقدِّمة من ما يتوفر للمعادن. وبشكلٍ عام، تصبح كل ميزات الكلفة أو كل مقارنات التكاليف أكثر ميلاً لصالح البنى المركَّبة بازدياد معدّلات إنتاج المواد المركَّبة الخامّ وإنتاج الأجزاء المركَّبة. فتلك الميزات ترتبط بشكلٍ لصيق مع معدّلات الإنتاج، وهكذا إذا طوَّرنا تقانة جديدة لإنتاج المواد المركَّبة، فإنّ هذه التقانة الجديدة سوف تنقص من كلفة البنى المركَّبة.

تتعلّق كلفة اليد العاملة في بنيةٍ ما بشكلٍ مباشر مع تعداد أجزائها. وإذا استطعنا تقليل تعداد الأجزاء، فإنّ ذلك سوف يقلِّل بالنتيجة كلفةَ اليد العاملة (وبالتالي التكاليف الإجمالية). تتألَّف البنى المركَّبة عموماً من عددٍ من الأجزاء أقلّ بكثير من العدد في البنى المعدنية. فتصميم الأجزاء المتكاملة وتقنيات التصنيع تنقص عدد المثبِّتات وعمليات الربط والالتصاق، وهكذا تستطيع البنى المركَّبة أن تتميَّز بعناصر كلفة أقلّ بكثير منها في البنى المعدنية.

في غالبية الأحيان تكون عمليات الإنتاج الخاصة بتصنيع البنى المركَّبة مبسَّطة جداً مقارنةً بمثيلاتها في البنى المعدنية. ويؤدِّي إنقاص عدد الأجزاء إلى كلفة تركيب أقلّ بكثير، وإلى انخفاض إجمالي في عدد ساعات العمل في المصنع.

تتضمَّن كفاءة الإنتاج تنوعاً واسعاً من المواضيع تتجاوز كثيراً مجال هذا الكتاب، لكننا سوف نعرِّف ونوصف عامل استعمال المواد في حالة المواد المركَّبة والمعادن كطريقة كمّية لتمثيل مدى فعالية المواد التي تُستخدَم في عملية الإنتاج. ويُعرَّف عامل استعمال المواد ببساطة شديدة على أنه كمية المادة الخامّ اللازمة في بداية عملية الإنتاج مقسومة على كمية المادة التي توجد في القطعة النهائية:

$$\text{عامل استعمال المواد} = \frac{\text{وزن المادة الخام}}{\text{وزن القطعة النهائية}}$$

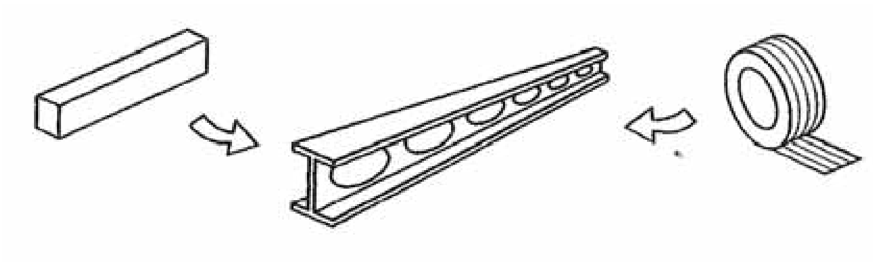
ويدلّ الفارق بين الوزنين على كمية المادة التي أزيلت خلال عملية الإنتاج. وفي حالة بعض القطع المصنوعة من المعادن، يمكن أن يكون عامل استعمال المواد مرتفعاً حتى قيم تصل حتى 15 إلى 25! وعلى العموم، نصادف تلك القيم العالية عندما يُطبَّق عددٌ من عمليات إزالة المعدن على كتلة بدئية ضخمة من المعدن. وتتضمَّن تلك العمليات المدعوة بـــ "التقطيع الجائر" "hogging out" ببساطة تشغيل معظم المادة، وتكنيسها من على الأرض، ووضعها في وعاء، وبيعها من جديد إلى المُصنِّع مقابل مبلغ صغير نسبياً مقارنةً بالكلفة الأصلية. وتعتبر هذه العملية طريقةً عادية عند التعامل مع المعادن؛ فالمعادن يتمّ في غالبية الأحيان نحتُها انطلاقاً من كتلة كبيرة وصولاً إلى الشكل النهائي المعقَّد، وتكون عادةً تكاليف اليد العاملة والتشغيل المرافق لعملية النحت تلك مرتفعة إلى حدٍّ كبير.

على عكس ذلك، لا يتجاوز عامل استعمال المواد في حالة المواد المركَّبة مقدار 1.2 إلى 1.3 إلاّ نادراً. وهذا يعني أنّ الحدّ الأقصى من المادة الضائعة يكون 20–30%

فقط في حالة البنى المركَّبة. بينما من الواضح أنه عند وصول عامل استعمال المواد في بعض القطع المعدنية إلى 15–25 تكون المادة الضائعة 1500–2500% وهذه الأرقام ليست أرقام حالات فردية نموذجية، بل هي أرقام أسوأ الحالات في كلا الوضعين، أي من أجل المعادن، وكذلك المواد المركَّبة. فعند استخدام المعادن هناك العديد العديد من العمليات يكون عامل الضياع المادي فيها منخفضاً جداً، وفي حالة المواد المركَّبة هناك أوضاع عديدة أيضاً يكون فيها عامل الضياع أقلّ بكثير من 20–30%. فما نريد توضيحه هنا هو أنّ أسوأ الحالات تكون مختلفة تماماً عن بعضها البعض بالنسبة إلى هذين النوعين من المواد ، ويعود ذلك إلى الطريقة الملازمة لتصنيع المنتجات من هذين النمطين المختلفين من المواد. فالمواد المركَّبة يستمرّ بناؤها حتى نصل إلى حدود الشكل الهندسي المطلوب، وعند هذه النقطة تتوقَّف ببساطة عملية بناء الطبقات. وهكذا تُصنَع البنى والمواد المركَّبة بحيث تكون قريبة إلى أقصى ما يمكن من التشكيل النهائي، وهذا هو ما ندعوه الشكل قرب – النهائي.

في سياق جناح الطائرة، تعطي قطعة الجناح المعروفة بعضد الجناح (wing spar) مزدوجة الاستدقاق مثالاً على التعارض بين هذين الوضعين. ما تراه في منتصف الشكل 1 – 26 ليس مجرَّد عضد I- جائز بشكل حرف I مرسوم وفق شكل منظور، فالعضد (spar) قرب جسم الطائرة يكون في الواقع أكثر عرضاً وارتفاعاً مقارنةً بطرفي الجناح (wing tips) عند نهاية الطرف الأيسر منه عند نهاية الطرف الأيمن، وذلك لأنّ الجناح يستدق من ناحية الارتفاع والعرض معاً عندما يتّجه نحو طرفه. وهذا يعني أنّ العضد يصبح أضيق وأقلّ سماكةً مع السير في الاتّجاه المبتعد عن جسم الطائرة. ولكي نصنع عضد جناح مثل هذا من التيتانيوم، يلزمنا الابتداء من كتلة حجمية من المادة كما يظهر في الزاوية العلوية اليسرى للشكل 1 – 26، ويجب أن يكون ذا ارتفاع يضاهي أكثر أقسام العارضة عمقاً؛ وذا عرض لا يقلّ عن أعرض أقسام هذه القطعة. وبعد ذلك، يخضع التيتانيوم للتشغيل، وهذا يتضمَّن فتح ثقوب لتخفيف الوزن في منتصف هذه القطعة التي لا تتحمَّل مقداراً كبيراً من القصّ مما يسمح بجعلها أخفّ وزناً عن طريق إزالة المعدن.

في حالة عضد الجناح المصنوع من المواد المركَّبة، تكون نقطة البداية لفافة من شريط، كما يُشاهَد في الزاوية العلوية اليمنى من الشكل 1 – 26، وبعد ذلك يُبنى عضد الجناح من طبقات حتى نصل إلى الحجم المطلوب. لقد تمَّت مقارنة تصنيع البنى المركَّبة هنا بعملية التشغيل، وليس بعملية التطريق مثلاً. وربما كان من المستطاع صنع قِطَعٍ مثل هذا العضد من التيتانيوم بواسطة التطريق أيضاً؛ وهي الحالة التي ستؤدّي إلى انخفاض في قيمة الهدر في المواد. وفي هذه الحالة أيضاً، يجب الأخذ بالحسبان الكلفة العالية جداً للتطريق، إضافةً إلى الوقت الكبير جداً الذي سيضيع بشكل سابق للإنتاج من أجل الحصول على هذا العضد بالتطريق.



الكلفة	إيبوكسي – غرافيت	تيتانيوم
كلفة المادة الخامّ	مرتفعة	مرتفعة
كلفة التشغيل	منخفضة جداً	مرتفعة جداً
معدّل الهدر	منخفض جداً	مرتفع جداً
كلفة بناء الطبقات	معتدلة	معدومة

الشكل 1–26: عضد جناح مزدوج الاستدقاق

دعونا الآن نقارن أربع فئات مختلفة من العمليات بين التيتانيوم على يسار الشكل 1 – 26 والإيبوكسي – غرافيت على يمينه. أولاً بالنسبة إلى كلفة المادة الخامّ، لا يُعتَبر

التيتانيوم مادة رخيصة الثمن، لذلك يُوصف سعره بأنه مرتفع، وكذلك يمكن أن نعتبر سعر الإيبوكسي – غرافيت مرتفعاً. بالنسبة إلى تكلفة التشغيل، لا شكّ أنها عالية جداً في العضد المصنوع من التيتانيوم، بينما لا يلزمنا إلاّ القليل من التشغيل في حالة عضد الإيبوكسي – غرافيت. أمّا معدّل الهدر في المادة فهو عالٍ جداً في حالة التيتانيوم، فصنع عضد الجناح يتضمَّن إحدى عمليات "التقطيع الجائر" (عملية تشغيل واسعة لكميات مُعتَبرة من المادة) حيث نخسر أكثر من 1000% من المادة نسبةً إلى الوزن النهائي للقطعة. بينما في حالة الإيبوكسي – غرافيت، لا يلزمنا من المادة تقريباً إلاّ المقدار الذي نستخدمه فعلياً، ومن هنا يكون معدّل الهدر منخفضاً جداً. البند الأخير في حساب الميزانية هو تكلفة بناء الطبقات، وهذا ما يغيب في حالة التيتانيوم. أمّا بالنسبة إلى الإيبوكسي غرافيت، فلا تُعتَبر مثل هذه القطعة ذات صعوبة، خاصة من ناحية بناء الطبقات. وهذا البناء معتدل التكلفة التي تعتبر بالتأكيد قليلة إلى حدٍّ كبير إذا ما قارنّاها بالتشغيل الواسع اللازم في عضد التيتانيوم.

لا تتوفَّر لدينا أرقام معيّنة من أجل المقارنة النهائية التي تؤخَذ فيها كل عوامل التكلفة بالحسبان. قبل كل شيء، إنّ سعر المادة الخامّ الذي يمكن أن يكون أعلى في حالة الإيبوكسي – غرافيت يعوِّض عنه –على الأقلّ بطريقة نشعر بها كيفياً– واقعُ أنه لا يلزم نفس القدر من التشغيل عند صنع عضد الإيبوكسي – غرافيت. والشيء الأساسي هنا هو أننا لن نشتري من الإيبوكسي – غرافيت إلاّ المقدار الذي نحتاجه، بينما يجب أن نشتري كمية من التيتانيوم أكثر بعدة أضعاف ممّا نحتاجه في القطعة النهائية. إنّ سعر وحدة الوزن من المادة الخامّ في حالة التيتانيوم مرتفع، وربّما يكون أكثر ارتفاعاً نوعاً ما في حالة الغرافيت، ولكن كم يبلغ سعر المادة الخامّ التي يجب شراؤها للحصول على المنتج المطلوب؟ إنّ كلفة الكمية الكلية لما يُشترى من التيتانيوم أكبر من كلفة الإيبوكسي – غرافيت. إضافةً إلى ذلك، هناك كلفة عالية جداً لتشغيل عضد التيتانيوم. وهكذا، نجد أنه من المتوقّع أن يكون الناتج النهائي لتكلفة عضد الإيبوكسي – غرافيت أقلّ من تكلفة عضد التيتانيوم. وبإمكاننا أن نجري مقارنات مشابهة عديدة أخرى من أجل منتجاتٍ متنوّعة.

إننا لا ندّعي أنّ المواد المركَّبة هي "الدواء الشافي لكل الحالات" في جميع التطبيقات، بل إنها ليست بالضرورة قادرة حتى على منافسة المواد الأخرى. ولكنْ هناك فعلاً العديد من الحالات تكون فيها المواد المركَّبة مناسبة للوضع بشكلٍ فريد، وذلك بسبب عمليات تصنيعها المميَّزة. وهكذا، فإنّ تلك الحالة "الخاصة" لعضد الجناح مزدوجة الاستدقاق ليست في حقيقة الأمر حالة خاصة، بل هي في الواقع مثالٌ قويٌ على طائفة من التطبيقات، توفِّر فيها المواد المركَّبة مزايا مُعتبرة تتفوَّق فيها على المواد التقليدية.

1 .3 .3 ميزات الوزن

ما هي فوائد إنقاص الوزن في بنية ما؟ يمكننا بشكلٍ عامّ أن نختار الجواب من ضمن عدة أجوبة. في البداية، نستطيع أن نحوِّل إنقاص الوزن مباشرةً إلى توفيرٍ في الوقود مما ينتج منه ظروف تشغيل أكثر فعاليةً وكفاءة. أو أيضاً، نستطيع أن نحمل حمولةً أثقل من الوقود وبذلك نزيد المدى الخاصّ بالطائرة أو بالشاحنة. أو يمكننا أن نجمع كلتا الميّزتين بطريقةٍ ما. ومن النتائج الإضافية لتقليل الوزن بالنسبة إلى طائرةٍ ما إمكانيةُ إنقاص القوة الدافعة للمحرِّك ومساحة الأجنحة، وبالتالي الوقود المستهلك. على سبيل المثال في الطائرات المقاتلة، يمكن أن يؤدّي إنقاص رطل واحد (0.45kg) في وزن جزءٍ ما إلى إنقاص الوزن الكلّي بمقدار 2.5 lb (1.13kg) وبالنسبة إلى المركبات الفضائية، يكون نقص الوزن الكلّي أكثر من ذلك! وهناك ملاحظة مهمة: كل رطل يتمّ إنقاصه من الوزن الإنشائي لقمر صناعي يعني زيادة في كمية وقود الدافع الذي يمكن حمله، وهذا يؤدي إلى عمر أطول للقمر الصناعي، لأنّ الوزن الذي يمكن وضعه في مدار ما يكون عادةً محدَّداً بقدرة منظومة الدفع. فإذا استطعنا زيادة النسبة التي يشغلها وزن الوقود من وزن بنية القمر الصناعي، فعندها ستطول مدة خدمة هذا القمر.

يمكن أيضاً أن يكون تقليل الوزن أمراً حاسماً في تقرير قدرة البنية التي نصمِّمها على القيام بمهمتها المطلوبة أم لا. إنّ حدود الحمولة الصافية لمكوك الفضاء الحالي هي 60000 lb (27000 kg). فلو كان لدينا غرضٌ نريد رفعه إلى الفضاء، وكان وزنه يعادل 65000 lb (29500 kg)، فإنّ الحظ لن يحالفنا في ذلك. إنّ ذلك الغرض

لا يتوافق مع حدود وزن المكوك، ويجب علينا انتظار جيل جديد من مركبات الفضاء، أو التخلّص من وزنٍ كافٍ من الغرض المطلوب رفعه إلى الفضاء كي يتوافق مع الحدود الحالية لمكوك الفضاء.

يبيّن الشكل 1-27 مقدار التوفير الممكن في وزن مجموعة متنوِّعة من البنى الإنشائية. وهنا، يتراوح التوفير بين قيمةٍ ضعيفةٍ من 25 دولاراً للرطل (55 $/kg) الأمر الذي يسوِّغ بالكاد استعمال بعض المواد المركَّبة إلى قيمةٍ كبيرةٍ تصل إلى 15000 $/lb (33000 $/kg) في مكوك الفضاء. وفي هذه الحالة الأخيرة، تكون الحاجة إلى الانتباه لاستعمال المواد المركَّبة صارخة بشكل لا يمكن نكرانه. وفيما بين هاتين الحالتين الحدّيتين، تمتلك المواد المركَّبة مبررات قوية جداً كي تُستعمَل.

• **طائرة مدنية صغيرة**	**25 $/lb**	(**55 $/kg**)
• **حوّامة (هيليكوبتر)**	**50 $/lb**	(**110 $/kg**)
• **محرِّكات الطائرات**	**200 $/lb**	(**440 $/kg**)
• **الطائرات المقاتلة**	**200 $/lb**	(**440 $/kg**)
• **الطائرات التجارية** (20 **$/lb/yr x 20 yr)**	**400 $/lb**	(**880 $/kg**)
• **النقل الجوي الفوتي (فوق الصوتي)**	**500 $/lb**	(**1100 $/kg**)
• **الأقمار الصناعية قريبة المدار**	**1000 $/lb**	(**2200$/kg**)
• **الأقمار الصناعية المتزامنة**	**10000 $/lb**	(**22000 $/kg**)
• **مكوك الفضاء**	**15000 $/lb**	(**33000 $/kg**)

الشكل 1 – 27: قيمة توفير الوزن في البنى الإنشائية

تقترن إمكانية توفير الوزن بشكلٍ وثيق بالتوفير في الوقود بالنسبة إلى غالبية المركبات. وقد تمَّ مؤخراً تقييم تأثير كلٍّ من تحسين التحريك الهوائي الجوي

(الأيروديناميك) (aerodynamics) وتوفير الوزن الإنشائي عن طريق استعمال البنى المركَّبة. وكانت النتائج الأساسية أنّ البنى الثانوية من المواد المركَّبة يمكن أن توفِّر 10%، في حين أن البنى الأولية من المواد المركَّبة يمكن أن توفِّر أكثر من 30%. بالمقابل، يمكن أن تبلغ قيمة التوفير بواسطة التحكّم بالانسياب الطبقي 20%، وبواسطة التحكّم الفعّال بكلٍ من الذيل والجناح 10%، وبواسطة الأجنحة ذات نسبة الأبعاد العالية 10%، وبواسطة الأجنحة الحدّية الفائقة أقلّ من 5%. وهكذا، تتساوى تقريباً كلٌّ من أهمية التحسين في التحريك الهوائي الجوي (الأيروديناميك) وفي البنى المركَّبة.

يقتصر ما يمكن توفيره في الوزن الإنشائي للإنتاج الحالي للطائرات العسكرية على حوالى 20% أو أقل. ويعتبر هذا الرقم بالضرورة منخفضاً بدون اللجوء إلى إعادة التصميم الشامل. ويمكن أن يصل تقليل الوزن في طائرات المستقبل التجارية إلى 25%، وفي الطائرات العسكرية المستقبلية إلى 35%. ويكمن الفارق في الاستعمال الأكثر اتّساعاً للمواد المركَّبة في البيئات مفرطة الحرارة الخاصّة بالطائرات العسكرية. ويمكن أن يصل تقليل الوزن في المركبات الفضائية إلى نسبة عالية تقارب الـــ 40%.

1. 4 الكيفية – تطبيقات المواد المركَّبة

1. 4. 1 المقدمة

في الوقت الراهن، تقوم كل شركات الطيران والفضاء تقريباً بتطوير منتجات مصنوعة من المواد المركَّبة المقوَّاة بالألياف. وقد تطوَّر استخدام المواد المركَّبة عبر عدة مراحل منذ ستينيات القرن العشرين. في البداية، بُنيت قطع الإيضاح (demonstration) ضمن فلسفة "دعونا نرَ إذا كنّا نستطيع بناء واحدة منها". ربّما لم تكُن هناك أيّة نيّة على الإطلاق لوضع القطعة المصنوعة في طائرةٍ ما أو إخضاعها لاختبار– طيران، لأنّ الهدف كان القيام بخطوة أولى تجاه التعلّم في مجال البنى المركَّبة. في المرحلة الثانية، كانت قطع الاستبدال، حيث كان جزء من الهدف المتوخّى هو أن تخضع لاختبار– طيران قطعةٌ تمَّ تصميمها لاستبدال قطعة معدنية على طائرة موجودة.

في المرحلة الثالثة، كانت قطع الإنتاج الحالية، حيث كانت تُصمم الطائرة منذ البدء على أساس أن تحتوي قِطَعاً متنوّعة مصنوعة من المواد المركَّبة المقوّاة بالألياف. أمّا المرحلة الأخيرة، فهي مرحلة الطائرة الكاملة من المواد المركَّبة التي حلُم العديد من الأشخاص ببنائها منذ سنواتٍ عديدة. لقد تمَّ الاقتراب من هذا الهدف الأخير بالأسلوب المتأنّي المحافظ متعدّد المراحل الذي شرحنا للتوّ خطوطه العريضة. لقد تمَّ بناء قاعدة تقانية وتصنيعية حقيقية متينة للمواد المركَّبة، وهي بانتظار تحدّيات جديدة.

يعتبر تأثير استخدام المواد المركَّبة في أداء المحرّكات النفّاثة كبيراً للغاية. وفي الوقت الحاضر، يمكن – مع السبائك المعدنية المتنوعة– تحقيق نسب قوة رفع–إلى–الوزن تعادل 5 إلى 1، ويمكن أن يؤدي استعمال المواد البلاستيكية والمعدنية المقوَّاة بالألياف إلى الوصول إلى نسب عالية حتى درجة 16 إلى 1 وأخيراً، مع المواد المركَّبة ذات ألياف الغرافيت المتقدّمة تبدو نسب قوة دفع–إلى–الوزن من مرتبة 40 إلى 1 ممكنة. إنّ ازدياد مؤشّر الأداء لنسبة قوة الدفع–إلى–الوزن بمقدار ثمانية أضعاف يجب أن يؤدي إلى توفير كبيرٍ هرمي الشكل في وزن كامل الطائرة، وهذا عائد إلى النقصان المهم في متطلَّبات الدعم الإنشائي. لكنّ الطريق إلى تحقيق هذا الهدف يمكن أن يكون محفوفاً بالمخاطر. فعلى سبيل المثال، يبدو أنّ إفلاس شركة رولز رايس Rolls-Roys في سبعينيات القرن العشرين كان مرتبطاً بشكلٍ وثيق بالرهان الخاسر على التطوير في الوقت المناسب لشفرات المراوح المصنوعة من إيبوكسي غرافيت من أجل محركات لوكهيد L-1011.

سوف تُبنى الطائرات في المستقبل القريب بشكلٍ تكون فيه نسبة عالية من مكوِّناتها مصنوعة من المواد المركَّبة، وعندها فقط سوف يتمّ تحقيق الفوائد الكاملة لإنقاص الوزن، لأنّ جميع الأجزاء في الطائرة تقريباً تتأثر بأجزاءٍ أخرى أو تدعمها، ومن هنا يُحدِث تقليل وزن جزء واحد في الطائرة أثراً تصاعدياً يمتدّ ليشمل كل الطائرة. وهناك دوافع جيّدة تحث على إنقاص الأوزان، لأنّ بنية طائرة نموذجية يمكن أن تشكِّل 30% من إجمالي الوزن مع حوالى 10% فقط تؤلِّفها الحمولة، أمّا الباقي فيشغله الوقود

والمعدّات الإلكترونية الخ... وهكذا، لو استُعملَت مواد ذات كفاءة أعلى بمقدار 50% من ناحية الجساءة والمتانة، فإنّ الوزن سوف ينقص مقابل كمية الحمولة.

وهناك انعكاسات متعدِّدة لتخفيض الوزن بشكلٍ معتبر. إذ يمكن أن تتضاعف الحمولة أو يزداد المدى أو تتحسَّن كفاءة التشغيل أو يحدث نوع من التجميع بين بعض هذه العناصر وعوامل أخرى. ومن الواضح أنّ هذه الفوائد هي تحسينات مُرحَّب بها، لكن هناك في بعض الأحيان فوائد أكثر أهمية ناجمة عن إنقاص الوزن. ففي حالة مشروع النقل الجوي فوق الصوتي أو الفوتي (super sonic transport –SST) في الولايات المتحدة في ستينيات القرن العشرين، كانت إمكانيةُ نقل أية حمولة على الإطلاق محلَّ شكٍّ تماماً إلى حين حلول الوقت الذي ألغي عنده المشروع. وبشكلٍ مشابه، اعتمدت الجدوى الاقتصادية لطائرة الإقلاع والهبوط العامودي (vertical take off and landing – VTOL) على الاستعمال الواسع للمواد المركَّبة. وفي كل التطبيقات، شكَّل تحسّن عمر التعب (Fatigue) واعتمادية المواد المركَّبة عامل جذبٍ إضافي مرغــوب به.

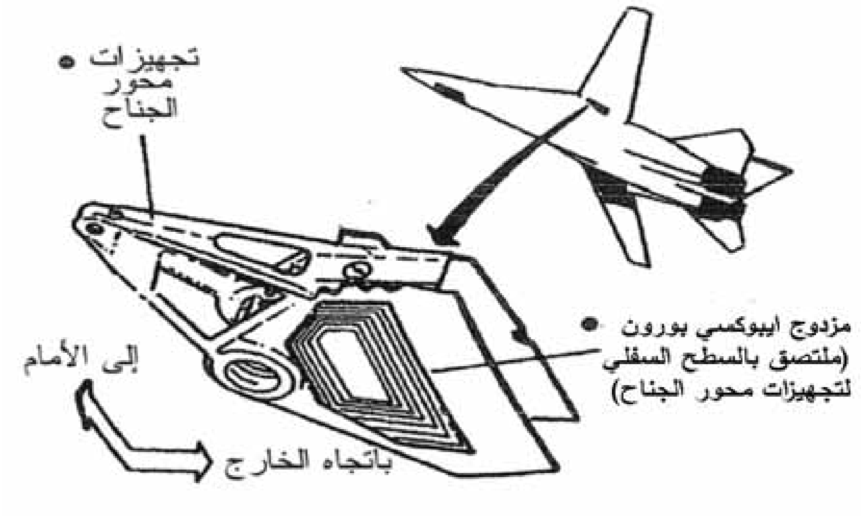
1. 4. 2 الطائرات الحربية

لقد ظهرت عبر السنين مشاريع متنوِّعة في مجال الطائرات الحربية، وهي أكثر بكثير من أن نستطيع تلخيصها في مساحةٍ صغيرة هنا. ولهذا، سوف نكتفي بوصف بعض المعالِم ذات الأهمية البارزة لا أكثر.

1. 4. 2. 1 مَفْصِل جناح الــ F-111 من شركة جنرال ديناميكس

إنّ الــ F-111 هي طائرة قاذفة ومقاتلة ذات جناح قابل لتغيير الزاوية تصنعها شركة جنرال ديناميكس (General Dynamics) (حالياً لوكهيد مارتن Lockheed Martin) في فورت وورث (Fort Worth) في ولاية تكساس. تكون الأجنحة عمودية على جسم الطائرة خلال الإقلاع والهبوط، وتصبح مرتدة إلى الخلف خلال الطيران بسرعات عالية. في مرحلة مبكرة من الإنتاج تحطَّمت بعض الطائرات، وأظهر تقفّي

السبب أنه يعود إلى صدوع تعب سابق لأوانه في تجهيزات مفصل الجناح المصنوع من الفولاذ المطرَّق (forged) كما يُشاهَد في الشكل 28.1. نستطيع أن نرى في الشكل نقطة المفصل الأولية والمكان الذي يتّصل عنده ذراع مُفعِّل مع مكبس ليجعل الجناح يدور حول المحور. تمَّ تمييز صدوع تعب في منطقة الصفيحة المركزية عندما فُكِّكَت بعض الطائرات من أجل التفتيش.



الشكل 1–28: تجهيزات محور الجناح
(بإذن من لوكهيد مارتن)

كان الحلّ الواضح هو زيادة سماكة المعدن في تلك المنطقة من تجهيزات محور الجناح التي حدثت عندها الأعطاب بحيث تنخفض مستويات الإجهادات إلى ما دون مستوى التحمل للمادة. وكحلٍّ بديل، ذكر ديال وهاويث (Dial and Howeth) [1-5] أنّ مزدوجاً من إيبوكسي بورون تمَّ تطبيقه من أجل تخفيض مستويات الإجهاد. يمكن أن نسمي هذا المزدوج "لصاقة إسعاف أولي من إيبوكسي بورون". فمثل لصاقة الإسعاف الأولي، تمَّ لصق المزدوج كدعامة على السطح السفلي لقطعة مصنّعة مسبقاً بالتطريق في

محور الجناح. دعونا الآن نُلْقِ النظرة على وضعين متعاكسين، لنرى كيف تم فعلاً تنفيذ ذلك الحلّ.

لنأخذ بعين الاعتبار أولاً حالة طائرة جديدة، أي إنّ مشكلة صدع تجهيزات مفصل الجناح تمَّ اكتشافها خلال عملية الإنتاج، وبالتالي هناك عدد كبير من الطائرات لم يتمّ بناؤها بعد. من الواضح أنّ تجهيزات مفصل الجناح على الطائرة غير المبنية بعد ليست فيها أية صدوع تعب، لذا قامت شركة جنرال ديناميكس بوضع المزدوج على تجهيزات مفصل الجناح قبل تركيبه. دعونا نقارن الكلفة النسبية لكلا الخيارين المختلفين. لنفترض أنه كان علينا أن نعيد تصميم تجهيزات مفصل الجناح الفولاذية، حينها كانت ستضاف كلفة تعديل التصميم وتصنيعه وتركيبه إلى كلفة تجهيزات مفصل الجناح الأساسية التي تُعتَبر القيمة القاعدية أو 100% في حساب القيمة النسبية في المقارنات القادمة.

بالمقابل، إذا أخذنا تجهيزات مفصل الجناح المُصمَّمة مسبقاً، ووضعنا عليها ببساطة مزدوج إيبوكسي بورون (وهذا يعني تصنيع وتركيب المزدوج)، فإنّ مقدار التوفير في الكلفة يبلغ 21% وهذا يعني توفيراً في الكلفة جديراً بالاهتمام. كما يعني أنّ المقاربة الأقل كلفةً بالنسبة إلى جميع الطائرات التي لم تُنتَج بعد كانت ببساطة أن نضع عليها لصاقة الإسعاف الأولي من إيبوكسي بورون. وحدث هذا التوفير في الكلفة في وقتٍ (الأعوام الأخيرة من ستينيات القرن العشرين) كان فيه الإيبوكسي بورون يكلِّف عدة مئات من الدولارات لكل رطل. نضيف إلى ذلك أنّ رقم الـــ 21% من التوفير المذكور أعلاه لا يتضمَّن أمراً آخر شديد الأهمية، وهو الربح الزمني الكبير الذي نحصل عليه من تحاشي تغيير القطع المطرَّقة والعودة إلى الإنتاج.

لو قرَّرت شركة جنرال ديناميكس أن تعيد تصميم القطع المطرَّقة وإعادة إنتاجها، لكانت ستواجه على الأقلّ عاماً كاملاً من توقّف الإنتاج. إنّ التكاليف الناجمة عن توقّف الإنتاج ذاك كانت ستفوق كثيراً توفير الـــ 21% لكل قطعة. وكانت تلك الـــ 21% الموفَّرة ستشكل كلفةً تفوق الكلفة الأصلية. وبالنسبة إلى الشركة كان هذا الإنفاق أفضل

من إيقاف خطّ الإنتاج. وهكذا، يتبيَّن أن هناك عدة أسباب وراء اختيارنا المقاربات البديلة، وأنها ليست بالضرورة متعلّقة بكلفة القطعة التي نتعامل معها. فهذه الـــ 21% الموفَّرة مع هذا التعديل الأساسي الذي طرأ على الطائرة كانت مكسباً إضافياً في الكلفة على المستوى قصير وطويل الأمد على السواء.

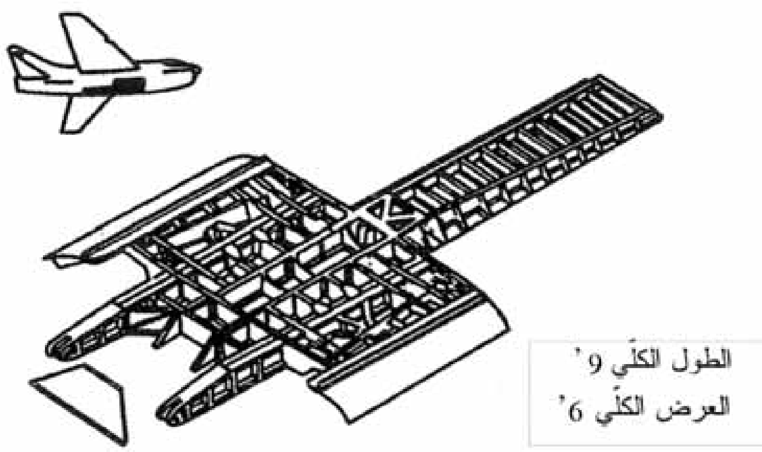
حدث التوفير الكبير الحقيقي في التكاليف في الطائرات التي دخلت مجال الطيران بالفعل. ففي هذه الحالة، كان بالإمكان استبدال تجهيزات مفصل الجناح العاجزة عن القيام بالعمل المطلوب واستبدالها بتجهيزات مفصل مُعاد تصميمها. ومع ذلك، يجب هنا أن ندفع تكلفة اثنين من تجهيزات مفصل الجناح، إضافةً إلى تكلفة تفكيك الجناح لإزالة تجهيزات مفصل الجناح القديمة، ومن ثم إعادة تركيب الجناح بعد ذلك. وتعتبر تكلفة هذا التركيب المتعدّد مرتفعة للغاية. مقابل هذا الوضع، وطالما لم تكُن تجهيزات مفصل الجناح الموجودة مصابة بصدوع تعب، فإنه بإمكاننا وضع مزدوج إيبوكسي بور عليها، وبذلك نوفِّر حوالى 60% من الكلفة مقارنةً بالبديل المتمثِّل بالاستبدال الكامل مع وضع قطعة من الفولاذ مصنَّعة بالتطريق عالية السماكة في منطقة تصدُّع التعب. شكَّل ذلك وفورات كبيرة فيما عدا توقيف خط الإنتاج. ومن المُعتقَد أنّ مزدوج إيبوكسي بور المذكور أعلاه هو أول تطبيق اقتصادي (الأقلّ كلفةً) للمواد المركَّبة المتقدِّمة في حوالى عام 1968. وتظهر في هذا المثال بشكلٍ بارز للغاية بعض تسويات التصميم ذات الأهمية الفائقة.

2.2.4.1 فرامل سرعة الـــ فاوت A–7

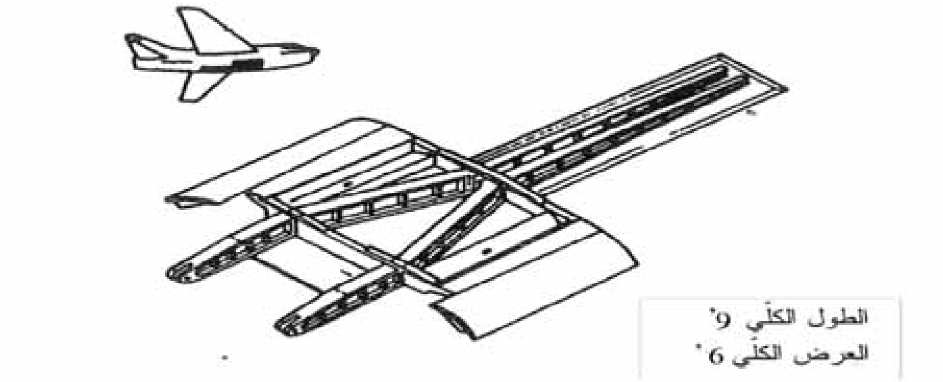
المثال التالي لتطبيقات المواد المركَّبة في الطائرات الحربية هو فرامل السرعة (air breaks) في الطائرة فاوت Vought (حالياً نورثروب غرومان Northrop Grumman) A-7 التي تتدلّى من أسفل الطائرة لتقليل السرعة، كما في الشكل 1-29. إنّ الـــ A-7 هي طائرة قاذفة ومقاتلة تستخدم للانقضاض، لذلك يجب أن تكون قادرة

على إبطاء السرعة خلال فترة قصيرة جداً بواسطة استخدام هذا النوع من فرامل السرعة.

يتألف التصميم المعدني من شبكة معقّدة من العضدات المتداخلة الطولانية (Longitudenal) والجانبية (lateral)، كما في الشكل 1−29، ويزن حوالى 123 lb (56 kg). أمّا فرامل السرعة من المواد المركَّبة، فهو ذو تصميم أبسط بكثير، فيه دعامتان منثنيتان (أو مهتزّتان) تتلقّيان الحمولات في الاتّجاهات المختلفة، كما في الشكل 1−30.

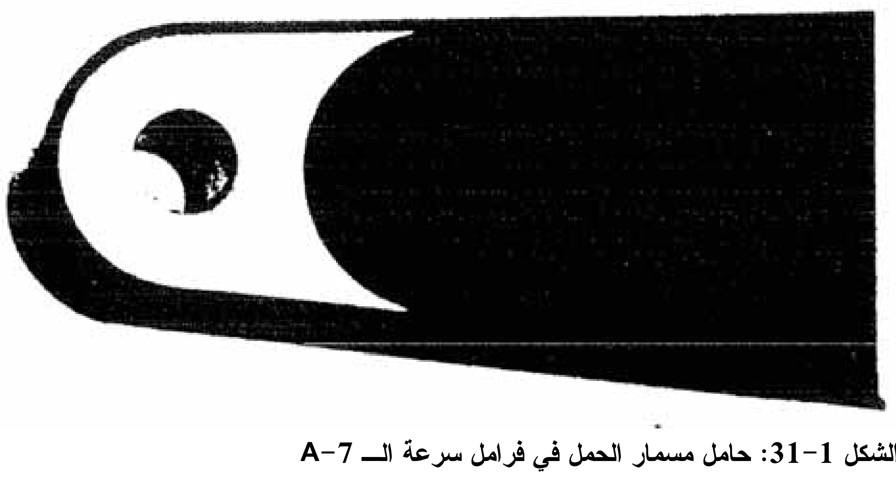


الشكل 1−29: فرامل سرعة الــ A−7 المعدني
(بإذن من نورثروب غرومان)



الشكل 1-30 فرامل سرعة الــ A-7 المركَّب
(بإذن من نورثروب غرومان)

تزن البنية المكوَّنة بكاملها لــ "الفاوت" من مواد مركَّبة ملصوقة مع بعض التجهيزات المقولبة الصفائحية أيضاً 80 lb (36 kg) أي بتوفير في الوزن يبلغ حوالى الثلث. تبدو بساطة فرامل السرعة المركَّبة واضحة للعيان بكل يسر عند مقارنة الشكلين 1-29 و1-30، ولا يمكن إجراء نسخة معدنية لشكل العضدات المركَّبة إلاّ إذا لجأنا إلى التطريق أو التشغيل، وتعتبر العمليتان المذكورتان عاليتي الكلفة تماماً.



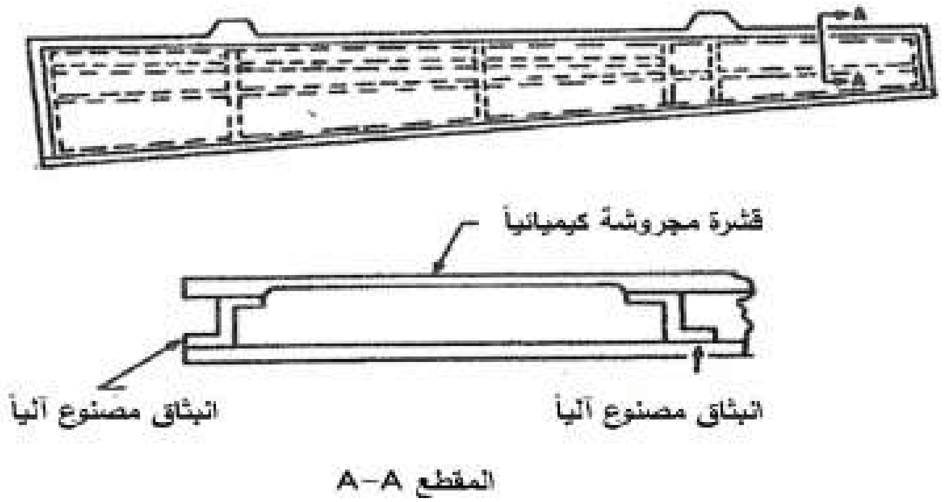
الشكل 1-31: حامل مسمار الحمل في فرامل سرعة الــ A-7
(بإذن من نورثروب غرومان)

كانت بعض المشاكل الأكثر أهميةً التي واجهت صنع فرامل السرعة هذا من الإيبوكسي – غرافيت تبرز في المناطق التي نحتاج فيها إلى مفصَّلة أو نقطة تعليق. وسوف ندرس هذا الموضوع بشكل أكثر تفصيلاً في الفقرة 5.7. لكن في الوقت الحاضر، يجب أن نكون منتبهين لكون الإيبوكسي – غرافيت لا يتمتَّع خاصةً بمتانة عالية للتحميل. وفي كل مرة نجد فيها محوراً أو مسماراً أو مثبِّتاً، يجب أن نهتمّ بموضوع متانة التحميل للمواد المركَّبة، أي قدرة المادة المركَّبة على دعم المحور أو المسمار أو المثبِّت في التحميل المباشر.

وهكذا كان على طائرة الفاوت أن تقارب هذه المسألة بحذر، وعند نقطة التمفصل لفرامل السرعة تم استعمال بعض الألمنيوم الذي يتمتع بمتانة تحميل مناسبة ضمن الإيبوكسي– غرافيت، كما في الشكل 1–31. وبهذا الشكل، أصبح لدينا قطعة مركب من مادة مركبة من ثلاثة مكوِّنات: الغرافيت والإيبوكسي والألمنيوم. في بيئة الإنتاج، لن يكون فرامل السرعة هذا مصنوعاً من الألمنيوم بجانب الإيبوكسي – غرافيت لأنّ التآكل الغالفاني (الذي سنناقشه في الفقرة 7.6) سوف يحدث بين المادتين. لكن باعتبار هذه القطعة هي للإيضاح فقط، وليست مُعدّة للاستعمال في الطيران طويل الأمد، فإنه من الممكن أن تُبنى نقطة التمفصل في فرامل السرعة بواسطة مادة رخيصة مثل الألمنيوم سهل التشغيل. كانت الـــفاوت تحاول أن تشرح المبدأ، لا أن تصنع قطعة للإنتاج الفعلي.

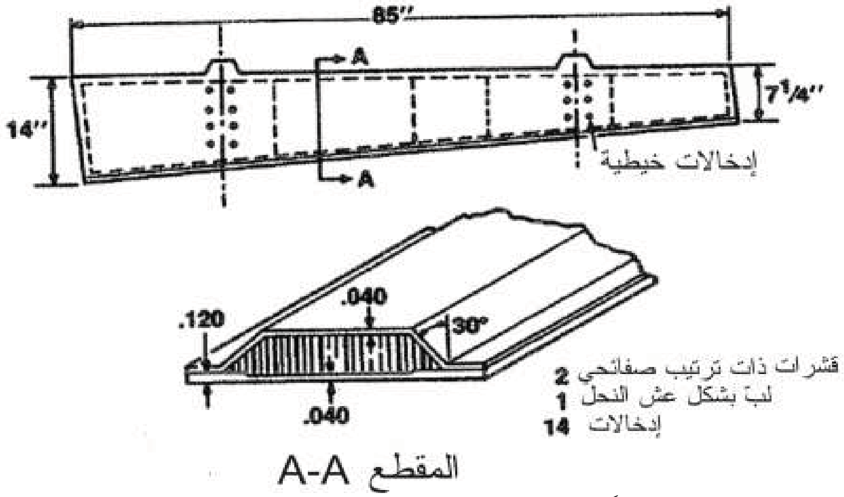
3.2.4.1 كابح الـــ فاوت S–3A

المثال التالي هو كابح (spoiler) صنعته فاوت (حالياً نورثروب غرومان) لطائرة لوكهيد S-3A التي تستعمل للبحث عن الغواصات، والكابح هو قطعة صغيرة نسبياً شبيهة بالمصراع (flop) موجودة في الجناح.



الشكل 1-32: الكابح المعدني لـــ س-3 أ
(الشكر من أجل الصورة إلى لوكهيد مارتين)

في المقطع A-A للكابح المعدني، كما في الشكل 1-32، نرى أنّ عدة قطعٍ مصنوعة بالبثق تُستعمَل كدعامات داخل هذه البنية. وقد تمَّ كشط قشرة الكابح كيميائياً لتغيير سماكتها في عدة مناطق. ويُعتبر كلٌّ من البثق والكشط الكيميائي من العمليات ذات الكلفة العالية، وهكذا فإنّ الكابح يبدو بسيط المظهر جداً، لكنه مكلف إلى حدٍّ بعيد.



الشكل 1-33: الكابح المركَّب لـــ S-3A

(بإذن من لوكهيد مارتين)

من أجل تصميم الكابح المصنوع من المواد المركَّبة، يكون القاع قشرةً متغيرة السماكة على أحد الجوانب من مواد مركَّبة ليست صعبة البناء، كما في الشكل 1-33 ونحن لا نحتاج إلى استخدام الكشط الكيميائي (chem-mill) لتغيير سماكة المادة المركَّبة، بل كل ما نحتاجه هو التوقّف عن بناء المادة في طبقات المنتصف مع الاستمرار ببنائها عند الجوانب.

تُعتَبر هذه عملية عادية جداً بالنسبة إلى المواد المركَّبة، ولا تتضمَّن عملية تشغيل عالية الكلفة. وعوضاً عن دعامات مصنَّعة بالبثق، يتمّ وضع قلب بشكل عش النحل في داخل الرقاقات. وقلب عش النحل هذا هو ببساطة له شكل منشار شريطي يتوضَّع فوق القشرة السفلية ، ويتمّ بعد ذلك إكساء القلب ذي الشكل المنشار الشريطي بالطبقة العلوية من القشرة التي توضع فوقه، ثم تُشوى المجموعة كاملةً مع بعضها البعض. وهكذا يقتضي الكابح المركَّب إجراءً تصنيعياً بسيطاً للغاية، وكذلك تشكيلاً بسيطاً.

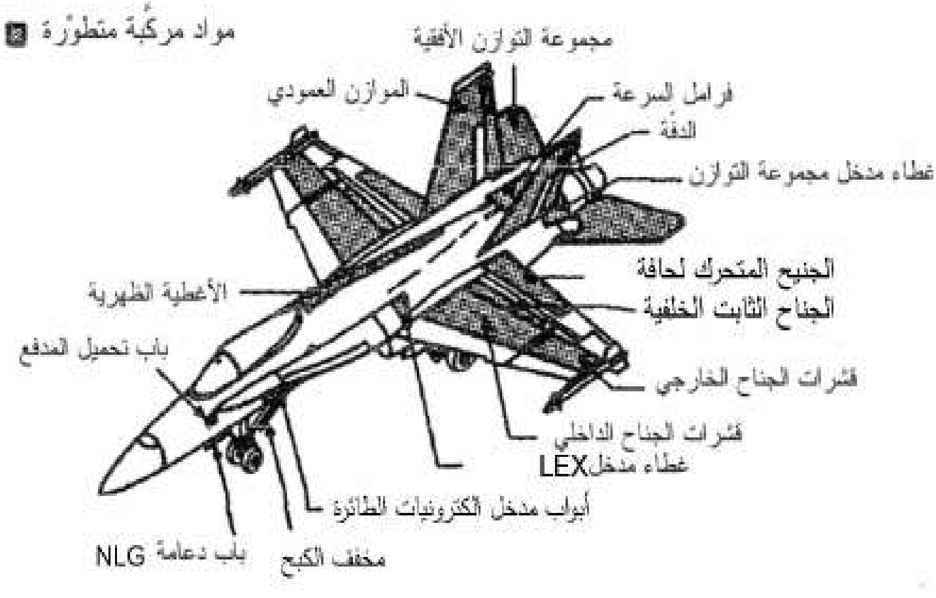
يزن الكابح المعدني الأصلي 13 lb (5.9 kg)، بينما يزن كابح الإيبوكسي – غرافيت مع قلب عش النحل أقلّ من ثمانية أرطال (3.6 kg). وهكذا حقَّقت فاوت توفيراً في الوزن يبلغ 41%. قارن التكاليف العالية للتشغيل والكشط الكيميائي الخاصة بالكابح المعدني ووزنه المرتفع مع التصميم بالإيبوكسي– غرافيت. رغم أنّ التكاليف الفعلية غير متوفّرة لنا، فمن التوفير في الوزن ومن أنماط عمليات التشغيل المعنية يمكن أن يكون الكابح المركَّب أكثر كفاءةً اقتصادية من الكابح المعدني بمقدارٍ كبير. ويعتبر هذا الاستنتاج صحيحاً حتى لو كانت كلفة المادة الخام في حالة الإيبوكسي – غرافيت أكثر منه في حالة الألمنيوم، لأننا لا نقارن بين التصميمين اعتماداً على أسعار المواد الخامّ فقط. فسعر المادة الخامّ هو البداية فقط في قصة الكلفة الحقيقية، وتكاليف التصنيع يمكن أن يكون لها تأثيرٌ قويٌ جداً – إن لم يكُن هو التأثير المسيطر– على الكلفة النهائية للبنية المعنية.

4.2.4.1 بوينغ F-18

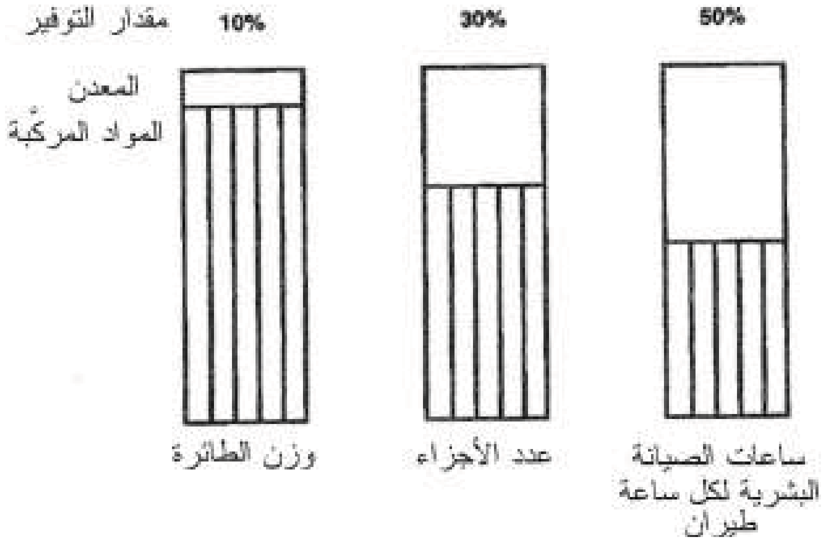
تُستعمَل المواد المركَّبة بشكلٍ واسع في الـــ F-18، وهي طائرة مقاتلة هجومية تصنعها شركة ماكدونيل دوغلاس McDonell Douglas (حالياً بوينغ Boeing) وشركة نورثروب Northrop (حالياً نورثروب غرومان). تتكوَّن المناطق المتعدِّدة المبقَّعة في الشكل 1–34 من إيبوكسي– غرافيت في البنية الأولية: الجُنيح الرأسي والأجنحة والسطوح الأفقية للذيل. كذلك يُستخدَم إيبوكسي– غرافيت في العديد من الأبواب الصغيرة وفي مناطق أخرى تقع حول كامل الطائرة، وهي من البنى الثانوية.

ما هي بعض المواضيع الهامة في التصميم والاستعمال المخطَّط له لطائرات الجيل الثاني المتنوِّعة المكوَّنة جزئياً من المواد المركَّبة، ولماذا يلعب إيبوكسي– غرافيت هذا الدور الهامّ فيها؟ لو أخذنا بعين الاعتبار وزن الطائرة وحدَه، لوجدنا أن استعمال إيبوكسي– غرافيت يمكن بسهولة توفير حوالى 10% من إجمالي الوزن مقارنةً بالتصميم المعدني التقليدي للطائرات، كما في الشكل 1–35. وعند مقارنة تلك العناصر البنيوية

النوعية المصنوعة من المواد المركَّبة بمثيلاتها المصنوعة من المعادن، نجد أنّ النسبة المئوية للتوفير هي أعلى بكثير. ونحصل على توفير أكبر بكثير – يصل حتى 30%– في عدد الأجزاء، كما في الشكل 1–35. ويقود هذا التوفير في عدد الأجزاء إلى توفيرٍ إضافي آخر في التكلفة في مجال منظومة الإدارة التي يجب أن تلاحق كل الأجزاء عبر عملية الإنتاج والتجميع وصولاً إلى المُنتَج النهائي، ويستمر ذلك في منظومة التخزين للتمكين من استبدال الأجزاء في المستقبل.



الشكل 1–34: استعمال المواد المركَّبة في F-18 C/D
(بإذن من بوينغ)

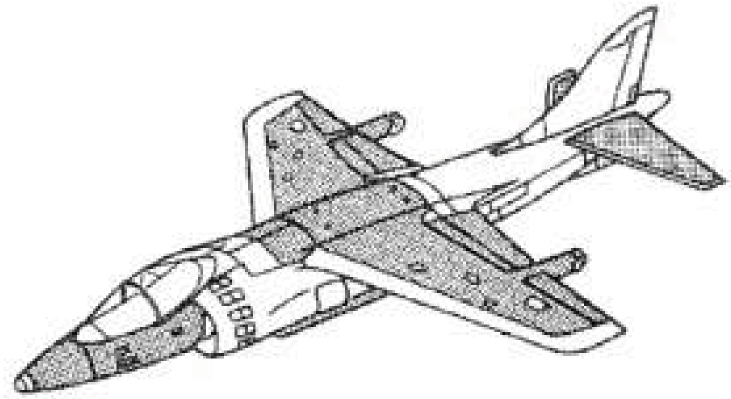


الشكل 1–35: مقادير توفير نموذجية في طائرات الجيل الثاني المكوَّنة جزئياً من المواد المركَّبة

نجد في الشكل 1-35 أنّ التوفير المتوقَّع في الصيانة الاعتيادية التي يجب إجراؤها من أجل إبقاء الطائرات قادرة على الطيران في الجوّ – أي ساعات الصيانة– رجل لكل ساعة طيران– يبلغ 50% عند استعمال المواد المركَّبة بدلاً من المعادن. وتعتبر هذه النسبة كبيرة جداً! فموضوع ساعات الصيانة– رجل لكل ساعة طيران هو مؤشِّر هامّ جداً عن اعتمادية الطائرة وكلفة صيانتها خلال فترة حياتها العملية. إنّ النقطة الرئيسية هنا هي: أننا لا نستطيع بالضرورة التركيز فقط على موضوع الوزن أو على موضوع تكاليف التصنيع، إذ يجب تفحص جميع هذه التكاليف في نفس الوقت للحصول على تقدير كلفة دورة الحياة للطائرة المُرتَقبة.

5.2.4.1 بوينغ AV-8B هاريير

في طائرة أ AV-8B هاريير التي تصنعها أيضاً شركة ماكدونيل دوغلاس (حالياً بوينغ) نرى في الشكل 1-36 أنّ المناطق المظلَّلة هي من إيبوكسي- غرافيت. يتكوَّن الجناح من 160 إلى 180 طبقة من إيبوكسي- غرافيت في أكثر أقسامه سماكةً. ويُستخدَم حوالى 1300 lb (590 kg) من إيبوكسي- غرافيت في مجمل البنية. وأحد الأسباب التي تجعلنا نرغب في استعمال بعض المواد المركَّبة المتقدِّمة، هنا يتضمَّن موضوعاً لم نتطرَّق إلى ذكره حتى الآن. فأحد خيارات المواد البديلة عن بعض المواد المركَّبة هو التيتانيوم الذي يُعتَبر معدناً إستراتيجياً، أي أنه مادة ذات أهمية إستراتيجية من حيث إنها ليست مادة طبيعية في الولايات المتحدة وإنها ضرورية في بعض التطبيقات. فإذا استطعنا الحفاظ على المعادن الإستراتيجية بقصر استعمالها على التطبيقات التي يجب أن نستخدمها حتماً فيها، فعندها سوف نقلِّل من قلقنا بشأن تأمين المعادن الإستراتيجية. إننا نستطيع تأمين بعض البدائل من التيتانيوم بواسطة المواد المركَّبة المتقدِّمة، التي ليست بالضرورة من الإيبوكسي – غرافيت.

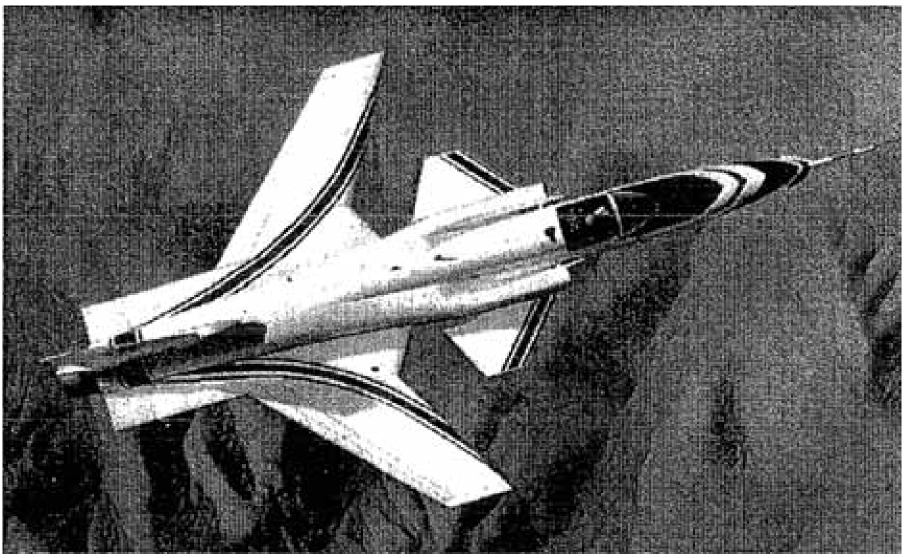


الشكل 1-36: المواد المركَّبة في الـ AV-8B هاريير (بإذن من بوينغ)

يُستعمَل بعض التيتانيوم في ظروف من درجة الحرارة المرتفعة التي لا يستطيع الإيبوكسي الأداء فيها، وهناك مصفوفات أخرى قيد التطوير من أجل التطبيقات عند درجات الحرارة العالية.

6.2.4.1 غرومان X-29A

إنّ أكثر ملامح طائرة غرومان X-29A فرادةً من نوعها هي أجنحتها الموجهة إلى الأمام، كما نشاهد في الشكل 1-37. وفي الطائرة المعدنية، يجب تقوية بنى الجناح الموجه إلى الأمام بشكل خصوصي – مع ما يقتضيه ذلك من ضريبة عالية من ناحية زيادة الوزن– من أجل تجنّب الانحراف (الايروديناميكي) التحريكي الهوائي. ولم تُبنَ في الواقع سوى طائرات قلائل من هذا النوع. بالمقابل، يمكن تصميم بنى الجناح من المواد المركَّبة طبقة فطبقة كي تتلاءم معاملات جساءات الصفائح الطبقية فيها بحيث تقاوم بنجاح الانحراف التحريكي الهوائي، ويكون وزنها بنفس الوقت أقلّ من الأجنحة المرتدة إلى الخلف الاعتيادية! تُمكِّن مثل هذه التطوّرات البنيوية من استخدام الأجنحة الموجهة إلى الأمام ذات الأداء الأفضل من ناحية التحريك الهوائي، التي توفِّر درجة متحسِّنة من الرشاقة التي تُعتبَر بدورها ذات قيمة أساسية في نجاعة الأداء خلال المعارك الجوية.



الشكل 1-37: طائرة غرومان X-29A
(بإذن من غرومان)

7.2.4.1 نورثروب غرومان B-2

إنّ طائرة الشبح ب-2 قاذفة القنابل التي تظهر في الشكل1-38 هي من صناعة شركة نورثروب غرومان. ومن الناحية الفعلية، تتكوَّن جميع الأجزاء الخارجية لهذه الطائرة من مواد مركَّبة متنوِّعة، والسبب في ذلك هو ميّزات هذه المواد الممتصّة-للرادار و/أو القدرة على صنعها بأشكال تقلِّل بشكل طبيعي البصمة الرادارية للطائرة. ولكنّ تفاصيل هذا الأمر ليست متوفّرة للنشر العمومي، و ينطبق نفس الشيء على طائرة الشبح F-117A المقاتلة التي تصنعها شركة لوكهيد مارتين.

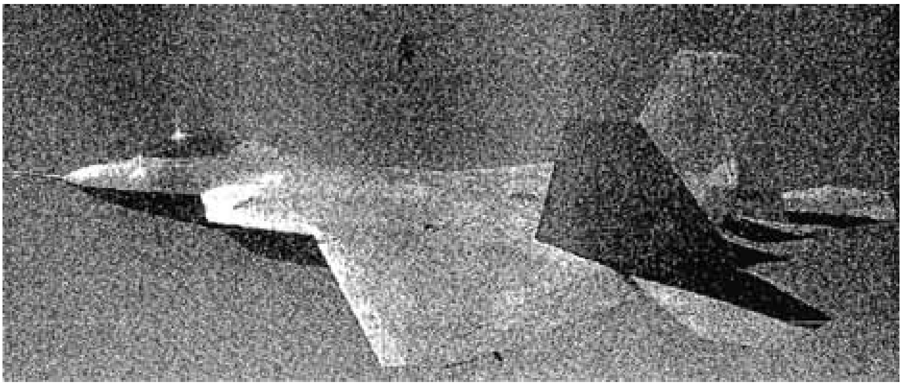


الشكل 1-38: قاذفة القنابل الخفية B-2
(بإذن من نورثروب غرومان)

8.2.4.1 لوكهيد مارتين F-22

حلَّقت الطائرة المقاتلة ذات التفوّق الجوّي لوكهيد مارتين F-22 التي تظهر في الشكل 1-39 أول مرة في عام 1997. تشكِّل البنى المركَّبة حوالى 26% من هذه الطائرة، وقد استُعملت فيها تقانتا تصنيع أساسيتان. فقولبة الراتنج بالانتقال (RTM) –

التي ناقشناها في الفقرة 2.4.2.1 – تسمح بصناعة الأجزاء الأكثر سماكةً والأكثر تعقيداً في شكلها مثل عضدات الجناح التي تزن ما يعادل ثلث وزن العضدات المعدنية المماثلة، وتكلِّف أقلّ منها بنسبة 20%، ولديها نصف معدَّل الرفض. في حالة بناء طبقات الشريط التقليدي في القطع المسطَّحة الواسعة مثل الأجنحة، لا يتطلَّب ذلك التثبيت بالبرشام، لذا تكون سطوح التحكّم بالطيران ناعمة تماماً، وهذا يعني مقداراً أقلّ من المتانة.



الشكل 1–39: الطائرة لوكهيد مارتين F–22
(بإذن من لوكهيد مارتين)

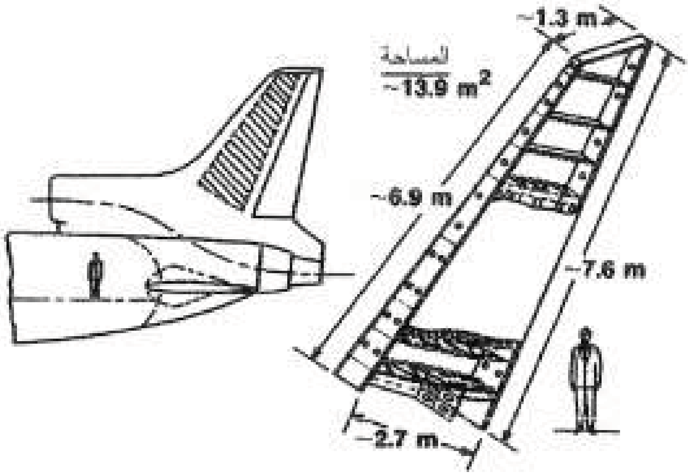
3.4.1 الطائرات المدنية

1.3.4.1 الجنيح الرأسي لـــ لوكهيد L–1011

يظهر الجُنيح الرأسي لطائرة لوكهيد L-1011 في الشكل 1–40 حيث يبدو كذلك موضع الجُنيح مع الأعضاء البنيوية الداخلية. تكون العضد التي تمتدّ صعوداً على كامل الجُنيح خفيفة الوزن إلى درجة تسمح لشخص وحيد برفعها حتى لو كان طولها يتجاوز 20 ft (7 m). وكانت المشكلة الرئيسية التي برزت للعيان خلال إنشاء هذا الجُنيح الرأسي في صعوبة وصل الأجزاء المركَّبة مع بعضها البعض. وفي أيّ فحص بنيوي

للجُنيح الرأسي، أي حيثما حدثت الأعطاب والفشل، كان يتمّ بعد ذلك تصميم العضدات، وهكذا وصل الجُنيح إلى تحقيق هدف تصميمه.

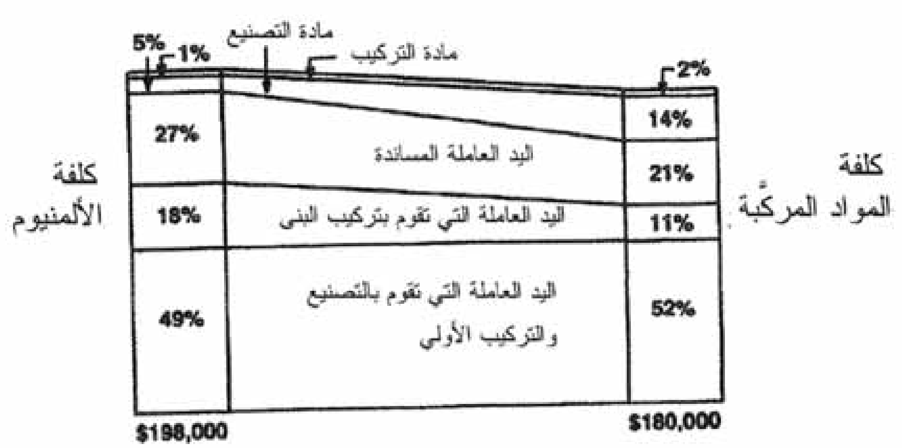
لم تقتصر أهداف التصميم في مشروع الجُنيح الرأسي على تحقيق وزنٍ أقلّ من الإنشاء بواسطة الألمنيوم، بل من أجل إظهار انعكاسات هذا النوع من الإنشاء على الكلفة مقارنةً بالمعادن. يتمّ في الشكل 1-41 مقارنة كلفة جُنيح الألمنيوم على الجانب الأيسر للشكل بجُنيح الإيبوكسي – غرافيت على الجانب الأيمن منه. وقد قُسِّمت الكلفة إلى عدة فئات منفصلة. فعلى سبيل المثال، تشكِّل مادة الألمنيوم المستخدمة في التصنيع حوالى 5% من الكلفة إجمالي، بينما يشكِّل الإيبوكسي – غرافيت 14% من إجمالي الكلفة.



الشكل 1-40: الجُنيح الرأسي (الزعنفة) للطائرة لوكهيد L-1011
(عن: [1-6] Jackson, [et al.])

وهكذا يبدو أنّ سعر المادة الخامّ في حالة الإيبوكسي – غرافيت –إذا نظرنا إليه كنسبة مئوية من الكلفة الإجمالية للجُنيح– يبلغ ما يقارب ثلاثة أضعاف ما هو عليه في حالة الألمنيوم. لكنّ هذه المقارنة ليست بالمقارنة الصالحة، لأنّ سعر المادة الخامّ ببساطة ليس القاعدة التي نعتمد عليها في أعطاء رأي مبدئي – ناهيك عن النهائية– في مسألة الكلفة. فالتكاليف الأخرى التي تتدخَّل في ذلك، مثل اليد العاملة المساندة واليد العاملة التي

تقوم بالتجميع الإنشائي، هي أقلّ بكثير في حالة البنى المركَّبة ممّا هي عليه في حالة البنى وفي واقع الأمر، تكون التكاليف أقلّ إلى حدٍّ كبير جداً بحيث يجعل التكاليف الأخرى تطغى فعلياً على تلك المساوئ البدئية المتعلِّقة بارتفاع كلفة المادة الخامّ، بحيث تكون النتيجة النهائية أنّ كلفة الجُنيح المصنوع من المواد المركَّبة أقلّ بـــ 10% من كلفة الجُنيح المعدني! إنّ كلفة اليد العاملة هي المفتاح في مسألة تزايد قابلية التصنيع في حالة المواد المركَّبة الذي يجعلها أكثر اقتصادية من المعادن في العديد من التطبيقات، وأصبحت هذه الحقيقة أكثر وضوحاً كل يوم.



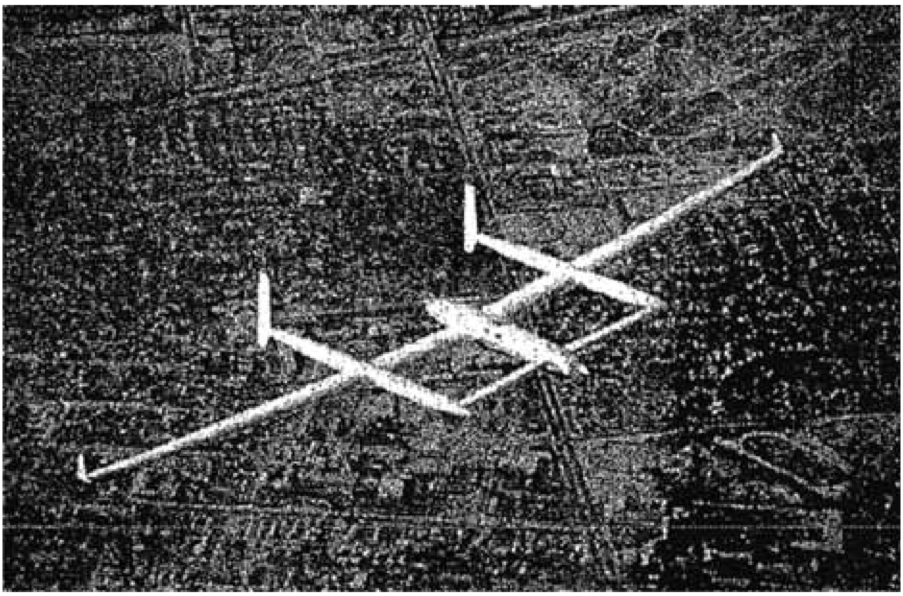
الشكل 1-41: كلفة الجُنيح الرأسي للطائرة L-1011
(عن: [7-1] Alva, [et al.])

تكمن النقطة الرئيسية في أن، على الرغم من ارتفاع كلفة المادة الخامّ، كلفة التصنيع تنخفض إلى درجة كافية لأن تتغلَّب كلياً على الزيادة في كلفة المادة الخامّ. ومن الواضح أنّ تكاليف اليد العاملة تتجاوز بكثير كلفة المادة الخامّ وحدَها، لذلك يكون للتغيّرات الصغيرة في تكاليف اليد العاملة أثر أهمّ بكثير من التغيّرات الكبيرة في تكاليف المواد الخامّ. فالنقطة المهمة جداً: لا تفكر فيما يتعلق بكلفة المادة الخامّ. فيجب علينا أن ندمج تكاليف التصنيع في حساب إجمالي الكلفة قبل أن نستطيع القيام بمقارنة صالحة. وفي حالتنا هنا، نجد أنّ الإيبوكسي- غرافيت هي مادة أكثر من منافسة، إنها المادة المفضَّلة في هذا التطبيق لأنها أكثر كفاءة اقتصادية (أقلّ كلفةً) من الألمنيوم. هذا مع العلم

أنّ المقارنة المذكورة أعلاه قد بُنيت على أساس الكلفة البدئية فقط بدون أن تأخذ بالحسبان انخفاض تكاليف الصيانة والتشغيل طويل الأمد.

2.3.4.1 روتان فوياجير

إنّ إحدى أكثر الطائرات تميّزاً في الفترة الأخيرة هي روتان فوياجير المصنَّعة بالكامل من المواد المركَّبة، كما في الشكل 1-42 طارت هذه الطائرة حول العالَم بدون توقّف في عام 1989. لقد أحدث برت روتان (Burt Rutan) من مصنع طائرات روتان (Rutan Aircraft Factory) توجهاً لا نهاية له لإنتاج الطائرات المصنَّعة بالكامل من المواد المركَّبة في ثمانينيات وتسعينيات القرن العشرين.

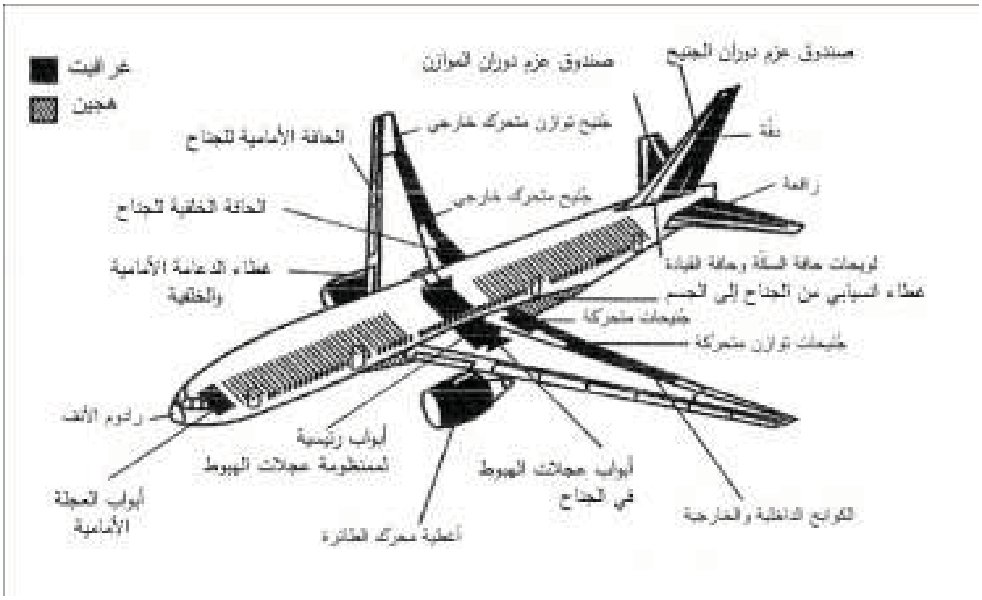


الشكل 1-42: الطائرة روتان فوياجير
(بإذن من سكيلد كومبوزيتس Scaled Composites)

3.3.4.1 بوينغ 777

دخلت طائرة بوينغ 777 الضخمة مزدوجة المحرِّك ذات الجسم العريض، والظاهرة في الشكل 1-43 الخدمة في عام 1995، وقد استُعملت فيها المواد المركَّبة أكثر من أية طائرة بوينغ تجارية سابقة لها، إذ استُخدم حوالى 18500 lb (8400 kg) من المواد المركَّبة في كل طائرة ضمن كلٍّ من البنية الأولية (وهي المرة الأولى في طائرات البوينغ) والبنية الثانوية، مما شكَّل بشكل إجمالي 10% من الوزن الإنشائي. ولعل أكثر ما يسترعي الملاحظة هنا هو الذيل الضخم المكوَّن من ألياف كربون ضمن مصفوفة من الإيبوكسي المقوّى، وكانت فوائد ذلك الحصول على توفير 15-20% في الوزن وزيادة متانة التآكل وتحسين التحريك الهوائي (أيروديناميك) إضافةً إلى إمكانية الكشف السطحي للأعطاب الناجمة عن الصدم. وتعتبر عملية إنتاج الذيل عملية مؤتمتة (automated) بشكلٍ كبير تتضمَّن بناء طبقات الشريط والتشكيل والتشغيل. والعديد من عارضات أرضية جسم الطائرة الظاهرة في الشكل 1-43 صنعت بواسطة نظام راتنج إيبوكسي مُقوّى.

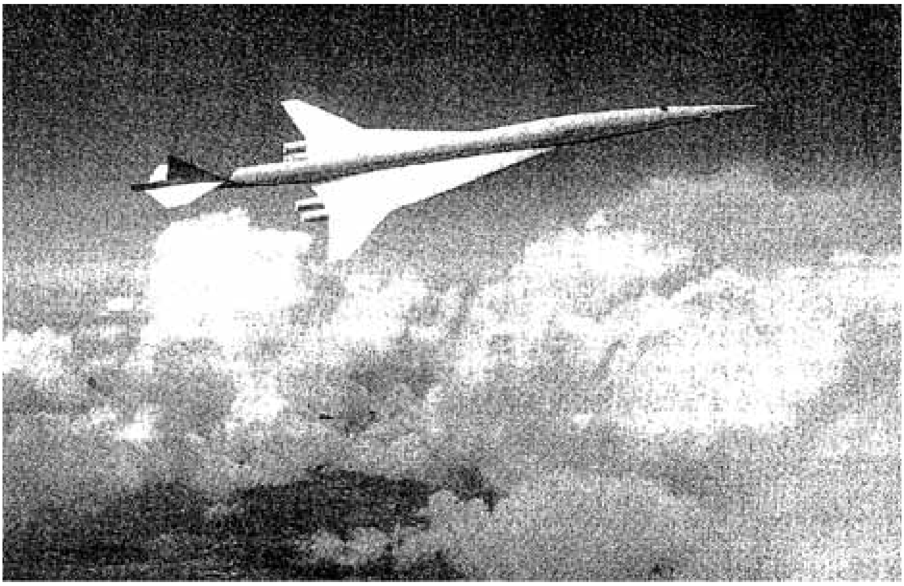
كما يُستَعمل الإيبوكسي كربون الأكثر ألفةً في تطبيقات متنوِّعة: دفّة الذيل ورافعاته، الجُنَيحات المتحرِّكة الداخلية والخارجية، جُنيحات التوازن المتحرِّكة، أبواب التروس المسننة الخاصة بالهبوط، وأغطية محرك الطائرة. ويُستعمَل هجين من الزجاج والكربون في وصلة تخفيف الجرّ من الجناح إلى الجسم. وأخيراً يُصنّع الفرامل من الكربون-كربون.



الشكل 1–43: الطائرة بوينغ 777 (بإذن من بوينغ)

4.3.4.1 النقل المدني بالسرعة الفائقة

هناك الكثير من العمل قيد التنفيذ حالياً في النقل المدني ذي السرعة الفائقة (High-Speed Civil Transport- HSCT) ليكون خليفة الأنواع المتعدِّدة للنقل الجوي الفوتي (SuperSonic Transports-SST) أي الكونكورد Concorde البريطانية–الفرنسية والتوبوبلوف Tupelove Tu-144 السوفياتية ونسخة الولايات المتحدة الأمريكية التي لم تُنتَج أبداً. في النقل الجوي فوق الصوتي (SSTs)، تمَّ إحراز الأهداف المطلوبة في الأداء على حساب الربح المالي. أي إن السرعة والمدى تقاطعت مع المتطلَّبات التصميمية؛ لكن حتى يتمّ تحقيق ذلك كان الوزن الإنشائي ضخماً إلى درجة منعت الطائرة من حمل حمولة مربحة مالياً. والتطوّرات الحادثة في مجال المفاهيم الإنشائية الخاصة بدرجة الحرارة العالية هي القاعدة من أجل التقاطع مع متطلَّبات الربح المالي في النقل المدني ذي السرعة الفائقة، كما في الشكل 1–44 كي يخدم على سبيل المثال سوق الدول الواقعة حول المحيط الهادي.



الشكل 1-44: النقل المدني ذو السرعة الفائقة
(بإذن من بوينغ)

4.4.1 التطبيقات الفضائية

يتعاطى جميع الأشخاص إلى درجة ما مع النشاطات الفضائية، ومع ذلك، قلائل هم المطلعون على الدور الذي تلعبه المواد المركَّبة المتنوِّعة في هذه النشاطات. فالتوفير في الوزن هو أمر ذو أهمية حاسمة في ميدان البنى الفضائية، نظراً إلى الكلفة الهائلة التي يستلزمها رفع أية بنية من الأرض إلى الفضاء الخارجي. وهكذا نرى أنّ المواد المركَّبة تلعب دوراً إلزامياً في كل البنى الفضائية الموجودة فعلياً، وهذا الدور يظل صغيراً نسبةً إلى ما ستلعبه هذه المواد في المستقبل مع تطوير تطبيقات جديدة.

هناك بعض البنى المكوَّنة من إيبوكسي-غرافيت يمكن تكييفها بحيث يصبح معامل التمدّد الحراري فيها معدوماً، وفي هذا فائدة كبيرة للهوائيات الضخمة التي يجب عليها أن تمرّ إلى داخل أشعة الشمس وإلى خارجها مع الحفاظ على ثبات أبعادها من

أجل دقّة تعيين الإشارة. وعلى سبيل المثال، تُستخدَم عوارض هيكل من الإيبوكسي – غرافيت لحفظ توازن مقراب هَبل الفضائي (Hubble Space Telescope) ودعمه.

5.4.1 التطبيقات في العربات

تتميَّز تطبيقات المواد المركَّبة في العربات عند مقارنتها بالتطبيقات في الطائرات والتطبيقات الفضائية ببعد جديد تماماً وهو: السعر المنخفض ومعدّل الإنتاج العالي. وتعتبر هذه الثنائية في زوج العوامل الاقتصادية المعهود المتمثّل في الإنتاج ذي الكلفة المنخفضة المقترن بالمعدّل العالي للإنتاج أمراً أساسياً للمحافظة على الكلفة الحالية للمركبات مع معدلات الإنتاج الحالية العالية، وبنفس الوقت تحقيق هدف يتمثّل في زيادة متوسط المسافة المقطوعة مقابل الوقود المصروف البالغ حالياً 27.5 ميلاً لكل غالون (11.7 km/L) ليصبح 80 ميلاً لكل غالون (34 km/L). فالخبراء الاقتصاديون ومستشارو التسويق يرون أنّ الزبائن النموذجيين المحتملين لشراء العربات في المستقبل لن يتجاوبوا إيجابياً إلاّ إذا لم تتجاوز الكلفة البدئية للسيارة كلفتها الحالية. وفي الوقت نفسه، تقتضي مستوياتُ الطلَب التقاطع مع معدلات إنتاجٍ لا يمكن تحقيقها بواسطة تقنيات التصنيع الحالية. فعلى سبيل المثال، تتمتع آلات فرش الشريط بمعدلات إنتاج كافية لصناعة جميع الطائرات المطلوبة كل سنة. ولكن نفس آلات فرش الشريط هذه هي عاجزة بشكل مفجع عن صناعة العناصر بمعدلات ضرورية للحفاظ على إنتاج العربات الذي يفوق معدل إنتاجه الحالي بمقدارٍ كبير عدد الطائرات المصنوعة في عقدٍ من السنوات! علاوةً على ذلك، فإنّ شوي كل عنصر من تلك العناصر بواسطة الصاد والموصَد سيكون مأزقاً إضافياً في مشاكل التصنيع، لأنّ كل عنصر سيلزمه عدة ساعات كي يكتمل شيّه. وهكذا، يكون ابتكار تقنيات تصنيع جديدة أمراً جوهرياً لابد أن يسبق الاستخدام واسع النطاق للعناصر المكوَّنة من المواد المركَّبة في صناعة العربات. إضافةً إلى ذلك، يجب أن تكون كلفة ليف الكربون الخامّ، على سبيل المثال، أقلّ بكثير من الأسعار الحالية للتمكن من إنتاج عناصر رخيصة الثمن بشكلٍ مناسب.

لقد جرت محاولات كثيرة لإدخال المواد المركَّبة ضمن إنتاج العربات وذلك بدءاً من "سيارة عرنوس الذرة" لهنري فورد Henry Ford في أواخر ثلاثينيات القرن العشرين (إذا أهملنا استعمالات الخشب السابقة لذلك). وكانت سيارة شيفروليه كورفيت (Chevrolet Corvette) ذات الجسم المصنوع من الألياف الزجاجية التي ظهرت لأول مرة عام 1953 هي الحالة الوحيدة التي حقَّقت نجاحاً طويل الأمد. وتتمتع بعض قطع تبديل إفرادية للسيارات – مثل النوابض وأعمدة نقل الحركة – بمميِّزات فريدة وسجلات إنتاج مُجرَّبة من حيث الكلفة المنخفضة ومعدلات الإنتاج العالية، إضافةً إلى التوفير الكبير في الوزن الذي يستطيع أن يفي بمتطلّبات إنقاص كتلة الجسم لتحقيق الأهداف الاقتصادية لتوفير الوقود. فمثلاً تزن النوابض الفولاذية لسيارة شيفروليه كورفيت موديل 1980: 41lb (18 kg)، بينما تزن النوابض المركَّبة في سيارات موديل 1981 وما بعده 8 lb فقط (3.6 kg).

وفي سبعينيات وثمانينيات القرن العشرين، جرت محاولات عديدة لتحديث قاعدة بيانات المعلومات التي كانت قائمة حينئذٍ من حيث تقنيات التصنيع والتكاليف وأوزان القطع. إضافةً إلى ذلك، أجريت دراسات أولية حول الميزة التصنيعية الاعتيادية للمواد المركَّبة المتمثّلة في القدرة على الاستغناء عن عدد كبير من القطع المعدنية المرتبطة ببعضها البعض واستعمال عدد أصغر بكثير (صغير حتى يصل إلى واحد) من القطع المركَّبة عوضاً عنها، وذلك بغرض تقييم تأثير هذا الأمر في كلفة التصنيع الإجمالية. وفي عام 1979، أُنتجَت ببطء سيارة فورد Ford LTD (بالحجم الكامل) سيدان sedan انطلاقاً من $ 25000 (حسب قيمة عام 1979) للمواد الخامّ ضمن مشروع كلفته الإجمالية 3.5 مليون دولار مع إنقاص في وزن السيارة إلى 2500 lb (1100 kg) بدلاً من الوزن الاعتيادي البالغ 3740 lb (1700 kg) للسيارة الفولاذية المكافئة لها. وتعتبر الكلفة الإجمالية للمشروع خارج الموضوع تماماً لأنّ مشروع أية سيارة مفردة سوف يكلِّف دائماً أكثر من مليون دولار من أجل الإنتاج. ومع ذلك، فإنّ سعر المواد الخامّ وحدَه كان أكبر من القيمة الاقتصادية المكافئة للسيارة أي ما كان يمكنك شراؤه بدلاً

منها. إضافةً إلى ذلك، كانت تقنيات التصنيع أبطأ بكثير من أن تساير المستويات العادية لطلَب المستهلكين.

واستناداً إلى ذلك، كانت نتيجة التقييم في عام 1979 غير مرضية (مع أنّ بعض القطع الإفرادية مثل النوابض وأعمدة نقل الحركة نجت بالفعل في بعض أنواع الإنتاج القياسي). وكشف التقييم اللاحق في عام 1997 عن تطوّر حقيقي باتّجاه عمليات تصنيع أكثر سرعةً وسيارات أقلّ كتلةً، لكنّ سعر ألياف الكربون اللازم لتحقيق نقصٍ في الكتلة يكفي للوصول إلى الأهداف الاقتصادية من ناحية توفير الوقود ظلّ يعيق الإنتاج بنفس كلفة سيارة سيدان باسنجر العادية لعام 1997. ومع ذلك، بيَّنت شركة فورد أنّ القَوْلبة واسعة النطاق يمكن أن تنتج خمس عدد قطع جسم السيارة مع كلفة للقطع المركَّبة المُقَوْلبة تبلغ أقل بـــ 60 % من القطع المعدنية المماثلة في الشكل المُشكلة بالكبس (البلص). وهكذا، يظهر لنا أنّ هناك تطوراً مطّرداً سنة بعد سنة باتّجاه الهدف المتمثّل في سيارات مركَّبة ذات كلفة مماثلة للسيارات المعدنية، وتستهلك بنفس الوقت أقلّ بكثير من مصادرنا النفطية الثمينة.

6.4.1 التطبيقات التجارية

تشقّ بعض المواد المركَّبة طريقها إلى التطبيقات التجارية بسرعة بالغة، وذلك في حال كانت التكاليف تحت السيطرة أو لم تكُن قضية. على سبيل المثال، أُنتجَت سنارات صيد السمك المكوَّنة من ألياف زجاجية منذ أربعينات القرن العشرين، وأصبحت فعلياً السنارات العيارية في ستينات ذلك القرن. كذلك أصبحت مُنتجات أخرى عديدة مكوَّنة من الألياف الزجاجية شائعة الانتشار مثل: القوارب، والعربات إلى مدى محدود، ومضارب التنس، والمزالج، وألواح ركوب الأمواج.

وتُستعمَل نظم أغلى ثمناً من ألياف مثل إيبوكسي بورون وإيبوكسي – غرافيت في نوادي الغولف ومضارب التنس على الرغم من كلفتها العالية، لأنّ الزبائن المتنافسين بحدّة راضون تماماً عن ذلك، بل إنهم متلهّفون حتى لإنفاق المزيد من المال على نظام ألياف "فريدة" عسى أن تمنحهم "فارقَ تفوّقٍ" في لعبتهم. وفي الواقع، كان الاستعمال

الباكر للإيبوكسي غرافيت في نوادي الغولف عاملاً هاماً في زيادة استعمال هذه المادة في الطائرات الحربية، لأنّ زيادة حجم إنتاج الإيبوكسي – غرافيت أنقص كلفته من أجل جميع المستخدمين. ونذكر هنا أنّ الإيبوكسي – غرافيت فعّال تماماً في تقوية الأعمدة التي سبق بناؤها في الجسور الواقعة في المناطق ذات الفعالية الزلزالية مثل كاليفورنيا واليابان. وسوف تتطوَّر تطبيقات أكثر فأكثر للمواد المركَّبة مع استخدام مخترعي العالَم لمخيلتهم وبراعتهم في تحسين المنتجات القديمة وفي ابتكار منتجات جديدة.

5.1 خلاصة

لقد تمَّت معالجة الأسئلة الأساسية عن الماهية والغاية والكيفية بالنسبة إلى المواد والبنى المركَّبة. وهناك أشياء كثيرة أخرى يمكن أن تُقال – على سبيل المثال– عن البوليميرات والمعادن والسيراميك والكربون من ناحية استخدامها كمواد مصفوفات، كما تتوفَّر تقنيات عديدة أخرى لتصنيع المواد المركَّبة. إضافةً إلى ذلك، يوجد فعلاً العديد من الأمثلة الأخرى على الاستعمال الفعّال للمواد المركَّبة في الإنشاءات. ومع ذلك، تمَّ تقديم مدخل تمهيدي عن كلٍّ من المواضيع المذكورة، ونأمل أن تكون هذه المقدِّمات كافية للوصول إلى الهدف المتوخّى في إعطاء أساسيات المواد المركَّبة قبل دراسة الميكانيك المتعلِّق بها.

سوف يُدرَس الميكانيك الماكروي (العياني) للرقاقة بشكل معمَّق في الفصل الثاني، ثمَّ سيُقدَّم الميكانيك الميكروي (المجهري) للرقاقة في الفصل الثالث. وبعد ذلك، تُعالَج في الفصل الرابع كيفية تجميع الرقاقات لتشكِّل صفيحة طبقية إضافةً إلى متانة الصفيحة الطبقية والكيفية التي تنشأ بها الإجهادات ما بين الطبقات وتؤثِّر في المتانة وفي عمر التعب. وفي الفصل الخامس، يُعالَج الأداء الإنشائي للصفائح متعددة الطبقات المرتَّبة مع التركيز على الانحناءات وحمولات الانبعاج وأنماط الاهتزاز وتواتراته. وتُقدَّم مجموعة متنوِّعة من مواضيع التحليل والسلوك في الفصل السادس. وأخيراً في الفصل السابع، يتمّ بشكلٍ مختصر تناول الموضوع الواسع عن تصميم المواد المركَّبة. وفي كل

أقسام الكتاب، توقَّع دوماً مفاجآت ذات صلة بالحدس غير القابل للتطبيق في غالبية الأحيان الذي تطوَّر لديك استناداً إلى السلوك البسيط نسبياً للمعادن متماثلة المناحي!

مجموعة المسائل 1

في كلٍّ من الأسئلة التالية، اكتب مقالاً مصغَّراً طوله صفحة واحدة على الأقلّ مع أشكال توضيحية تقوم بمناقشتها وشرحها. استخدم مخيلتك، وما يتوفَّر لك من مصادر مثل المكتبات وشبكة الإنترنت العالمية للحصول على معلومات أكثر ممّا هو موجود في الكتاب، واذكر بشكل صحيح المصادر التي استشهدت بها.

1.1 عرِّف المادة المركَّبة بطريقة أكثر تفصيلاً من التعريف ذي الجملة الواحدة الوارد في الفصل الأول.

2.1 احصل على موضوع يصف الكيفية التي تُصنَع بها ألياف الغرافيت والكربون، ولخِّصه.

3.1 صِف المواد ذات التلدُّن الحراري والمواد ذات التصلُّب الحراري، وناقش ذلك. قارن بينهما من حيث زمن الإنتاج إذا كنتَ مزمعاً أن تصنع بنية مركَّبة باستخدام كلا النوعين.

4.1 أوجِد مثالاً أو نوعاً آخر من مادة مركَّبة صفائحية غير تلك المذكورة في الفصل الأول، وقُم بوصفها.

5.1 صِفْ بعض المواد المركَّبة الأخرى التي لم يتمّ تناولها في الفصل الأول.

6.1 صِفْ نوع العنصر الإنشائي الذي يمكن إنتاجه باستخدام كلٍّ من العمليات التصنيعية لبناء الطبقات التي دُرِسَت في الفصل الأول.

7.1 جِد عملية تصنيع أخرى لتوليد بنية مركَّبة غير التي عولجت في الفصل الأول أو في الصف ، وقُم بوصفها.

8.1 احصل على موضوع يصف غرضاً أو عنصراً أو بنيةً من المواد المركَّبة مُبتكرة، وذلك في أحد المنشورات من أمثال أفياشن ويك آند سبايس تكنولوجي Aviation Week and Space Technology، ميكانيكال إنجينيرينغ Mechanical Engineering، سيفيل إنجينيرينغ Civil Engineering الخ... واكتُب ملخَّصاً عن مواصفاتها الهامّة.

المراجع

1-1 Albert G. H. Dietz, *Composite Materials*, 1965 Edgar Marburg Lecture, American Society for Testing and Materials, 1965 (reprinted with permission).

1-2 Willard H. Sutton, B. Walter Rosen, and Donald G. Flom. "Whisker-Reinforced Plastics for Space Applications." *SPE Journal*: November 1964, pp. 1203-1209.

1-3 *Structural Design Guide for Advanced Composite Applications*, vol. 1, Material Characterization, 2nd ed., Advanced Composites Division, Air Force Materials Laboratory, January 1971.

1-4 John F. Judge, "Composite Materials: The Coming Revolution." *Airline Management and Marketing*: September 1969, pp. 85, 90 and 91.

1-5 D. D. Dial and M. S. Howeth, "Advanced Composites Cost Comparison." Paper presented at: 16th National SAMPE Symposium and Exhibition, Anaheim, California, 21-23 April 1971.

1-6 A. C. Jackson, J. F. Crocker, J. C. Ekvall, R. R. Eudaily, B. Mosesian, R. R. Van Cleave, and J. Van Hamersveld, *Advanced Manufacturing Development of a Composite Empennage for L-1011 Aircraft, Phase II Final Report, Design Analysis*, NASA CR 165634, Lockheed California Company, Burbank California, April 1981.

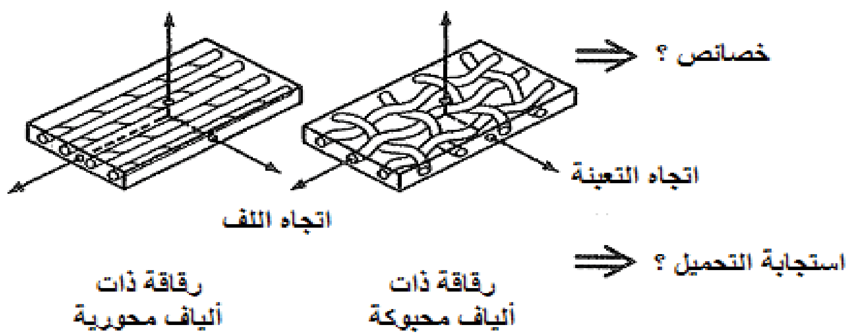
1-7 F. Alva, G. Brozovic, B. Cartl, R. Eudaily, J. Henkel, A. Jackson, R. Johnson, B. Mosesian, and R. O'Brien, *Advanced Manufacturing Development of a Composite Empennage for L-1011 Aircraft, Phase IV Final Report, Manufacturing Development*, NASA CR 165885, Lockheed California Company, Burbank California, May 1982.

الفصل الثانـي

السلوك الميكانيكي الماكروي لرقاقة

1.2 المدخل

إنّ الأسئلة الأساسية في الميكانيك الماكروي (الماكروي) للرقاقة هي: (1) ما هي مُميّزات الرقاقة؟ و(2) كيف تستجيب الرقاقة للإجهادات المطبَّقة، كما في الشكل 2-1؟ الرقاقة هي تنضيدٌ (ترتيبٌ) مسطَّح (أو منحنٍ، كما هو الحال في التوقعة) يتألَّف من ألياف محورية (وحيدة الاتّجاه) أو ألياف محبوكة مع بعضها البعض ضمن مصفوفة (مادة حاضنة) داعمة لها. وتنطبق المفاهيم التي نتناولها في هذا الفصل على كلا نوعي الرقاقة على حدٍّ سواء، لكننا سوف نعالج بوضوح حالة الرقاقات أحادية المحورة فقط. إنّ الرقاقة هي لبنة البناء الأساسي في المواد المركَّبة الطبقية المقوّاة بالألياف، لذا يُعتبَر معرفة السلوك الميكانيكي للرقاقة أمراً جوهرياً في فهم البنى الطبقية المقوّاة بالألياف.



الشكل 2-1: الأسئلة الأساسية في موضوع الميكانيك العياني الماكروي للرقاقة

ويركِّز هذا الفصل على السلوك الميكانيكي الماكروي، أي السلوك الذي يأخذ بعين الاعتبار الخصائص الميكانيكية الوسطية الظاهرة فقط بدلاً من التأثيرات المتبادلة التفصيلية بين مكوِّنات المادة المركَّبة التي سوف نعالجها في الفصل الثالث. وسيقتصر كلا الفصلين بشكل أساسي على السلوك المرن الخطّي. وفي ما سيأتي، سيتمّ استقصاء كلٍّ من معاملات الجساءة ومقاومات المواد المعقّدة عبر تناول المواد البسيطة.

2.2 علاقات الإجهاد–انفعال للمواد غير متماثلة المناحي

يمكن لقانون هوك (Hooke's law) المعمَّم الذي يربط بين الإجهادات والانفعالات أن يُكتَب بطريقة الترميز المُختزَل، كما يلي:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \qquad i, j = 1,...,6 \tag{2.1}$$

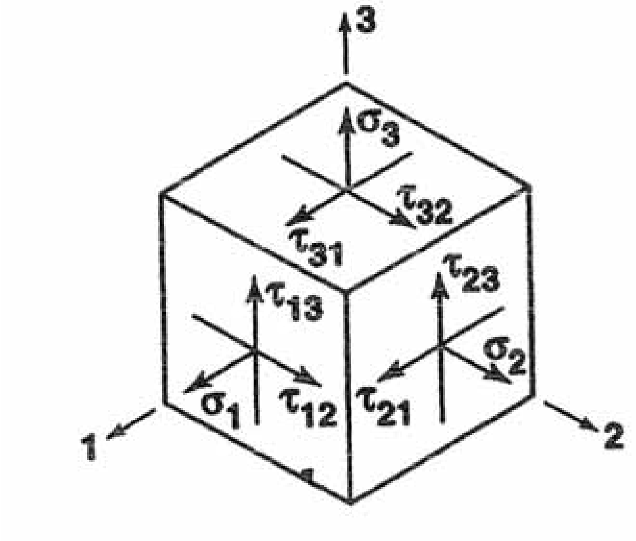
حيث تمثل σ_i مركّبات (Components) الإجهاد الظاهرة على مكعَّب ثلاثي الأبعاد في الإحداثيات x,y,z في الشكل 2–2، و C_{ij} مصفوفة الجساءة، و ε_j مركّبات الانفعال. ويُعرَّف الترميز المُختزَل للانفعالات والإجهادات ثلاثية الأبعاد مقارنةً بترميز الموتِّر أو تنسور (tensor) الاعتيادي في الجدول 2–1 من أجل الأوضاع التي تكون فيها موتِّرات الإجهاد والانفعال متناظرة (وهي الحالة المعتادة عندما تكون قوى الجسم غائبة). لاحظ أنه بفضل الجدول 2–1 يتمّ تعريف الانفعالات كما يلي:

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \varepsilon_3 = \frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.2}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \qquad \gamma_{31} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \qquad \gamma_{12} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

حيث u و v و w هي الانزياحات في الاتجاهات x و y و z (أو الاتجاهات 1 و 2 و 3).

لاحظ أنّ انفعال القصّ الهندسي γ_{ij} في الجدول 2–1 هو إجمالي لزاوية الكلية للقصّ في حالة القصّ البسيط في الشكل 2–3. كذلك، فإنّ موتّر انفعال القصّ ε_{ij} هو نصف زاوية القصّ تحت إجهاد القصّ الصافي في الشكل 2–3. يتضمَّن انفعال القصّ الهندسي دوراناً للعنصر الذي يكون في الأصل مربعاً، بينما لا يمتلك موتِّر انفعال القصّ دوراناً مرافقاً.



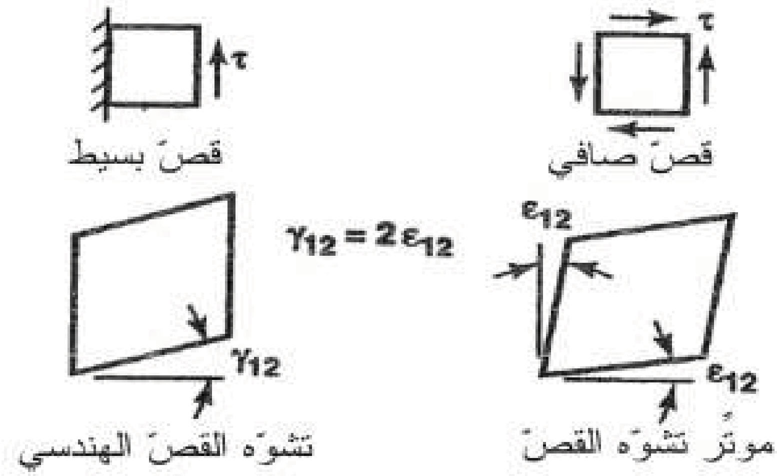
الشكل 2-2: الإجهادات المطبَّقة على عنصرٍ ما

الجدول 2-1 : لترميز المُختزَل مقابل ترميز الموتِّر للإجهادات والانفعالات

التشوّهات		الإجهادات	
الترميز المُختزل	ترميز الموتّر	الترميز المُختزل	ترميز الموتّر
ε_1	ε_{11} (ε_1)	σ_1	σ_{11} (σ_1)
ε_2	ε_{22} (ε_2)	σ_2	σ_{22} (σ_2)
ε_3	ε_{33} (ε_3)	σ_3	σ_{33} (σ_3)
ε_4	$\gamma_{23} = 2\varepsilon_{23}$*	σ_4	$\tau_{23} = \sigma_{32}$
ε_5	$\gamma_{31} = 2\varepsilon_{31}$	σ_5	$\tau_{31} = \sigma_{31}$
ε_6	$\gamma_{12} = 2\varepsilon_{12}$	σ_6	$\tau_{12} = \sigma_{12}$

(*) لاحظ أنّ γ_{ij} يمثل انفعال القصّ الهندسي بينما ε_{ij} (i≠j) يمثّل موتّر انفعال القصّ.

وهذه التمييزات لها أهمية بسيطة في الحسابات الهندسية الاعتيادية، لكنها ذات أهمية حاسمة في ما سيأتي من أمور.



الشكل 2–3: انفعال القصّ الهندسي مقابل موتِّر انفعال القصّ

تتضمن مصفوفة الجساءة C_{ij} 36 ثابتاً في المعادلة (2.1)، لكنّ عدد الثوابت التي يمكن فعلياً إظهار أنها مستقلّة هو أقلّ من 36 بالنسبة إلى المواد المرنة عندما نأخذ باعتبارنا المواصفات الهامة لطاقة الانفعال. وتتمتع المواد المرنة التي تقترن بكمون مرن أو تابع كثافة طاقة انفعال بشغلٍ متزايد في وحدة حجم:

$$dW = \sigma_i d\varepsilon_i \tag{2.3}$$

وذلك عندما تفعل الإجهادات σ_i من خلال الانفعالات $d\varepsilon_i$. ولكن بسبب علاقات الإجهاد–انفعال، المعادلة (2.1)، فإنّ الشغل المتزايد يصبح

$$dW = C_{ij}\sigma_i d\varepsilon_i \tag{2.4}$$

وعند إجراء التكامل لجميع الانفعالات، يكون الشغل في وحدة الحجم:

$$W = \frac{1}{2}C_{ij}\varepsilon_i\varepsilon_j \tag{2.5}$$

لكن قانون هوك، المعادلة (2.1)، يمكن أن تُشتَق من المعادلة (2.5):

$$\frac{\partial W}{\partial\varepsilon_i} = C_{ij}\varepsilon_j \tag{2.6}$$

وهكذا يكون:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_j} = C_{ij} \qquad (2.7)$$

وبشكلٍ مشابه:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_j \partial \varepsilon_i} = C_{ji} \qquad (2.8)$$

ولكنّ ترتيب تفاضل W يعتبر مهملاً، لذلك:

$$C_{ij} = C_{ji} \qquad (2.9)$$

وهكذا نجد أنّ مصفوفة الجساءة متناظرة، وبالتالي يكون 21 فقط من الثوابت مستقلاً.

يمكننا بطريقة مشابهة أن نبيّن أنّ:

$$W = \frac{1}{2} S_{ij} \sigma_i \sigma_j \qquad (2.10)$$

حيث يمثل S_{ij} مصفوفة المطاوعة المعرَّفة بواسطة عكس (inverse) علاقات الإجهاد-انفعال أي بواسطة علاقات الانفعال-إجهاد:

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \qquad i, j = 1, ..., 6 \qquad (2.11)$$

وباتباع طريقة استنتاج شبيهة بما فعلناه في الفقرة السابقة، نصل إلى أنّ:

$$S_{ij} = S_{ji} \qquad (2.12)$$

أي إنّ مصفوفة المطاوعة متناظرة، وعليه يكون فيها 21 ثابتاً مستقلاً فقط. لاحظ هنا أنّ معاملات الجساءة والمطاوعة لا توصف بواسطة ترميز سهل التذكّر، بل يتمّ لسوء الحظ عكسها في الاستعمال الاعتيادي. وسوف يُشار إلى مركّبات الجساءة والمطاوعة كثوابت مرنة (على الرغم من أنها يمكن أن تتعلق بدرجة الحرارة أو محتوى الرطوبة).

مع التخفيض المذكور أعلاه لعدد الثوابت المستقلّة من 36 إلى 21، تُصبح علاقات الإجهاد- انفعال:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.13)$$

أي العلاقة الأكثر عموميةً ضمن إطار المرونة الخطّية. و يُشار في واقع الأمر إلى العلاقات في المعادلة (2.13) على أنها تصف المواد غير متماثلة المناحي (Anisotropic) (غير متماثلة المناحي تعني عدم وجود تماثل مناحي) بسبب غياب مستويات تناظر في خصائص المادة. والتسمية البديلة لمثل هذه المادة غير متماثلة المناحي هي مادة ثلاثية الميل (triclinic) (تكون كل المحاور الثلاثة للمادة مائلة بالنسبة إلى بعضها البعض). وسوف يتمّ وصف المواد التي تتمتع بخاصية تناظر أكثر من المواد غير متماثلة المناحي في الفقرات القليلة التالية. على سبيل المثال، سوف يعطينا تساي (Tsai) [1-2] البرهان على شكل علاقات الإجهاد–انفعال من أجل الحالات المختلفة لخاصية تناظر المادة.

إذا كان لدينا مستوي واحد له خاصية تناظر المادة، فإنّ علاقات الإجهاد–انفعال تُختَصر إلى:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} & 0 \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

حيث يكون مستوي التناظر $z = 0$ (أو المستوي 1-2). وتُسمّى مثل هذه المادة أحادية الميل (monoclinic) ولديها 13 ثابتاً مرناً مستقلاً.

وإذا كان هناك مستويان متعامدان لهما خاصية تناظر المادة لمادة ما، فسوف يوجد تناظر بالنسبة إلى مستوي ثالث متعامد معهما بشكل متبادل. وتكون علاقات الإجهاد– انفعال في الإحداثيات المتراصفة مع اتّجاهات المادة الرئيسية[1] هي:

---

[1] اتّجاهات المادة الرئيسية (Principal Material Directions - PMD) هي الاتّجاهات الموازية لتقاطعات المستويات الثلاثة المتعامدة ذوات خاصية تناظر المادة. وإحداثيات المادة الرئيسية (Principla Material Coordination - PMC) هي مجموعة المحاور في اتّجاهات المادة الرئيسية.

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

ونقول إنها تعرِّف مادة ثلاثية المناحي (orthotropic) . لاحظ أنه لا يوجد تأثير متبادل بين الإجهادات الناظمية (normal) $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ وانفعالات القصّ $\gamma_{23}, \gamma_{31}, \gamma_{12}$ مثلما يحدث في المواد غير متماثلة المناحي (بحكم وجود C_{14} على سبيل المثال). وبشكلٍ مشابه، ليس هناك تأثير متبادل بين إجهادات القصّ والانفعالات الناظمية، وكذلك الأمر بين إجهادات القصّ وانفعالات القصّ في المستويات المختلفة. لاحظ أيضاً أنه لا توجد الآن إلاّ تسعة ثوابت مستقلّة في مصفوفة الجساءة.

إذا وُجد في كل نقطة من مادةٍ ما مستوي واحد تكون فيه الخصائص الميكانيكية متماثلة في كل الاتّجاهات، عندها نطلق على هذه المادة اسم متماثلة المناحي عرضانياً transversely isotropic. وإذا كان – على سبيل المثال– المستوي $2-1$ هو مستوي تماثل المناحي، عندها تكون اللاحقتان السفليتان (subscripts) 1 و 2 على معاملات الجساءة قابلتين للتبادل مع بعضهما البعض. وتمتلك علاقات الإجهاد–انفعال هنا خمسة ثوابت مستقلّة لا غير:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11-}C_{12)}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.16)$$

إذا كان هناك عدد غير محدود من مستويات ذوات خاصية تناظر المادة، عندها تتبسَّط العلاقات المذكورة أعلاه لتصبح علاقات المادة متماثلة المناحي التي لديها ثابتان اثنان مستقلان فقط في مصفوفة الجساءة:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\tau_{23}\\\tau_{31}\\\tau_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{12}&0&0&0\\C_{12}&C_{11}&C_{12}&0&0&0\\C_{12}&C_{12}&C_{11}&0&0&0\\0&0&0&(C_{11}-C_{12})/2&0&0\\0&0&0&0&(C_{11}-C_{12})/2&0\\0&0&0&0&0&(C_{11}-C_{12})/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\gamma_{23}\\\gamma_{31}\\\gamma_{12}\end{bmatrix}$$
(2.17)

نلاحظ علاقات الانفعال – إجهاد لحالات تناظر خصائص المواد الخمس الأكثر شيوعاً في المعادلات (2.18) إلى (2.22):

غير متماثلة المناحي (21 ثابتاً مستقلاً):

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\gamma_{23}\\\gamma_{31}\\\gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}&S_{14}&S_{15}&S_{16}\\S_{12}&S_{22}&S_{23}&S_{24}&S_{25}&S_{26}\\S_{13}&S_{23}&S_{33}&S_{34}&S_{35}&S_{36}\\S_{14}&S_{24}&S_{34}&S_{44}&S_{45}&S_{46}\\S_{15}&S_{25}&S_{35}&S_{45}&S_{55}&S_{56}\\S_{16}&S_{26}&S_{36}&S_{46}&S_{56}&S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\tau_{23}\\\tau_{31}\\\tau_{12}\end{bmatrix}\qquad(2.18)$$

أحادية الميل (13 ثابتاً مستقلاً) (من أجل تناظر حول $Z=0$):

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\gamma_{23}\\\gamma_{31}\\\gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}&0&0&S_{16}\\S_{12}&S_{22}&S_{23}&0&0&S_{26}\\S_{13}&S_{23}&S_{33}&0&0&S_{36}\\0&0&0&S_{44}&S_{45}&0\\0&0&0&S_{45}&S_{55}&0\\S_{16}&S_{26}&S_{36}&0&0&S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\tau_{23}\\\tau_{31}\\\tau_{12}\end{bmatrix}\qquad(2.19)$$

ثلاثية المناحي (9 ثوابت مستقلّة):

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\gamma_{23}\\\gamma_{31}\\\gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}&0&0&0\\S_{12}&S_{22}&S_{23}&0&0&0\\S_{13}&S_{23}&S_{33}&0&0&0\\0&0&0&S_{44}&0&0\\0&0&0&0&S_{55}&0\\0&0&0&0&0&S_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\tau_{23}\\\tau_{31}\\\tau_{12}\end{bmatrix}\qquad(2.20)$$

متماثلة المناحي عرضانياً (5 ثوابت مستقلّة):

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\gamma_{23}\\\gamma_{31}\\\gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{13}&0&0&0\\S_{12}&S_{11}&S_{13}&0&0&0\\S_{13}&S_{13}&S_{33}&0&0&0\\0&0&0&S_{44}&0&0\\0&0&0&0&S_{44}&0\\0&0&0&0&0&2(S_{11}-S_{12})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\tau_{23}\\\tau_{31}\\\tau_{12}\end{bmatrix}\qquad(2.21)$$

حيث يكون المستوي $2-1$ مستوي تناظر تكون فيه معاملات المطاوعة متماثلة المناحي، وفي الاتجاه 3 (العرضاني بالنسبة إلى مستوي التناظر) تكون معاملات المطاوعة مختلفة.

متماثلة المناحي (ثابتان مستقلان اثنان):

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\\\gamma_{23}\\\gamma_{31}\\\gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11}&S_{12}&S_{12}&0&0&0\\S_{12}&S_{11}&S_{12}&0&0&0\\S_{12}&S_{12}&S_{11}&0&0&0\\0&0&0&2(S_{11}-S_{12})&0&0\\0&0&0&0&2(S_{11}-S_{12})&0\\0&0&0&0&0&2(S_{11}-S_{12})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\\sigma_2\\\sigma_3\\\tau_{23}\\\tau_{31}\\\tau_{12}\end{bmatrix}$$

(2.22)

إنّ أحد الأهداف الرئيسية من دراسة علاقات الانفعال – إجهاد هو القدرة على استنتاج ما هي استجابة الانفعال التي تحدث بسبب تطبيق إجهاد معيَّن. ويمكن أن نكتب علاقات الانفعال–إجهاد كما يلي:

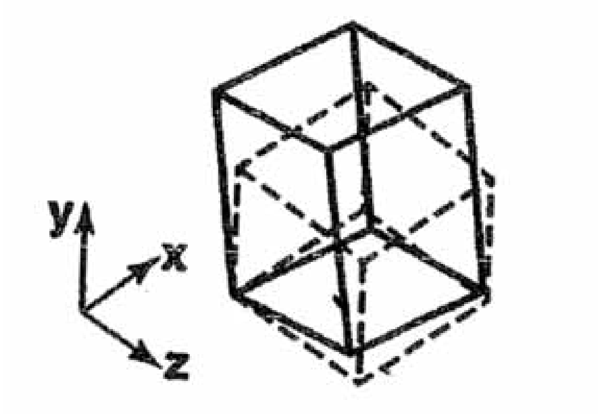
$$\begin{aligned}&\varepsilon_1 = S_{11}\sigma_1 + S_{12}\sigma_2 + S_{13}\sigma_3 + S_{14}\tau_{23} + S_{15}\tau_{31} + S_{16}\tau_{12}\\&\vdots\\&\gamma_{12} = S_{16}\sigma_1 + S_{26}\sigma_2 + S_{36}\sigma_3 + S_{46}\tau_{23} + S_{56}\tau_{31} + S_{66}\tau_{12}\end{aligned} \qquad (2.23)$$

ووفقاً لذلك، من أجل إجهاد أحادي المحور مُطبَّق $\sigma_1 = \sigma$ (جميع الإجهادات الأخرى تساوي الصفر):

$$\begin{aligned}&\varepsilon_1 = S_{11}\sigma \qquad \varepsilon_2 = S_{12}\sigma \qquad \varepsilon_3 = S_{13}\sigma\\&\gamma_{23} = S_{14}\sigma \qquad \gamma_{31} = S_{15}\sigma \qquad \gamma_{12} = S_{16}\sigma\end{aligned} \qquad (2.24)$$

والتفسير الفيزيائي لهذه الانفعالات هو أنّ المكعب الذي يكون في الأصل ذا أضلاع متساوية لديه عدة تشويهات. وعلى وجه الخصوص، فإنّ كل ضلع ينفعل في طوله بشكل مختلف عن أيّ ضلع آخر (لأنّ $S_{11} \neq S_{12} \neq S_{13}$)، وكل ضلع من المكعَّب يخضع إلى تشويه قصّ مختلف (لأنّ $S_{14} \neq S_{15} \neq S_{16}$)، كما يظهر بصورة غير كاملة في الشكل 2–4، حيث تمثّل الخطوط المتقطّعة المكعَّب غير المنفعل بينما تمثِّل الخطوط المستمرة المكعَّب المنفعل.

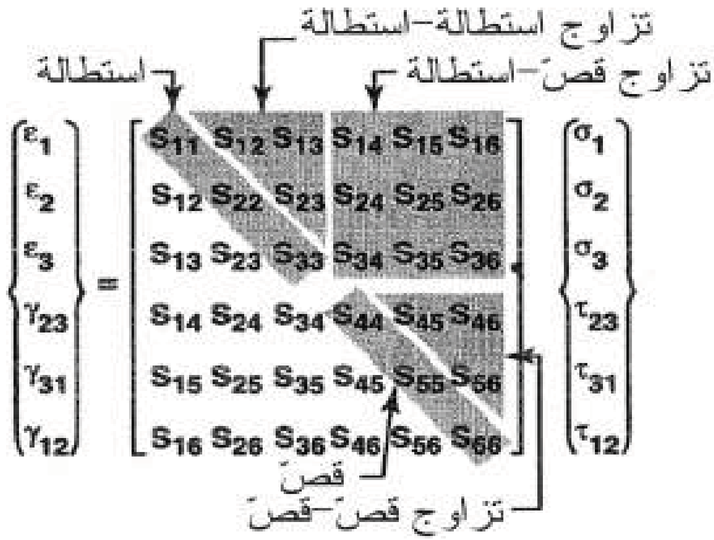
حاول أن تتصوَّر نفسك في غرفة تخضع إلى هذه التشويهات! بالمقابل، سوف يكون للمادة متماثلة المناحي نفس التغيّر في طول الضلع في الاتجاهين 2 و3 (لأ نّ $S_{12} = S_{13}$) ولا يكون لها أيّ تشويه قصّ في أيٍّ من الأضلاع (لأنّ $S_{14} = S_{15} = S_{16} = 0$). وهكذا، يحدث – من أجل المادة غير متماثلة المناحي– إقران مهمّ بين الإجهاد المطبَّق ومختلف استجابات الانفعال.



الشكل 2-4: تشويه مكعَّب غير متماثل المناحي تحت σ_y

تظهر تلك الإقرانات المختلفة من أجل جسم مُجهَد اعتباطياً في الشكل 2-5 حيث تمَّ تمييز (labeled) الدلالة الفيزيائية لكل معامل مطاوعة. وهنا، يمثِّل كلٌّ من المصطلحات S_{11},S_{22},S_{33} استجابة استطالية لإجهاد منفرد مطبَّق $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$ على التوالي، في نفس الاتجاه. وتمثِّل المصطلحات S_{44},S_{55},S_{66} استجابة انفعال قصّ لإجهاد قصّ مطبَّق في نفس المستوي. وتمثِّل المصطلحات S_{12},S_{13},S_{23} الإقران بين الإجهادات الناظمية المتباينة والانفعالات الناظمية (إقران استطالة–استطالة المعروف بشكل أكثر شيوعاً باسم تأثير بواسون Poisson effect). أمّا المصطلحات S_{34},S_{35},S_{36} $S_{14},S_{15},S_{16},S_{24},S_{25},S_{26}$، فتمثِّل استجابة الانفعال الناظمي لإجهاد قصّ مُطبَّق بطريقة معقَّدة أكثر ممّا هو حاصل بالنسبة إلى المعاملات المطاوعات السابقة (إقران قصّ–استطالة). وأخيراً، تمثِّل المصطلحات S_{45},S_{16},S_{56} استجابة انفعال قصّ لإجهاد قصّ مُطبَّق في مستوي آخر (إقران قصّ–قصّ). بالمقابل، فالإقران الوحيد الذي يوجد بالنسبة إلى المادة متماثلة المناحي هو إقران استطالة–استطالة. وهكذا، فإنّ استجابة الانفعال في مادة غير متماثلة المناحي – حتى في حالات الإجهاد البسيط– يمكن أن تكون حرفياً في أيّ اتّجاه وفي أيّ مستوي. وسوف نرى في المقطع 6.2 أنّ المواد ثلاثية المناحي تستطيع أن تبدي عدم تماثل مناحي ظاهري عندما تُجهَد وفق إحداثيات المادة غير الرئيسية. علاوةً على ذلك، سوى نرى أنّ S_{11},S_{22},S_{33} تتعلَّق بمُعامِلات يونغ في الاتجاهات 1 و2 و3 على الترتيب. كذلك، ستكون S_{12},S_{13},S_{14} متعلِّقة بنسب بواسون

ومُعامِلات يونغ. وأخيراً ستكون S_{44},S_{55},S_{66} متعلِّقة بمُعامِلات القصّ في المستويات 2−3 و3−1 و1−2 على التوالي.



الشكل 2−5: الدلالة الفيزيائية للعلاقات انفعال− إجهاد غير متماثلة المناحي

3.2 معاملات الجساءات والمطاوعة والثوابت الهندسية في المواد ثلاثية المناحي

إنّ الثوابت الهندسية (التي تُعرَف أحياناً باسم الثوابت التقنية) هي مُعامِلات يونغ المعمَّمة ونسب بواسون ومُعامِلات القصّ، بالإضافة إلى بعض ثوابت السلوك الأخرى التي سندرسها في الفقرة 6.2. ويتمّ قياس هذه الثوابت بواسطة اختبارات بسيطة مثل اختبارات الشدّ أحادي المحور أو القصّ الصافي. وهكذا، يكون لهذه الثوابت مع تفسيرها الفيزيائي الواضح معنىً مباشرٌ أكثر من مركّبات مصفوفات الجساءة والمطاوعة (compliance) التجريدية نسبياً التي استُخدمت في المقطع 2.2.

تُجرى معظم الاختبارات البسيطة لتوصيف المواد بواسطة حمل أو إجهاد معلوم، ويُقاس بعد ذلك الانفعال أو الانزياح الناتج. وبشكل عامّ، تساوي الثوابت الهندسية ميل

منحني الإجهاد–انفعال (على سبيل المثال $E=\sigma/\varepsilon$) أو ميل منحني انفعال – انفعال (على سبيل المثال $\nu=-\varepsilon_y/\varepsilon_x$ من أجل $\sigma_x=\sigma$ وجميع الإجهادات الأخرى تساوي الصفر). وهكذا، تُحدَّد مركّبات مصفوفة المطاوعة (S_{ij}) بشكل أكثر مباشرةً من مركّبات مصفوفة الجساءة (C_{ij}). ومن أجل مادة ثلاثية المناحي، تكون مركّبات مصفوفة المطاوعة بدلالة الثوابت الهندسية

$$\left[S_{ij}\right]=\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{31}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \tag{2.25}$$

حيث

E_1,E_2,E_3 = مُعاملات يونغ (الاستطالة) في الاتجاهات 1 و2 و3

ν_{ij} = نسب بواسون (مُعاملات إقران استطالة–استطالة)، أي القيمة السالبة للانفعال العرضاني في الاتجاه j على الانفعال في الاتجاه i عندما يُطبَّق الإجهاد وفق الاتجاه i، وهذا يعني:

$$\nu_{ij}=-\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \tag{2.26}$$

من أجل $\sigma_1=\sigma$ وجميع الإجهادات الأخرى تساوي الصفر

G_{12},G_{31},G_{23} = مُعاملات القصّ في المستويات 2–3 و3–1 و1–2

لاحظ أنّ المادة ثلاثية المناحي (Orthotropic) التي تُجهَد في إحداثيات المادة الرئيسية (الإحداثيات 1 و2 و3) لا تبدي إقران قصّ–استطالة، ولا إقران قصّ – قصّ. وتذكَّر أنّ المادة ثلاثية المناحي لديها تسعة ثوابت مستقلّة نظراً إلى كون:

$$S_{ij} = S_{ji} \qquad (2.27)$$

وأنّ مصفوفة المطاوعة هي مقلوب مصفوفة الجساءة (C_{ij}) التي تبين أنها متناظرة في المعادلة (2.9). وعندما نعوِّض الثوابت الهندسية في المعادلة (2.27) نحصل على:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \qquad i, j = 1,2,3 \qquad i \neq j \qquad (2.28)$$

وهكذا، يجب تحقّق ثلاث علاقات عكوسة (Reciprocal) في المادة ثلاثية المناحي. إضافةً إلى ذلك، لا نحتاج إلى أن نأخذ بعين الاعتبار لاحقاً سوى $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ فقط لأنّ $\nu_{21}, \nu_{31}, \nu_{32}$ يمكن التعبير عنها بواسطة المجموعة المذكورة – أولاً من نسب بواسون ومُعامِلات يونغ. ولكن يجب ألاّ ننسى المجموعة التالية من نسب بواسون، لأنها تكون في بعض الاختبارات هي ما يتمّ قياسه في الواقع الفعلي.

يتم تأكيد الفارق ما بين ν_{12} و ν_{21} بالنسبة إلى مادة ثلاثية المناحي بمساعدة الشكل 2–6 حيث تظهر حالتان من الإجهاد أحادي المحور من أجل عنصر مربَّع. في الحالة الأولى، يُطبَّق الإجهاد في الاتجاه 1 في الشكل 2–6، وعند ذلك، واستناداً إلى المعادلتين (2-20) و (2-25) تكون الانفعالات:

$${}^{1}\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E_1} \qquad {}^{1}\varepsilon_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma \qquad (2.29)$$

حيث يُشار إلى اتجاه التحميل بواسطة اللاحقة العليا (Superscripts) السابقة للحرف، ويُشار إلى اتجاهات الانفعال والانفعال بواسطة اللاحقات السفلية (Subescripts)، وتكون الانفعالات:

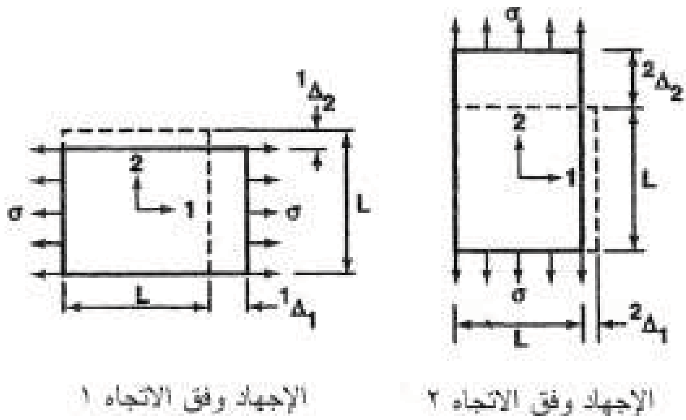
$${}^{1}\Delta_1 = \frac{\sigma L}{E_1} \qquad {}^{1}\Delta_2 = -\frac{\nu_{12}}{E_1}\sigma L \qquad (2.30)$$

وفي الحالة الثانية، تُطبَّق نفس القيمة من الإجهاد في الاتجاه 2 في الشكل 2–6، وتكون الانفعالات:

$${}^{2}\varepsilon_1 = -\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma \qquad {}^{2}\varepsilon_2 = \frac{\sigma}{E_2} \qquad (2.31)$$

وتكون الانفعالات

$$^{2}\Delta_1=\frac{\nu_{21}}{E_2}\sigma L \qquad ^{2}\Delta_2=\frac{\sigma L}{E_2} \qquad (2.32)$$



الشكل 2-6: التمييز ما بين ν_{12} و ν_{21}

من الواضح أنه في حال كان $E_1 > E_2$ كما هي حالة رقاقة مقوّاة بالألياف بالاتجاه 1، فعندها يكون $\Delta_1 < \Delta_2$ كما سنتوقَّع نظراً إلى كون الرقاقة أكثر جساءةً في الاتجاه 1 منها في الاتجاه 2. ولكن بسبب العلاقات العكسية – وبغضّ النظر عن قيمتي E_1 و E_2 – يكون:

$$^{1}\Delta_2 = {}^{2}\Delta_1 \qquad (2.33)$$

وهو تعميم واضح لقانون بيتي Betti's law من أجل معالجة الأجسام ثلاثية المناحي. وهذا يعني أنّ الانفعال العرضاني (والانفعال العرضاني) يكون نفسه عندما يُطبَّق الإجهاد وفق الاتجاه 2 وعندما يُطبَّق وفق الاتجاه 1. ومن الجليّ أنّ ν_{12} ليس على الإطلاق مطابقاً لـــ ν_{21}.

حيث إنّ مصفوفات الجساءة والمطاوعة هي مقلوبة لبعضها البعض بشكل متبادل، فإنه ينتج استناداً إلى جبر المصفوفات أنّ مركّباتها تتعلَّق ببعضها البعض من أجل المواد ثلاثية المناحي كما يلي:

$$C_{11}=\frac{S_{22}S_{33}-S_{23}^{2}}{S}\qquad C_{12}=\frac{S_{13}S_{23}-S_{12}S_{33}}{S}\qquad C_{13}=\frac{S_{12}S_{23}-S_{13}S_{22}}{S}$$

$$C_{22}=\frac{S_{33}S_{11}-S_{13}^{2}}{S}\qquad C_{23}=\frac{S_{12}S_{13}-S_{23}S_{11}}{S}\qquad C_{33}=\frac{S_{11}S_{22}-S_{12}^{2}}{S}$$

$$C_{44}=\frac{1}{S_{44}}\qquad C_{55}=\frac{1}{S_{55}}\qquad C_{66}=\frac{1}{S_{66}}\qquad (2.34)$$

حيث:

$$S=S_{11}S_{22}S_{33}-S_{11}S_{23}^{2}-S_{22}S_{13}^{2}-S_{33}S_{12}^{2}+2S_{12}S_{23}S_{13}\qquad (2.35)$$

في المعادلة (2.34)، يمكن إجراء التبديل بين الرموز C و S في جميع الأمكنة للحصول على العلاقة المعكوسة.

يمكن الحصول على مصفوفة الجساءة C_{ij} من أجل مادة ثلاثية المناحي بدلالة الثوابت الهندسية عن طريق قلب مصفوفة المطاوعة S_{ij} في المعادلة (2.25) أو بواسطة التعويض في المعادلتين (2.34) و (2.35). وتكون معاملات الجساءة غير المساوية للصفر في المعادلة (2.15):

$$C_{11}=\frac{1-\nu_{23}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}\qquad C_{22}=\frac{1-\nu_{13}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}$$

$$C_{12}=\frac{\nu_{21}+\nu_{31}\nu_{23}}{E_2E_3\Delta}=\frac{\nu_{12}+\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_3\Delta}\qquad C_{23}=\frac{\nu_{32}+\nu_{12}\nu_{31}}{E_1E_3\Delta}=\frac{\nu_{23}+\nu_{21}\nu_{13}}{E_1E_2\Delta}$$

$$C_{13}=\frac{\nu_{31}+\nu_{21}\nu_{32}}{E_2E_3\Delta}=\frac{\nu_{13}+\nu_{12}\nu_{23}}{E_1E_2\Delta}\qquad C_{33}=\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}}{E_1E_2\Delta}$$

$$C_{44}=G_{23}\qquad C_{55}=G_{31}\qquad C_{66}=G_{12}\qquad (2.36)$$

حيث:

$$\Delta=\frac{1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13}}{E_1E_2E_3}\qquad (2.37)$$

حيث تكون Δ مطابقة لـــ S في المعادلة (2.35).

لاحظ بصورة خاصة أنه عند الاشتباه بأن مادة ما تكون ثلاثية المناحي، فإنّ الاختبارات الميكانيكية وفق الزوايا المختلفة سوف تكشف ما إذا كانت هناك إحداثيات لا يوجد فيها إقران قصّ–استطالة. ومن هنا، يمكن تحديد التماثل المناحي أو ثلاثية المناحي أو افتقاد أيٍّ منهما، وإن كان ذلك يتطلَّب في بعض الأحيان كلفة هامة. وتعتبر الملاحظة البصرية الطريقة الأسهل لتحديد الاتجاهات الرئيسية للمادة. وكي تكون هذه الطريقة ناجعة، يجب أن تكون مميزات المادة قابلة للرؤية بوضوح بواسطة العين المجرَّدة. وعلى سبيل المثال، في الرقاقة المقوّاة بالألياف المصنوعة من شريط إيبوكسي بورون في الشكل 1–10، يتحدَّد حالاً الاتجاه الطولاني (ويتمّ تعريفه) على أنه الاتّجاه 1 وفق طول الألياف. وبشكل مشابه، يكون الاتجاه 2 هو الاتجاه العرضاني في مستوي الشريط بالنسبة إلى الاتجاه الطولاني. وأخيراً، يتمّ تعريف الاتجاه 3 بأنه الاتجاه العمودي على مستوي الشريط.

4.2 القيود على الثوابت الهندسية

1.4.2 المواد متماثلة المناحي

في المواد متماثلة المناحي (Isotropic)، يجب تحقّق علاقات معيّنة بين الثوابت الهندسية. فمثلاً، يُعرَّف مُعامِل القصّ بواسطة مُعامِل المرونة E ونسبة بواسون ν، كما يلي:

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \qquad (2.38)$$

وهكذا، لكي يكون E و G إيجابيين دائماً، أي إن إجهاداً ناظمياً إيجابياً أو إجهاد قصّ مضروباً بالانفعال الناظمي الإيجابي الموافق أو بانفعال القصّ يُنتج شغلاً إيجابياً:

$$\nu > -1 \qquad (2.39)$$

وبطريقة مشابهة، إذا تعرَّض جسم متماثل المناحي إلى ضغط متساوي من جميع الاتجاهات (هيدروستاتيكي) p أي $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$، فعندها يكون الانفعال الحجمي – مجموع انفعالات الاستطالة أو الناظمية الثلاثة (التقريب من المرتبة الأولى للتغيّر الحجمي)– هو:

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{p}{E/3(1-2\nu)} = \frac{p}{K} \qquad (2.40)$$

حيث K هو المُعامل الحجمي:

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \qquad (2.41)$$

وبالتالي يكون K إيجابياً فقط إذا كان E إيجابياً و:

$$\nu < \frac{1}{2} \qquad (2.42)$$

وإذا كان المُعامِل الحجمي سلبياً، فسوف يسبِّب الضغط المتساوي تمدّدَ مكعبٍ من المادة متماثلة المناحي! أخيراً، تنحصر نسبة بواسون للمواد متماثلة المناحي ضمن المجال:

$$-1 > \nu > \frac{1}{2} \qquad (2.43)$$

وهكذا لا ينتج الحمل المتساوي من جميع الاتجاهات أو القصّ طاقة انفعال سالبة.

2.4.2 المواد ثلاثية المناحي أو المستعمدة

في ما يخص المواد ثلاثية المناحي (orthotropic)، تكون العلاقات بين الثوابت الهندسية أكثر تعقيداً. ويجب تحرّي هذه العلاقات بشكل صارم من أجل تجنّب الشراك التي تنجم عن استخدام الحدس المبني على قاعدة التعامل مع المواد متماثلة المناحي. في البداية، يمثِّل حاصل جداء الإجهاد مع الانفعال الموافق له الشغل المبذول عن طريق ذلك الإجهاد. ويجب أن يكون مجموع الأشغال المبذولة عن طريق كل الإجهادات موجباً كي نتجنَّب خلق الطاقة. ويضع هذا الشرط الأخير قيداً ترموديناميكياً على القيم التي تأخذها الثوابت الهندسية. وما تمَّ إنجازه سابقاً في حالة المواد متماثلة المناحي هو – في حقيقة الأمر– نتيجة ناجمة عن مثل هذا القيد. ولقد تمّ تعميم القيد من أجل المواد ثلاثية المناحي من قبل ليمبريير (Lempriere) [2–2]. ولقد بيّن ليمبريير بشكلٍ منهجي أنّ المصفوفات التي تربط ما بين الإجهاد والانفعال يجب أن تكون موجبة – محدَّدة، وهذا يعني أن تتمتع بقيّم رئيسية موجبة أو لا متغيرة. وهكذا، يجب أن تكون كلٌّ من مصفوفات الجساءة والمطاوعة موجبة–محدَّدة.

يمكن أن يستبدل بهذا الشرط الرياضياتي الحجة الفيزيائية الآتية. إذا تمَّ تطبيق إجهاد ناظمي واحد فقط في كلّ مرة، فإنّ الانفعال الموافق يُحدَّد بواسطة العناصر القطرية لمصفوفة المطاوعة. وهكذا، يجب أن تكون تلك العناصر موجبة، أي إنّ:

$$S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{44}, S_{55}, S_{66} > 0 \qquad (2.44)$$

أو باستخدام لغة الثوابت الهندسية:

$$E_1, E_2, E_3, G_{23}, G_{31}, G_{12} > 0 \qquad (2.45)$$

وبطريقة مشابهة، نجد أنّه تحت قيود مناسبة، يكون الانفعال ممكناً بحيث ينشأ أو يُطبَّق فيه انفعال استطالة واحد فقط. ومن جديد، ينتج الشغل عن الإجهاد الموافق وحده، وبالتالي – ونظراً إلى أنّ الشغل المبذول يُحدَّد بواسطة العناصر القطرية لمصفوفة الجساءة– فإنّ تلك العناصر يجب أن تكون موجبة، أي أنّ:

$$C_{11}, C_{22}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66} > 0 \qquad (2.46)$$

وعليه، ومن المعادلة 34.2 يكون:

$$(1-\nu_{23}\nu_{32}) > 0 \qquad (1-\nu_{13}\nu_{31}) > 0 \qquad (1-\nu_{12}\nu_{21}) > 0 \quad (2.47)$$

و:

$$\overline{\Delta} = 1-\nu_{12}\nu_{21}-\nu_{23}\nu_{32}-\nu_{31}\nu_{13}-2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} > 0 \qquad (2.48)$$

لأنّ معيِّن (Determinant) المصفوفة يجب أن يكون موجباً حتى تكون هذه المصفوفة موجبة–محدَّدة. كذلك، من المعادلة 34-2 تقود الطبيعة الموجبة لمعاملات الجساءات إلى:

$$|S_{23}| < \sqrt{S_{22}S_{33}} \qquad |S_{13}| < \sqrt{S_{11}S_{33}} \qquad |S_{12}| < \sqrt{S_{11}S_{22}} \qquad (2.49)$$

استعملْ شرط تناظر المطاوعة، أي المعادلة 12-2، بالشكل التالي:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \qquad i, j = 1, 2, 3 \qquad (2.50)$$

كي تكتب شروط المعادلة (47.2) كما يلي:

$$|\nu_{21}| < \sqrt{\frac{E_2}{E_1}} \qquad |\nu_{32}| < \sqrt{\frac{E_3}{E_2}} \qquad |\nu_{13}| < \sqrt{\frac{E_1}{E_3}}$$

$$|\nu_{12}| < \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \qquad |\nu_{23}| < \sqrt{\frac{E_2}{E_3}} \qquad |\nu_{31}| < \sqrt{\frac{E_3}{E_1}} \qquad (2.51)$$

يمكن أيضاً الحصول على المعادلات (2.51) من المعادلات (2.49) إذا تمَّ استبدال تعريفات الـــ S_{ij} بدلالة الثوابت الهندسية. وبطريقة مشابهة يمكن أن نعبِّر عن المعادلة (2.48) كما يلي:

$$\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} < \frac{1-\nu_{21}^2\dfrac{E_1}{E_2}-\nu_{32}^2\dfrac{E_2}{E_3}-\nu_{13}^2\dfrac{E_3}{E_1}}{2} < \frac{1}{2} \qquad (2.52)$$

ويمكن أن يُعاد تنظيمها من جديد لتصبح:

$$\left[1-\nu_{32}^2\frac{E_2}{E_3}\right]\left[1-\nu_{13}^2\frac{E_3}{E_1}\right]-\left[\nu_{21}\sqrt{\frac{E_1}{E_2}}+\nu_{32}\nu_{13}\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right]^2 > 0 \qquad (2.53)$$

من أجل الحصول على قيد على نسبة بواسون واحدة، ν_{21}، بواسطة استخدام نسبتين أخريين، ν_{32} و ν_{13}، يمكن أن يُعاد ترتيب المعادلة (2-53) أيضاً على الشكل التالي:

$$\begin{gathered}-\left[\nu_{32}\nu_{13}\frac{E_2}{E_1}+\sqrt{1-\nu_{32}^2\frac{E_2}{E_3}}\sqrt{1-\nu_{13}^2\frac{E_3}{E_1}}\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right]\\ <\nu_{21}< \\ -\left[\nu_{32}\nu_{13}\frac{E_2}{E_1}-\sqrt{1-\nu_{32}^2\frac{E_2}{E_3}}\sqrt{1-\nu_{13}^2\frac{E_3}{E_1}}\sqrt{\frac{E_2}{E_1}}\right]\end{gathered} \qquad (2.54)$$

ويمكن الحصول على معادلات مشابهة من أجل ν_{32} و ν_{13}.

تُستعمَل القيود سابقة الذكر على الثوابت الهندسية بالنسبة إلى المواد ثلاثية المناحي من أجل فحص المعطيات التجريبية كي نرى إن كانت متّسقة فيزيائياً ضمن إطار نموذج المرونة الرياضية. في حالة المواد المركَّبة من إيبوكسي بورون، قام ديكرسون ودي مارتينو (Dickerson and DiMartino) [2–3] بقياس نسب بواسون مرتفعة إلى حدّ 1.97 من أجل القيمة السالبة للانفعال في الاتجاه 2 على الانفعال في الاتجاه 1 الناجم عن تحميل في الاتجاه 1 (ν_{12}). وتكون القيم المُعلَن عنها لمُعامِلات يونغ من أجل الاتجاهين الاثنين E_1=11.86 × 10^6 psi (81.77 Gpa) و 10^6× E_2= 1.33 (9.17 GPa). وهكذا يكون:

$$\sqrt{\frac{E_1}{E_2}} = 2.99 \qquad (2.55)$$

(وهي أكبر إلى حدٍّ بعيد من قيمة الواحد من أجل المادة متماثلة المناحي)، ويكون الشرط:

$$|\nu_{12}| < \sqrt{\frac{E_1}{E_2}} \qquad (2.56)$$

متحقِّقاً. ووفقاً لذلك، فإنّ $\nu_{12}=1.97$ هو رقم معقول، حتى لو كان حدسنا المعتمد على المواد متماثلة المناحي ($\nu < 1/2$) يرفض هكذا عدداً كبيراً. لم تكُن المعطيات المُعلَن عنها كافية من أجل التحقّق من شرط المعيِّن، أي المعادلة (2-48)، الذي يمكن أن يكون أكثر تشدّداً. كذلك كانت نسبة بواسون "المعكوسة" (converse) (أو الصغرى minor) ν_{21} المُعلَن عنها مساوية 0.22، وهذه القيمة تحقِّق العلاقات العكسية في المعادلة (2-50).

إذا كانت الخصائص المقاسة للمادة تفي بالقيود الواردة في هذا المقطع، فعندها نستطيع أن نمشي قُدُماً بكل ثقة نحو تصميم البنى بواسطة هذه المادة. أمّا إذا لم يتحقَّق ذلك، فلنا كل الحقّ بأن نشكّ إمّا بنموذج المادة أو بالمعطيات التجريبية أو بكليهما!

يمكن أيضاً أن تُستخدَم القيود على الثوابت الهندسية في حلّ مسائل التحليل الهندسي الشغلية. فعلى سبيل المثال، لنأخذ بعين الاعتبار معادلة تفاضلية لديها عدة حلول تعتمد على القيم النسبية للمُعامِلات في المعادلة التفاضلية. تتضمَّن تلك المُعامِلات في مسألة فيزيائية عن انفعال جسمٍ ما ثوابتَ المرونة. يمكن للقيود على ثوابت المرونة حينئذٍ أن تُستخدَم في تحديد أيٍّ من حلول المعادلة التفاضلية هو القابل للتطبيق.

مجموعة المسائل 4.2

2. 4. 1 بيِّن أنّ عدم تساوي (متراجحة) المعيِّن في المعادلة (2.48) من أجل المواد ثلاثية المناحي تُختزَل بشكل صحيح إلى $\nu < 1/2$ من أجل المواد متماثلة المناحي.

2. 4. 2 اشتق المعادلة (2.52) من متراجحة المعيِّن في المعادلة (2.48).

2. 4. 3 اشتق المعادلة (2.52) من المعادلة (2.48).

2. 4. 4 اشتق المعادلة (2.53) من المعادلة (2.52).

2. 4. 5 بيّن أنّ المعادلة (2.54) تُختزَل من أجل المواد متماثلة المناحي إلى حدود معروفة على الـــ ν .

5.2 علاقات الإجهاد–انفعال للإجهاد المستوي في مادة ثلاثية المناحي

من أجل رقاقة مقوّاة محورياً في المستوي 1–2 كما في الشكل 2–7 أو رقاقة محيكة، كما في الشكل 2–1، تُعرَّف حالة الإجهاد المستوي بواسطة:

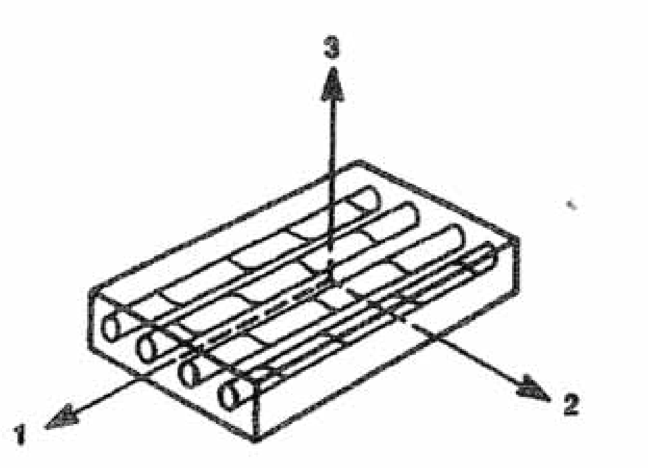
$$\sigma_3 = 0 \qquad \tau_{23} = 0 \qquad \tau_{31} = 0 \qquad (2.57)$$

وهكذا يكون:

$$\sigma_1 \neq 0 \qquad \sigma_2 \neq 0 \qquad \tau_{12} \neq 0 \qquad (2.58)$$

في علاقات الإجهاد–انفعال ثلاثية الأبعاد المُعطاة في المعادلات (2.18)–(2.22) من أجل المواد غير متماثلة المناحي أو أحادية الميل أو ثلاثية المناحي أو متماثلة المناحي عرضانياً أو متماثلة المناحي. لاحظ أنّ حالة الإجهاد المستوي على رقاقة ليست مجرَّد إضفاء للمثالية على الواقع الفعلي، بل هي بالعكس هدف عملي وقابل للتحقيق بخصوص الكيفية التي يجب أن نستعمل بها رقاقة ذات ألياف في مستويها. وفي نهاية الأمر، لا تستطيع الرقاقة أن تتحمل إجهادات عالية في أيّ اتجاه عدا اتجاه الألياف، لذلك ما هو الداعي كي نعرِّضها إلى إجهادات غير طبيعية مثل σ_3؟ وهذا يعني أننا نتوقّع تحميل الرقاقة إجهاداً في المستوي فقط، لأنّ تحمُّل الإجهادات في المستوي هو ما تقدر عليه بشكل أساسي. وسوف تحتاج الرقاقة المقوّاة محورياً (unidirectinal reinforced lamina) إلى "مساعدة" في حمل إجهاد في مستوي عمودي على اتجاه أليافها، ولكن هذه المساعدة يمكن تأمينها بواسطة طبقات (موازية) أخرى تكون أليافها في نفس اتجاه الإجهاد.

وهكذا نحتاج إلى صفيحة طبقية ذات رقاقات، لكننا في هذا الفصل نركِّز على خصائص الرقاقة. وضمن الأمثلة الشغلية على العناصر الإنشائية التي تتلقّى حمولات في مستوي، نجد معظم ألواح أجسام السيارات وأجنحة الطائرات وأجسامها... الخ.



الشكل 2-7: رقاقة مقوّاة محورياً (باتجاه واحد)

في المواد ثلاثية المناحي، يؤدي فرض حالة إجهاد مستوي إلى انفعالات ضمنية خارجة-عن-المستوي هي:

$$\varepsilon_3 = S_{13}\sigma_1 + S_{23}\sigma_2 \qquad \gamma_{23} = 0 \qquad \gamma_{31} = 0 \qquad (2.59)$$

حيث:

$$S_{13} = -\frac{\nu_{13}}{E_1} = -\frac{\nu_{31}}{E_3} \qquad S_{23} = -\frac{\nu_{23}}{E_2} = -\frac{\nu_{32}}{E_3} \qquad (2.60)$$

علاوةً على ذلك، تُختزَل علاقات الانفعال-إجهاد في المعادلة (2.20) إلى:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.61)$$

وتُلحَق بها المعادلة (2.59) حيث:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \qquad S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \qquad S_{22} = \frac{1}{E_2} \qquad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \qquad (2.62)$$

لاحظ أنه من أجل تعيين ε_3 في المعادلة (2.59)، يجب أن يكون ν_{13} و ν_{23} معروفين بالإضافة إلى الثوابت الهندسية في المعادلة (2.62). وهذا يعني أنّ ν_{13} و ν_{23} ينجمان عن S_{13} و S_{23} في المعادلة (2.59).

يمكن قلب علاقات الانفعال−إجهاد في المعادلة (2.61) للحصول على علاقات الإجهاد− انفعال:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.63)$$

حيث تُمثِّل Q_{ij} ما يُسمَّى معاملات الجساءة المُختزَلة من أجل حالة إجهاد مستوي في المستوي 1−2 التي يتمّ تعيينها إمّا (1) كمركبّات لمقلوب مصفوفة المطاوعة في المعادلة (2.61) أو (2) من الـــ C_{ij} مباشرةً بواسطة تطبيق الشرط $\sigma_3 = 0$ على علاقات الانفعال− إجهاد للحصول على علاقة ε_3 وتبسيط النتائج للحصول على:

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3}C_{j3}}{C} \qquad \text{i,j=1,2,6} \qquad (2.64)$$

إنّ المصطلح C_{63} يساوي الصفر، لأنه لا يوجد أيّ إقران قصّ− استطالة من أجل رقاقة ثلاثية المناحي في إحداثيات المادة الرئيسية. ومن أجل الرقاقة ثلاثية المناحي تكون الـــ Q_{ij}:

$$Q_{11} = \frac{S_{22}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \qquad Q_{22} = \frac{S_{11}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2}$$
$$Q_{12} = \frac{S_{12}}{S_{11}S_{22} - S_{12}^2} \qquad Q_{66} = \frac{1}{S_{66}} \qquad (2.65)$$

أو باستخدام مصطلحات الثوابت الهندسية:

$$Q_{11} = \frac{E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \qquad Q_{22} = \frac{E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$$
$$Q_{12} = \frac{\nu_{12}E_2}{1-\nu_{12}\nu_{21}} = \frac{\nu_{21}E_1}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \qquad Q_{66} = G_{12} \qquad (2.66)$$

لاحظ أنه يوجد أربع خصائص مستقلّة للمادة E_1 و E_2 و ν_{12} و G_{12} في المعادلتين (2.61) و(2.63) عندما نأخذ بعين الاعتبار المعادلتين (2.62) و (2.66) بالإضافة إلى العلاقة العكسية:

$$\frac{\nu_{12}}{E_1}=\frac{\nu_{21}}{E_2} \qquad (2.67)$$

إنّ علاقات الإجهاد- انفعال والانفعال- إجهاد السابق ذكرها هي القاعدة لتحليل جساءة وإجهاد رقاقة مفردة تتعرَّض إلى قوى في نفس مستويها. وبالتالي فهذه العلاقات لا يمكن الاستغناء عنها في تحليل الصفيحة الطبقية.

من أجل الإجهاد المستوي على المواد متماثلة المناحي، تكون علاقات الانفعال- إجهاد:

$$\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12} & 0\\ S_{12} & S_{11} & 0\\ 0 & 0 & 2(S_{11}-S_{12})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix} \qquad (2.68)$$

التي يكون فيها:

$$S_{11}=\frac{1}{E} \qquad S_{12}=-\frac{\nu}{E} \qquad (2.69)$$

وتكون علاقات الإجهاد- انفعال:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{11} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \qquad (2.70)$$

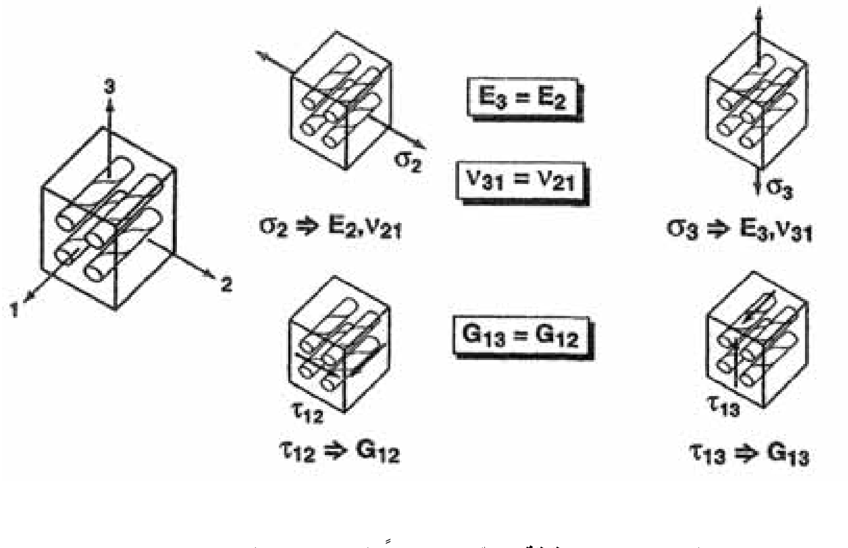
حيث:

$$Q_{11}=\frac{E}{1-\nu^2} \qquad Q_{12}=\frac{\nu E}{1-\nu^2} \qquad Q_{66}=\frac{E}{2(1+\nu)}=\mathrm{G} \qquad (2.71)$$

إنّ العلاقات متماثلة المناحي سالفة الذكر يمكن أن تُستخلَص إمّا من العلاقات ثلاثية المناحي بمعادلة E_1 إلى E_2 و G_{12} إلى G أو بنفس الطريقة التي حصلنا بها على العلاقات ثلاثية المناحي.

تمكِّننا ملاحظة التناظر الفيزيائي بين الألياف والمصفوفة في الرقاقة المقوّاة محورياً من استنتاج كيفية ربط بعض الخصائص الخارجة-عن- المستوي مع الخصائص ضمن-المستوي E_1 و E_2 و ν_{12} و G_{12}. لنعتبر القسم ذا الشكل المكعَّب من

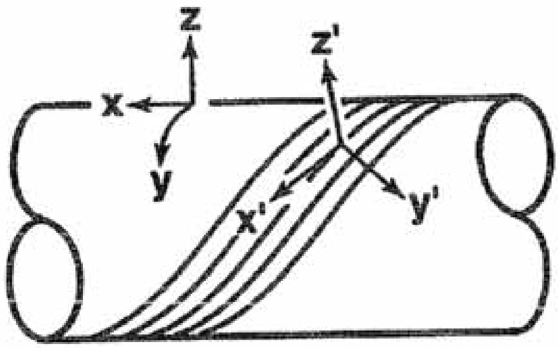
الرقاقة المقوّاة محورياً في إحداثيات المادة الرئيسية في الشكل 2–8. نجد أولاً أنّ $E_3 = E_2$ لأنّ كلا معاملي الجساءة يُقاسان بنفس الطريقة عبر الألياف ، وهذا يعني أنه بشكلٍ عام، يمكن للاتجاه 3 أن يُعامَل تماماً، كما لو كان الاتجاه 2 في الرقاقة المقوّاة محورياً. ثانياً، $\nu_{31} = \nu_{21}$ (ومنه $\nu_{13} = \nu_{12}$) لنفس السبب السابق. ثالثاً، بغضّ النظر عمّا إذا طُبِّق إجهاد القصّ τ_{13} أو τ_{12}، فإنّ الانفعالات الناتجة متطابقة، لأنّ الألياف – بسبب التناظر– لديها نفس التوجّه بالنسبة إلى إجهاد القصّ المُطبَّق، إذاً $G_{13} = G_{12}$. وحتى لو كان توزّع الألياف في المستوي 2–3 للمكعَّب في الشكل 2–8 عشوائياً، فإنّ نفس الاستنتاجات سوف تبقى صالحة. وهذا يعني أنه سواء مع انتظام تباعد الألياف الظاهر في الشكل 2–8، أو مع توزّع عشوائي للألياف في المستوي 2–3، سيظل من الممكن النظر إلى المستوي 2–3 على أنه مستوي تماثل مناحي، لأنّ جميع معاملات الجساءة E في المستوي هي نفسها. عندما نقدّم تفسيراً بخصوص اختلاف E_1 عن E_2 في المستوي 1–2، فإننا نعترف أن الرقاقة هي مادة متماثلة المناحي عرضانياً في الأبعاد الثلاثة. ولكن عندما نركِّز فقط على المستوي 1–2، فإننا نسمّي الرقاقة ثلاثية المناحي. إذا تم كبس الرقاقة في الاتجاه 3 خلال عملية الشيّ، عندها سوف تنتج اختلافات طفيفة في الخصائص ما بين الاتجاهين 2 و3، وسوف تكون المادة ثلاثية المناحي وفق المعنى ثلاثي الأبعاد.



الشكل 2–8: التناظر الفيزيائي لرقاقة مقوّاة محورياً (باتجاه واحد)

6.2 علاقات الإجهاد – انفعال لرقاقة ذات توجيه اعتباطي

في الفقرة 5.2 عُرِّفت الإجهادات والانفعالات في الإحداثيات الرئيسية للمادة من أجل مادة ثلاثية المناحي. لكن الاتجاهات الرئيسية للحالة ثلاثية المناحي لا تتطابق في غالبية الأحيان مع اتجاهات الإحداثيات التي تكون طبيعية هندسياً بالنسبة إلى حلّ المسألة. لنعتبر على سبيل المثال بنية القوقعة الاسطوانية الدائرية المقوّاة بالألياف الملفوفة حلزونياً، كما في الشكل 2–9. هنا تكون الإحداثيات الطبيعية بالنسبة إلى حلّ مسألة القوقعة هي إحداثيات القوقعة x, y, z، بينما تكون إحداثيات المادة الرئيسية x', y', z'. وتُحدَّد زاوية التفاف – الليف بالعلاقة $\cos(y', y) = \cos\alpha$؛ وكذلك $z' = z$. وتتضمن أمثلة أخرى صفائح متعددة الطبقات التي تحتوي رقاقات مختلفة ذات توجّهات مختلفة. وهكذا، هناك حاجة إلى علاقة بين الإجهادات والانفعالات في إحداثيات المادة الرئيسية وتلك في إحداثيات الجسم. بعد ذلك، هناك حاجة أيضاً إلى طريقة من أجل تحويل علاقات الإجهاد–انفعال من نظام إحداثيات معين إلى نظام إحداثيات أخر.



الشكل 2–9: بنية قوقعة اسطوانية دائرية مقوّاة بألياف ملفوفة حلزونياً

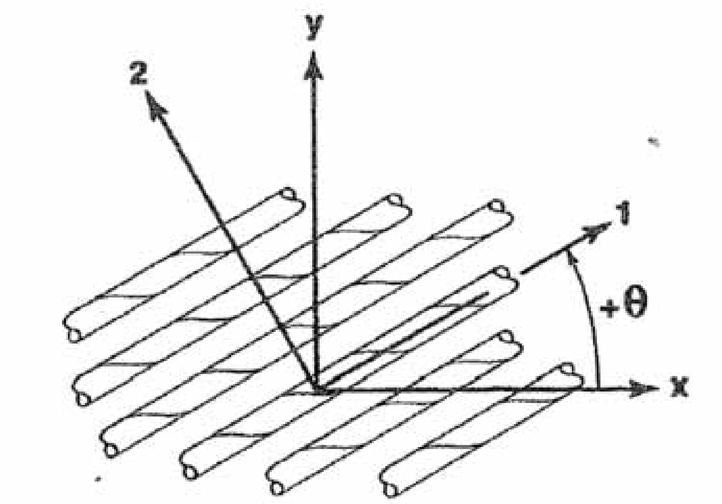
في هذه المرحلة، نسترجع من ميكانيك المواد الأساسي معادلات التحويل للتعبير عن الإجهادات في نظام إحداثيات x-y باستخدام الإجهادات في نظام إحداثيات 1–2:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (2.72)$$

حيث θ هي الزاوية من المحور x إلى المحور 1 (انظر الشكل 2–10). لاحظ على وجه الخصوص أنّ التحويل لا يؤثِّر إطلاقاً في خصائص المادة، بل هو مجرَّد دوران لاتجاهات الإجهاد. لاحظ كذلك أنّ اتجاه الدوران له أهمية حاسمة.

بطريقة مشابهة تكون معادلات تحويل الانفعال هي:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \frac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \frac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (2.73)$$



الشكل 2–10: دوران موجب لمحاور المادة الرئيسية انطلاقاً من محوري x–y

حيث نلاحظ أنّ الانفعالات تتحوّل وفق نفس التحويل الذي تتبعه الإجهادات إذا استُعمل تعريف الموتِّر لانفعال القصّ (وهذا مكافئ لتقسيم انفعال القصّ الهندسي على اثنين).

تُكتَب التحويلات عادةً كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \tag{2.74}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} = [T]^{-1} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dfrac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

حيث تشير اللاحقة العليا -1 إلى مقلوب المصفوفة، و:

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta\cos\theta & \sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta - \sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{2.76}$$

ولكن إذا وضعنا المصفوفة البسيطة:

$$[R] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \tag{2.77}$$

موضع الاستعمال حسب رويتر (Reuter) [2-4]، فعندها يمكن استخدام متجهات الانفعال الهندسي:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \dfrac{\gamma_{12}}{2} \end{bmatrix} \tag{2.78}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [R] \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \dfrac{\gamma_{xy}}{2} \end{bmatrix} \tag{2.79}$$

بدلاً من متجهات موتّر الانفعال في تحويلات الانفعالات، وكذلك في تحويلات قوانين الإجهاد-انفعال. ويكمن جمال تحويلات رويتر في إمكانية استخدام ذلك الترميز

المختصر للمصفوفات. وكنتيجة له، يمكننا تجنّب استعمال العلاقات العادية لمصفوفات الجساءة والمطاوعة مع عواملها الصعبة وغير الملائمة كـــ 2/1 و2 في مختلف السطور والأعمدة.

ما يُدعى رقاقة ثلاثية المناحي الخاصّة (specially orthotropic lamina) هي رقاقة ثلاثية المناحي تصطف في خط واحد محاور المادة الرئيسية فيها مع محاور الجسم الطبيعية:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.80)$$

حيث تظهر محاور المادة الرئيسية في الشكل 2–7. وقد تمَّ عرض علاقات الإجهاد– الانفعال هذه في المقطع 5.2، وهي تُطبَّق عندما تُستخدَم اتجاهات المادة الرئيسية لرقاقة ثلاثية المناحي كإحداثيات.

لكنْ – كما ذُكر سابقاً– تُبنى الرقاقات ثلاثية المناحي في غالبية الأحيان بطريقة لا تتطابق فيها إحداثيات المادة الرئيسية مع الإحداثيات الطبيعية للجسم. ويجب ألاّ يُفسَّر هذا التصريح على أنه يعني أنّ المادة نفسها لم تعُد ثلاثية المناحي؛ إنه بدلاً من ذلك يدلّ فقط على أننا ننظر إلى مادة ثلاثية المناحي بطريقة غير طبيعية، أي وفق نظام إحداثيات تتوجه بزاوية ما بالنسبة إلى نظام الإحداثيات الرئيسية للمادة. وعندها يكون السؤال الرئيسي هنا: إذا كنّا نعلم علاقات الإجهاد – انفعال في إحداثيات المادة الرئيسية، فما هي علاقات الإجهاد– انفعال في الإحداثيات x-y؟

وعلى ذلك نستخدم تحويلات الإجهاد والانفعال الواردة في المعادلتين (2.74) و(2.75) مع مصفوفة رويتر، أي المعادلة (2.77)، وبعد اختصار المعادلة (2.80) على شكل:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = [Q] \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.81)$$

للحصول على:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=[T]^{-1}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=[T]^{-1}[Q][R][T][R]^{-1}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \qquad (2.82)$$

ولكن $[R][T][R]^{-1}$ يمكن أن نقدّمها بشكل $[T]^{-T}$ حيث تشير اللاحقة العليا T إلى منقول (transpose) المصفوفة، وعندها إذا استعملنا الاختصار:

$$[\bar{Q}]=[T]^{-1}[Q][T]^{-T} \qquad (2.83)$$

تكون علاقات الإجهاد–انفعال في الإحداثيتين x-y هي:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=[\bar{Q}]\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \qquad (2.84)$$

التي يكون فيها:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta+2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{22}\sin^4\theta\\
\bar{Q}_{12} &= (Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{12}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)\\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta+2(Q_{12}+2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{22}\cos^4\theta \qquad (2.85)\\
\bar{Q}_{16} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta+(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta\\
\bar{Q}_{26} &= (Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66})\sin^3\theta\cos\theta+(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66})\sin\theta\cos^3\theta\\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta+Q_{66}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)
\end{aligned}$$

حيث يشير الخط القصير فوق مصفوفة الـ $\bar{Q}_{ij}$ إلى أننا نتعامل مع معاملات الجساءة المُختزَلة المُحوَّلة بدلاً من معاملات الجساءة المُختزَلة Q_{ij}.

لاحظ أنّ مصفوفة الجساءة المُختزَلة المُحوَّلة $\bar{Q}_{ij}$ تحوي حدوداً في جميع مواقعها التسعة على عكس حالة وجود الأصفار في مصفوفة الجساءة المُختزَلة Q_{ij}. ولكن لا تزال هناك أربعة ثوابت مادية مستقلّة فقط، لأنّ الرقاقة ما زالت ثلاثية المناحي. وفي الحالة العامة مع إحداثيتين الجسم x-y، هناك إقران بين انفعال القصّ والإجهادات الناظمية، وإجهاد القصّ والانفعالات الناظمية ، وهذا يعني وجود إقران قصّ – استطالة. وهكذا نجد أنه في إحداثيات الجسم حتى الرقاقة ثلاثية المناحي تبدو كأنها غير متماثلة

المناحي. ولكن، نظراً إلى أنّ مثل هذه الرقاقة تتمتع بالفعل بخصائص ثلاثية المناحي في إحداثيات المادة الرئيسية، فإنها تُدعى رقاقة ثلاثية المناحي عامّة (generally orthotropic lamina) لأنه يمكن تمثيلها بواسطة علاقات الإجهاد – انفعال الواردة في المعادلة (2.84). إذاً، الرقاقة ثلاثية المناحي العامّة هي رقاقة ثلاثية المناحي لا تصطف محاور المادة الرئيسية فيها مع محاور الجسم الطبيعية.

إنّ الميّزة الوحيدة المرافقة للرقاقات ثلاثية المناحي العامّة مقارنةً بالرقاقات غير متماثلة المناحي هي أنّ تحديد مواصفات الرقاقات ثلاثية المناحي العامة أسهل تجريبياً. ولكن، إذا لم نتنبَّه إلى وجود محاور المادة الرئيسية، فعندها لا يمكن التمييز بين الرقاقة ثلاثية المناحي العامّة والرقاقة غير متماثلة المناحي. وهذا يعني أننا لا نستطيع إزالة الصفة ثلاثية المناحي الملازمة للرقاقة، لكننا نستطيع أن نوجِّه هذه الرقاقة بطريقة تجعل من الصعب جداً التعرف على هذه الصفة.

نستطيع كبديل عن الإجراء سالف الذكر أن نعبِّر عن الانفعالات بواسطة الإجهادات في إحداثيات الجسم عن طريق إمّا (1) قلب علاقات الإجهاد–انفعال في المعادلة (2.84)، أو (2) تحويل علاقات الانفعال – إجهاد في الإحداثيات الرئيسية للمادة من المعادلة (2.61)، إلى إحداثيات الجسم:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.86)$$

نختار المقاربة الثانية، ونطبِّق تحويلات المعادلتين (2.74) و (2.75) ومصفوفة رويتر، أي المعادلة (2.77)، للحصول على:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = [T]^T [S][T] \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \qquad (2.87)$$

حيث وُجِد أن $[R][T]^{-1}[R]^{-1}$ قد أصبح $[T]^T$ و:

$$\bar{S}_{11} = S_{11}\cos^4\theta + (2S_{12} + S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{22}\sin^4\theta$$
$$\bar{S}_{12} = S_{12}(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + (S_{11} + S_{22} - S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta$$
$$\bar{S}_{22} = S_{11}\sin^4\theta + (2S_{12} + S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{22}\cos^4\theta \qquad (2.88)$$
$$\bar{S}_{16} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})\sin\theta\cos^3\theta + (2S_{22} - 2S_{12} + S_{66})\sin^3\theta\cos\theta$$
$$\bar{S}_{26} = (2S_{11} - 2S_{12} - S_{66})\sin^3\theta\cos\theta + (2S_{22} - 2S_{12} + S_{66})\sin\theta\cos^3\theta$$
$$\bar{S}_{66} = 2(2S_{11} + 2S_{22} - 4S_{12} - S_{66})\sin^2\theta\cos^2\theta + S_{66}(\sin^4\theta + \cos^4\theta)$$

تذكَّر أنّ الـــ S_{ij} تُعرَّف بواسطة الثوابت الهندسية في المعادلة (2.62).

نظراً إلى وجود $\bar{Q}_{16}$ و $\bar{Q}_{26}$ في المعادلة (2.84) ووجود S_{16} و S_{26} في المعادلة (2.87)، فإنّ حلّ المسائل التي تتضمَّن ما يُدعى الرقاقات ثلاثية المناحي العامّة أكثر صعوبةً من المسائل المتعلّقة بما يّدعى الرقاقات ثلاثية المناحي الخاصّة. وهذا يعني أنّ إقران القصّ–استطالة يعقِّد حلّ المسائل الشغلية. وفي واقع الأمر، ليس هناك فارق بين الحلول المتعلّقة بالرقاقات ثلاثية المناحي العامّة وتلك المتعلّقة بالرقاقات غير متماثلة المناحي ذات علاقات الإجهاد–انفعال التي يمكن كتابتها في حالات الإجهاد المستوي، كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{16} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.89)$$

أو في الشكل المقلوب كما يلي:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{16} \\ S_{12} & S_{22} & S_{26} \\ S_{16} & S_{26} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \qquad (2.90)$$

حيث تكون معاملات المطاوعة غير متماثلة المناحي بدلالة الثوابت الهندسية:

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \qquad S_{22} = \frac{1}{E_2} \qquad S_{66} = \frac{\eta_{12,1}}{E_1} = \frac{\eta_{1,12}}{G_{12}}$$
$$S_{12} = -\frac{\nu_{12}}{E_1} = -\frac{\nu_{21}}{E_2} \qquad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \qquad S_{26} = \frac{\eta_{12,2}}{E_2} = \frac{\eta_{2,12}}{G_{12}} \qquad (2.91)$$

لاحظ أنّه تم استعمال بعض الثوابت الهندسية الجديدة. وتُدعى هذه الثوابت الجديدة باسم مُعامِلات التأثر التبادلية (coefficients of mutual influence) من قِبَل ليخنيتسكي (Lekhnitskii) [2–5] وتُعرَّف كما يلي:

$\eta_{i,ij}$ = مُعامِل التأثر التبادلي من النوع الأول، ويصف الشد في الاتجاه i الذي يسبّبه إجهاد القصّ في المستوي ij

$$\eta_{i,ij} = \frac{\varepsilon_i}{\gamma_{ij}} \tag{2.92}$$

من أجل $\tau_{ij} = \tau$ وجميع الإجهادات الأخرى تساوي الصفر.

$\eta_{ij,i}$ = مُعامِل التأثر التبادلي من النوع الثاني، ويصف القصّ في المستوي ij الذي يسبّبه الإجهاد الناظمي في الاتجاه i

$$\eta_{ij,i} = \frac{\gamma_{ij}}{\varepsilon_i} \tag{2.93}$$

من أجل $\sigma_i = \sigma$ وجميع الإجهادات الأخرى تساوي الصفر.

عرَّف ليخنيتسكي (Lekhnitskii) مُعاملات التأثر التبادلي ونسب بواسون بواسطة لاحقات سفلية على عكس الترميز الحالي. ولم تكُن التسمية التي أعطيت لمُعاملات التأثر التبادلي موفَّقة كثيراً، لأنّ نسب بواسون يمكن أيضاً أن تُدعى مُعامِلات التأثر التبادلي. وبدلاً من ذلك، كان الأنسب أن تُدعى الـــ $\eta_{ij,i}$ و $\eta_{i,ij}$ بالاسم الوظيفي مُعامِلات إقران القصّ–استطالة.

تُستخدَم علاقات مرونة غير متماثلة المناحي أخرى لتعريف مُعامِلات تشينتسوف (Chentsov coefficients) التي تُمثّل بالنسبة إلى إجهادات القصّ وانفعالات القصّ المنزلة التي تحتلها نسب بواسون بالنسبة إلى إجهادات الناظمية والانفعالات الناظمية. ولكنّ مُعامِلات تشينتسوف لا تؤثّر في السلوك ضمن – المستوي للرقاقات التي تخضع لإجهاد مستوي، لأنّ هذه المُعامِلات ترتبط بـــ S_{45}, S_{46}, S_{56} في المعادلة (2.18). تُعرَّف مُعامِلات تشينتسوف، كما يلي:

$\mu_{ij,kl}$ = مُعامِل تشينتسوف الذي يصف انفعال القصّ في المستوي kl الناجم عن إجهاد القصّ في المستوي ij، وهذا يعني:

$$\mu_{ij,kl} = \frac{\gamma_{kl}}{\gamma_{ij}} \qquad (2.94)$$

من أجل $\tau_{ij} = \tau$ وجميع الإجهادات الأخرى تساوي الصفر.

تخضع مُعامِلات تشينتسوف (Chentsov coefficient) إلى العلاقات العكسية:

$$\frac{\mu_{kl,ij}}{G_{kl}} = \frac{\mu_{ij,kl}}{G_{ij}} \qquad (2.95)$$

لاحظ أنه من المناسب أكثر أن يُطلَق على مُعامِلات تشينتسوف الاسم الوظيفي مُعامِلات إقران القصّ – قصّ.

وتكون انفعالات القصّ خارج المستوي لرقاقة غير متماثلة المناحي الناجمة عن إجهاد قصّ وإجهادات ناظمية ضمن–المستوي:

$$\gamma_{13} = \frac{\eta_{1,13}\sigma_1 + \eta_{2,13}\sigma_2 + \mu_{12,13}\tau_{12}}{G_{13}}$$

$$\gamma_{23} = \frac{\eta_{1,23}\sigma_1 + \eta_{2,23}\sigma_2 + \mu_{12,23}\tau_{12}}{G_{23}} \qquad (2.96)$$

التي تكون فيها كلٌّ من مُعامِلات إقران القصّ– قصّ ومُعامِلات إقران القصّ– استطالة مطلوبة. لاحظ أنّ جميع انفعالات القصّ هذه لا تحدث في المادة ثلاثية المناحي إلاّ إذا أُجهِدَت وفق إحداثيات مختلفة عن الإحداثيات الرئيسية للمادة. وفي مثل تلك الحالات، نحصل على مُعامِلات إقران القصّ – قصّ ومُعامِلات إقران القصّ – استطالة من معاملات المطاوعة المُحوَّلة بالطريقة التي سنراها في الفقرة القادمة.

قارِنْ معاملات المطاوعة ثلاثية المناحي المُحوَّلة في المعادلة (2.88) مع معاملات المطاوعة غير متماثلة المناحي بدلالة الثوابت الهندسية في المعادلة (2.91). من الواضح أنّ مُعامِل الإقران قصّ– استطالة الظاهري ينتج عندما تُجهَد رقاقة ثلاثية المناحي وفق إحداثيات غير رئيسية للمادة.

أعِدْ تسمية الإحداثيتين 1 و2 في المعادلة (2.90) لتصبحا x وy، لأنّ المادة غير متماثلة المناحي لا تمتلك – بالتعريف– اتجاهات رئيسية للمادة. بعد ذلك، عوِّضْ الـــ S_{ij} المُعاد تسميتها من المعادلة (2.91) في المعادلة (2.88) مع معاملات المطاوعة

ثلاثية المناحي في المعادلة (2.62). أخيراً، تكون الثوابت الهندسية الظاهرية من أجل رقاقة ثلاثية المناحي تُجهَد وفق إحداثيتين غير رئيسيتين x-y:

$$\frac{1}{E_x}=\frac{1}{E_1}\cos^4\theta+\left[\frac{1}{G_{12}}-\frac{2\nu_{12}}{E_1}\right]\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{1}{E_2}\sin^4\theta$$

$$\nu_{xy}=E_x\left[\frac{\nu_{12}}{E_1}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)-\left[\frac{1}{E_1}+\frac{1}{E_2}-\frac{1}{G_{12}}\right]\sin^2\theta\cos^2\theta\right]$$

$$\frac{1}{E_y}=\frac{1}{E_1}\sin^4\theta+\left[\frac{1}{G_{12}}-\frac{2\nu_{12}}{E_1}\right]\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{1}{E_2}\cos^4\theta \qquad (2.97)$$

$$\frac{1}{G_{xy}}=2\left[\frac{2}{E_1}+\frac{2}{E_2}+\frac{4\nu_{12}}{E_1}-\frac{1}{G_{12}}\right]\sin^2\theta\cos^2\theta+\frac{1}{G_{12}}(\sin^4\theta+\cos^4\theta)$$

$$\eta_{xy,x}=E_x\left[\left[\frac{2}{E_1}+\frac{2\nu_{12}}{E_1}-\frac{1}{G_{12}}\right]\sin\theta\cos^3\theta-\left[\frac{2}{E_2}+\frac{2\nu_{12}}{E_1}-\frac{1}{G_{12}}\right]\sin^3\theta\cos\theta\right]$$

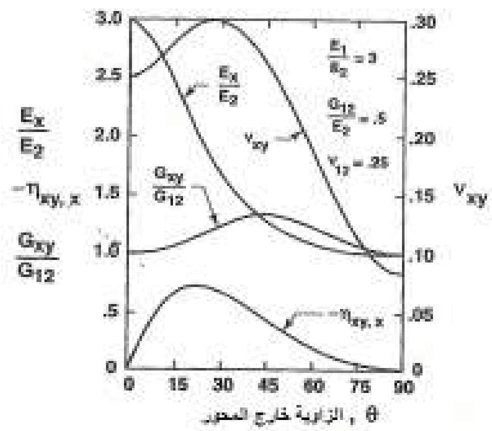
$$\eta_{xy,y}=E_y\left[\left[\frac{2}{E_1}+\frac{2\nu_{12}}{E_1}-\frac{1}{G_{12}}\right]\sin^3\theta\cos\theta-\left[\frac{2}{E_2}+\frac{2\nu_{12}}{E_1}-\frac{1}{G_{12}}\right]\sin\theta\cos^3\theta\right]$$

يكمن الانعكاس المهم لوجود مُعامِل إقران القصّ- استطالة في أنّ حمولات الشدّ خارج المحوري (وفق اتجاه غير رئيسي للمادة) بالنسبة إلى المواد المركَّبة تؤدي إلى تشويه قصّ بالإضافة إلى الاستطالة المحورية المعتادة. وسوف يُستقصى هذا الموضوع بشكلٍ أعمق في المقطع 2.8. والآن، لنعترف أنّ المعادلة (2.97) هي تعبير كمّي عن الانعكاس المشار إليه أعلاه لاختبارات الشدّ وعن الملاحظات الكيفية التي وردت في الفقرة 2.1.

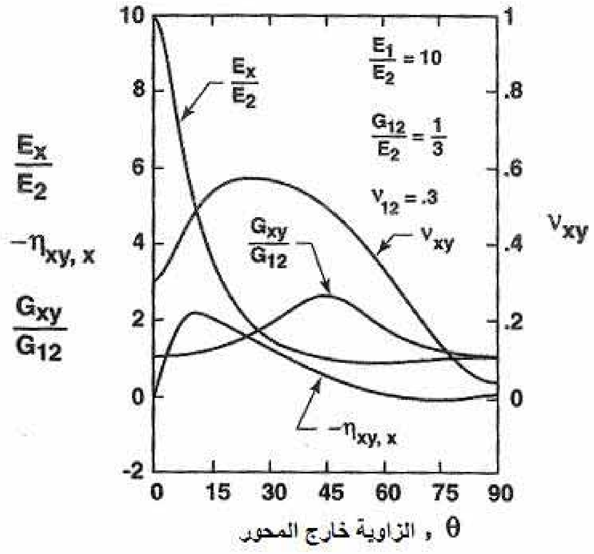
إنّ المُعامِلات غير متماثلة المناحي الظاهرية لرقاقة ثلاثية المناحي أُجهِدَت وفق زاوية θ بالنسبة إلى اتجاهات المادة الرئيسية تتغيَّر مع تغيّر θ، كما هو واضح من المعادلة (2.97). ومن أجل الحصول على تقدير بصري عن كيفية تغيّر تلك المُعامِلات، تمَّ في الشكل 2-11 تمثيل قيم نموذجية لمادة مركَّبة من الإيبوكسي- زجاج استناداً إلى المعادلة (2.97). وبطريقة مشابهة، تمَّ في الشكل 2-12 تمثيل قيم لمادة مركَّبة من الإيبوكسي- بورون. وفي كلا الشكلين، تمَّت قسمة E_x على E_2 و G_{xy} على G_{12}. وقد أجريت هذه المعايرة (normalization) للسماح بمقارنة مناسبة بين غالبية المُعامِلات

ضمن نفس الشكل. لاحظ أنه في كلا الشكلين، يبلغ G_{xy} قيمته العظمى عند الزاوية $\theta = 45^\circ$. ويساوي مُعامِل الإقران قصّ – استطالة $\eta_{xy,x}$ بالطبع قيمة الصفر عند الزاويتين $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 90^\circ$، بينما يصل إلى قيم كبيرة مقارنةً بـــ ν_{xy} من أجل الزوايا المتوسطة بينهما. ويُظهِر المُعامِل E_y بشكل أساسي نفس سلوك E_x، باستثناء أنّ E_y يكون – بالطبع– صغيراً عند الزوايا θ القريبة من 0°، وكبيراً عندما تكون θ قريبة من 90°. ويمكن تقديم ملاحظات مشابهة من أجل ν_{yx} و $\eta_{xy,y}$.

لا تُعتَبر القيم البادية في الشكلين 2–11 و2–12 نموذجية تماماً بالنسبة إلى جميع المواد المركَّبة. فعلى سبيل المثال، اتبع التلميحات المذكورة في التمرين 7.6.2 لتُبرهن أنّ E_x يمكن فعلياً أن يتجاوز كلاً من E_1 و E_2 من أجل بعض الرقاقات ثلاثية المناحي. وبطريقة مشابهة، يمكن إظهار أنّ E_x يمكن أن يكون أصغر من كلٍ من E_1 و E_2 (لاحظ أنه في حالة الإيبوكسي– بورون في الشكل 2–12 يكون E_x أصغر بصورة طفيفة من E_2 في جوار الزاوية $\theta = 60^\circ$). ولقد تمَّ تلخيص هذه النتائج من قِبَل جونز Jones [2–6] على شكل نظرية بسيطة: إنّ القيم الحدّية (العظمى والصغرى) لخصائص المادة لا تحدث بالضرورة في إحداثيات المادة الرئيسية. وتستطيع المُعامِلات G_{xy} و ν_{xy} و $\eta_{xy,x}$ أن تبدي خصوصيات مماثلة ضمن مجال المعادلة (2.97).



الشكل 2–11: المُعامِلات المعايرة في الإيبوكسي– زجاج



الشكل 2-12: المُعامِلات المعايرة في الإيبوكسي- بورون

وهكذا نجد أنه يجب عدم اعتبار أيّ شيء أمراً مسلَّماً به بالنسبة إلى مادة مركَّبة جديدة: فيجب فحص مُعاملاتها كتوابع للزاوية θ كي نستطيع فهم خاصيتها بشكل صحيح.

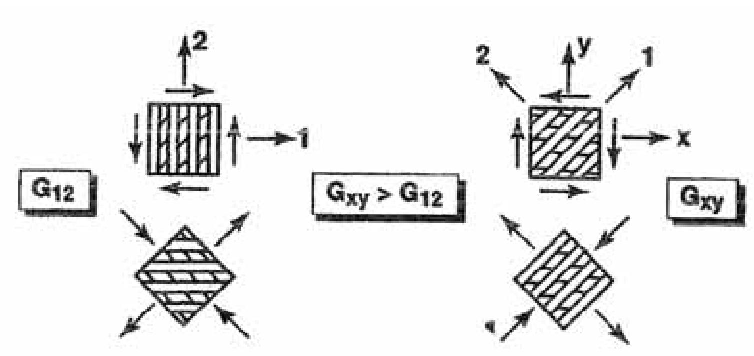
هناك ملاحظتان مفيدتان كي نعلِّل لماذا نجد في الشكلين 2-11 و2-12 أنّ (1) G_{xy} تتجاوز G_{12} و(2) E_{45° أصغر من E_1 في المواد المركَّبة التي لديها مُعامِل الألياف أكبر بكثير من مُعامِل المصفوفة:

(1) علاقة G_{xy} مع G_{12}

إنّ استجابة عنصرٍ ما لإجهادات القصّ من أجل قياس E_1 تُفهَم بشكل أفضل في غالبية الأحيان عندما تُفحَص حالة الإجهاد الرئيسي عند الزاوية °45 بالنسبة إلى إجهادات القصّ. ومن أجل القصّ الصافي في الإحداثيات الرئيسية للمادة، تكون المصفوفة هي الغالبة بشكل واضح على استجابة الانفعال للعنصر عند الجانب السفلي الأيسر من الشكل 2-13 للإجهادات الناظمية. وهذا يعني أنّ الألياف لا تستطيع أن تلعب دوراً غالباً في عملية

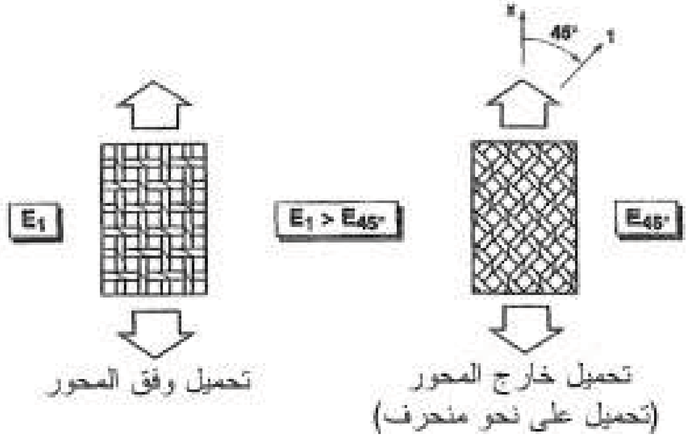
الانفعال لأنها لا تتعرَّض مباشرةً للحمل (فالفعل الحاصل هو أشبه ما يكون بـــ "جرف" المصفوفة). بالمقابل، من أجل القصّ الصافي في الإحداثيات غير الرئيسية للمادة عند الجانب الأيمن من الشكل 2–13 تكون الألياف هي الغالبة على استجابة الانفعال لإجهادات الشدّ الناظمية، لأنّ الألياف تتلقّى الحمل بشكل مباشر، هذا على الرغم من أنّ المصفوفة هي الغالبة على الاستجابة لإجهادات الضغط الناظمية لأنّ المصفوفة – الأقلّ جساءةً من الألياف– تنفعل بشكل أكبر بكثير من الألياف. وهكذا، يكون G_{xy} في أية إحداثيات غير الإحداثيات الرئيسية للمادة أكبر من G_{12}.

(2) علاقة E_{45° مع E_1.



الشكل 2–13: سلوك القصّ لرقاقة أحادية المحور

تمتلك المادة المركَّبة المقوَّاة بالألياف المحيكة وفق اتجاهين متعامدين، كما في الشكل 2–1 اتجاهات رئيسية للمادة وفق هذين الاتجاهين. وإذا تعرَّضت مثل هذه المادة لحملٍ وفق اتجاهٍ للألياف، فإننا نقيس E_1 كما في الجانب الأيسر من الشكل 2–14. بالمقابل، إذا تعرَّضت مثل هذه المادة المحيكة لحمل وفق اتجاه ينحرف – على سبيل المثال– °45 عن الإحداثيات الرئيسية للمادة (وهو ما يُدعى التحميل خارج المحور؛ وكذلك يُدعى التحميل على نحوٍ منحرف (on-the-bias)، يكون E_{45° المقاس أصغر بكثير من E_1.



الشكل 2–14: تأثير التحميل وفق المحور مقارنةً بالتحميل خارج المحور على جساءة رقاقة محيكة

تستطيع أن تقوم بهذه التجربة بنفسك باستعمال قميصك أو "بلوزتك": وتكون المادة هنا ليفية محيكة باتجاهين اثنين دون مصفوفة بشكل أساسي (إلا إذا عولجت بالنشاء!). فيمكنك القول أنّ E_1 أكبر من E_{45°، لأنّ شد القماش بأصابعك باتجاه خارج المحور يؤدي إلى تشويه أكبر بكثير من قيامك بالشد وفق المحور باستعمال نفس القوة. وتمتلك رقاقة مقوَّاة أحادية المحور نفس العلاقة $E_1 > E_{45^\circ}$ مثل الرقاقة المحيكة، ولكن لا يوجد غرض بسيط من الحياة اليومية لبرهان هذه الحقيقة.

وبإيجاز، نقول بأنّ الطريقة الأنسب لتصوّر الثوابت الهندسية للمواد غير متماثلة المناحي والمواد ثلاثية المناحي المُحمَّلة في إحداثيات غير رئيسية للمادة وفق تعابير وظيفية حصراً:

E_i مُعامِلات الاستطالة (مُعاملات يونغ)

G_{ij} مُعامِلات القصّ

ν_{ij} مُعامِلات الإقران استطالة– استطالة (نسب بواسون)

$\eta_{i,ij}$ مُعامِلات الإقران قصّ– استطالة (مُعامِلات التأثر التبادلي)

$\mu_{ij,kl}$ مُعامِلات الإقران قصّ– قصّ (مُعامِلات تشينتسوف)

لاحظ أنّ التسميات الوظيفية تجلب إلى الذهن بشكل فوري وواضح الطبيعة الشغلياتية لمختلف الثوابت الهندسية. وعلى عكس ذلك، فإنّ التسميات غير الوظيفية هي متاهة إمّا من مصطلحات معقَّدة غير واضحة أو من أسماء أشخاص لا تجلب إلى الذهن ما يُفتَرض أن تعنيه تلك المصطلحات. وهكذا، من المُستحسَن استخدام التسميات الوظيفية لسهولة الاستعمال ووضوح الفهم.

مجموعة المسائل 6.2

1.6.2 اشتق المعادلة (2.82).

2.6.2 برهن أنّ $[R][T][R]^{-1}=[T]^{-T}$.

3.6.2 اشتق المعادلة (2.87).

4.6.2 برهن أنّ $[R][T]^{-1}[R]^{-1}=[T]^{T}$.

5.6.2 حدِّد إلى المعادلة (2.97) عن طريق تفسير المعادلة (2.88) باستخدام المعادلة (2.90) بالإضافة إلى المعادلتين (2.91) و (2.62). علِّل الخطوة المنطقية المفتاحية التي تجعلك قادراً على استخدام كلتا المعادلتين (2.90) و(2.91) من أجل المواد غير متماثلة المناحي والمعادلتين (2.62) و (2.88) من أجل المواد ثلاثية المناحي في هذه المسألة. أي ما هي الطريقة التي نستطيع بواسطتها تفسير مادة ما على أنها تفي بكلا تعريفي المادة؟

6.6.2 ارسم الثوابت الهندسية الظاهرية E_x و E_y و G_{xy} و ν_{xy} و $\eta_{xy,x}$ و $\eta_{xy,y}$ كدالات θ من $\theta=0^\circ$ إلى 90° بنفس طريقة الشكلين 2−11 و2−12 في الإيبوكسي− غرافيت عالي المُعامِل ومادة ثلاثية المناحي ذات $E_1 = 30 \times 10^6$ Psi (207 GPa) و E_2=0.75×10^6 (5.2 Gpa) و 10^6 G_{12}=0.375 ×psi (2.59 Gpa) و $\nu_{12}=0.25$.

7.6.2 بيّن أنّ مُعامِل الاستطالة الظاهري لمادة ثلاثية المناحي كدلالة للزاوية θ [المعادلة الأولى من المعادلات (97.2)] يمكن كتابته على الشكل:

$$\frac{E_1}{E_x}=(1+a-4b)\cos^4\theta+(4b-2a)\cos^2\theta+a$$

حيث $a = E_1 / E_2$ و $b = \frac{1}{4}(E_1 / G_{12} - 2\nu_{12})$. استخدم مشتقات E_x لإيجاد نهايته العظمى والصغرى بالطريقة المذكورة في الملحق B. ومن ثمَّ بيِّن أنّ E_x أكبر من كلٍّ من E_1 و E_2 من أجل بعض قيم θ إذا كان:

$$G_{12} > \frac{E_1}{2(1+\nu_{12})}$$

و أنّ E_x أصغر من كلٍّ من E_1 و E_2 من أجل بعض قيم θ إذا كان:

$$G_{12} > \frac{E_1}{2\left[(E_1 / E_2) + \nu_{12}\right]}$$

أي بيِّن أنّ المادة ثلاثية المناحي يمكن أن تمتلك مُعامِل يونغ ظاهري، إمّا أكبر، أو أصغر من مُعامِلات يونغ في كلا الاتجاهين الرئيسيين للمادة. وعند القيام بذلك، اشتق الشروط التي يوجد من أجلها كلٌّ من أنماط السلوك، أي اشتق المتراجحات (inequalities) المعنية. ارسم E_x / E_1 لبعض المواد المُبتكرة التي تصلح مثالاً لهذه العلاقات.

7.2 المميزات اللامتغيّرة لرقاقة ثلاثية المناحي

من الواضح أن معاملات الجساءة المختزلة المتحوّلة في المعادلة (2.85) هي دالات معقّدة جداً لمميزات المادة الأربع المستقلّة E_1, E_2, ν_{12} و G_{12}، بالإضافة إلى زاوية الدوران θ. يتطلّب فهمُ الانعكاسات الفيزيائية للدورانات المختلفة التي تحدث في الصفائح الطبقية الحالية خبرةً عمليةً معتبَرة. ولعله من السهل ربطَ القيمة الأعلى E لـــ E_1 و E_2 باتجاه الصفيحة الطبقية الذي يتطلّب أعلى جساءة. ومع ذلك، إذا كانت وضعية التصميم تتضمن متطلبات معاملات جساءة مختلفة في متعددة، فمن الضروري اعتمادُ حججٍ منطقية لإقرار التوجيه الملائم للرقاقات التي تشكّل الصفيحة الطبقية. من الواضح عندها وجوبُ فهمِ كيف تغير رقاقة منفردة الجساءة عندما يتمّ إعادة توجيهها بزوايا مختلفة نسبةً إلى الاتجاه المرجعيّ. مع ذلك، لا يوصلنا الشكلُ الحالي لعلاقات التحويل في المعادلة (2.85) بسهولة نحو فهم معانيها الفيزيائية.

أعاد تساي (Tsai) وباغانو (Pagano) [7-2] - بحداقة- كتابةَ معادلات التحويل للجساءة، ممّا يمكّننا من فهمٍ سريعٍ لنتائج تدوير الرقاقة ضمن الصفيحة الطبقية. باستخدام المطابقات المثلّثيّة المتنوّعة بين مقدارَي الـــ sin والـــ cos لزاويةٍ ما

مرفوعَين إلى قوى (power) مختلفة ومقادير الـــ sin والـــ cos لمضاعفاتٍ الزاوية نفسها، يمكن كتابة الجساءات المختزَلة المتحوّلة (المعادلة 2.85) على الشكل:

$$\begin{aligned}
\overline{Q}_{11} &= U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\
\overline{Q}_{12} &= U_4 - U_3 \cos 4\theta \\
\overline{Q}_{22} &= U_1 - U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \\
\overline{Q}_{16} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta + U_3 \sin 4\theta \\
\overline{Q}_{26} &= \frac{1}{2} U_2 \sin 2\theta - U_3 \sin 4\theta \\
\overline{Q}_{66} &= U_5 - U_3 \cos 4\theta
\end{aligned} \tag{2.98}$$

حيث:

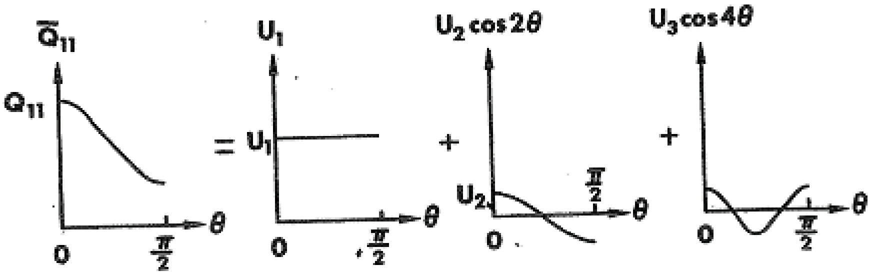
$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{3Q_{11} + 3Q_{22} + 2Q_{12} + 4Q_{66}}{8} \\
U_2 &= \frac{Q_{11} - Q_{22}}{2} \\
U_3 &= \frac{Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 4Q_{66}}{8} \\
U_4 &= \frac{Q_{11} + Q_{22} + 6Q_{12} - 4Q_{66}}{8} \\
U_5 &= \frac{Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} + 4Q_{66}}{8}
\end{aligned} \tag{2.99}$$

لاحظْ أن زاوية الدوران في كتابة تساي وباغانو معاكسةٌ لتعريفها في الشكل 2-10، ولذلك تكون التعابير الجيبية في المعادلة (2.98) معكوسةَ الإشارة أيضاً.

تكمن الفائدة في كتابة معادلات التحويل بالشكل الموافق للمعادلة (2.98) في أن أجزاءً من $\overline{Q}_{11}, \overline{Q}_{12}, \overline{Q}_{22}$ و $\overline{Q}_{66}$ تكون بشكل واضحٍ لا متغيّرة عند إجراء دورانات حول المحور z (العمودي على مستوى الرقاقة). إن مفهومَ اللاتغيّر هذا مفيدٌ عند تفحّص إمكانيّات تدوير الرقاقة بزوايا مختلفة من أجل تحقيق شكل خاصّ للجساءة. على سبيل المثال، يمكن تحليل العبارة:

$$\overline{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cos 2\theta + U_3 \cos 4\theta \tag{2.100}$$

إلى مركّباتها وفق الطريقة البيانية في الشكل 2-15. وهنا نرى أن قيمة $\overline{Q}_{11}$ تتحدّد عبر ثابتٍ غير متغير U_1 مُضافاً إليه كمية ذات تغيّرٍ منخفض التردد مع θ وكمية ذات تغيّرٍ عالي التردد مع θ. وهكذا، يكون U_1 مقياساً فعّالاً لجساءة الرقاقة في تطبيق تصميميّ، لأنه لا يتأثّر باتجاه الدوران. وسيكون مفهوم اللاتغيّر أكثرَ فائدةً عند دراسة الصفائح الطبقية، لأن هذه الأخيرة تتألّف من مجموعةٍ من الرقاقات ذوات توجهاتٍ متنوّعة من أجل تحقيق جساءة معيّنة. مع ذلك، يأتي مثل هذا التفصيل الخاص (tailoring) للمادة وللتشكيل الإنشائي على حساب القدرات في الاتجاهات الأخرى. على سبيل المثال، ومن ملاحظة الطبيعة المتحوّلة لــ $\overline{Q}_{11}$ فإن محاولة الحصول على جساءة معيّنة في اتجاه معيّن يؤدي إلى جساءة أقل في اتجاه آخر ما لم تكن القيمة المنشودة منخفضةً مثل $\overline{Q}_{22}$ في هذا المثال.



الشكل 2−15: تحليل $\overline{Q}_{11}$ إلى مركّباته

طوّر تساي وباغانو [2−7] مفاهيم مماثلةً عن اللاتغيّر للمواد غير متماثلة المناحي. في حالة عدم تماثل المناحي، يجب إلحاق التعريفَين التاليَّين

$$U_6 = \frac{Q_{16} + Q_{26}}{2}, \quad U_7 = \frac{Q_{16} - Q_{26}}{2} \qquad (2.101)$$

بالمعادلة (2.99) وتعديل المعادلة (2.98) بطريقةٍ نحصل معها على الجدول 2−2 الذي يمكّننا من كتابة معادلات التحويل.

لا تحتوي المقادير الحالية اللامتغيّرة ضمن "المميزات اللامتغيّرة" للرقاقة فقط على U_1, U_4 وU_5، من حيث إنها الحدود الثابتة في المعادلة 2.93، فحسب، بل كذلك

على دالات متعلّقة بـــ U_1, U_4 وU_5، كما تبيّن مجموعة المسائل 7.2. أمّا المقداران U_2 و U_3 فهما ليسا مقدارَين لامتغيّرَين. ويمكن تبيان أن المقادير اللامتغيرة في الرقاقات ثلاثية المناحي هي فقط:

$$L_1 = Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12} = \overline{Q}_{11} + \overline{Q}_{22} + 2\overline{Q}_{12} = 2(U_1 + U_4)$$
$$L_2 = Q_{66} - Q_{12} = \overline{Q}_{66} - \overline{Q}_{12} = U_5 - U_4 \qquad (2.102)$$

الجدول 2-2: معادلات التحويل لـــ $\overline{Q}_{ij}$ **و** $\overline{Q'}_{ij}$

	الثابت	$\cos 2\theta$	$\sin 2\theta$	$\cos 4\theta$	$\sin 4\theta$
$\overline{Q'}_{11}$	U_1	U_2	$-2U_6$	U_3	$-U_7$
$\overline{Q'}_{22}$	U_1	$-U_2$	$2U_6$	U_3	$-U_7$
$\overline{Q'}_{12}$	U_4	0	0	$-U_3$	U_7
$\overline{Q'}_{66}$	U_5	0	0	$-U_3$	U_7
$2\overline{Q'}_{16}$	0	$2U_6$	U_2	$2U_7$	$2U_3$
$2\overline{Q'}_{26}$	0	$2U_6$	U_2	$-2U_7$	$-2U_3$

توافق $\overline{Q'}_{ij}$ المواد غير متماثلة المناحي، بينما توافق $\overline{Q}_{ij}$ المواد ثلاثية المناحي، ويمكن الحصول على هذه المقادير الأخيرة بعد حذف U_6 وU_7 من تعاريف $\overline{Q'}_{ij}$ سوف نؤجّل مناقشتنا لمفاهيم اللا تغيّر في الصفائح الطبقية إلى الفصل السابع، وذلك بعد تطوير مفاهيم التصفيح في الفصل الرابع.

مجموعة المسائل 7.2:

1.7.2 بيِّن أن مجموع $Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12}$ هو لامتغيّر عند إجراء دورانٍ حول المحور z، ويعني ذلك أن: $\overline{Q}_{11} + \overline{Q}_{22} + 2\overline{Q}_{12} = Q_{11} + Q_{22} + 2Q_{12}$

2.7.2 بيِّن أن $Q_{66}-Q_{12}$ لامتغيّر عند إجراء دورانٍ حول المحور z، ويعني ذلك أن $\overline{Q}_{66}-\overline{Q}_{12}=Q_{66}-Q_{12}$

3.7.2 بيِّن أن $U_5=\left(U_1-U_4\right)/2$، ويعني ذلك أن المقادير U_1, U_4 و U_5 مرتبطة ببعضها البعض ، وأن اثنَين فقط منها يكونان مستقلَّين، لأنه يمكن التعبير عن أيٍّ منها بدلالة المقدارَين الآخرَين.

8.2 متانات رقاقة ثلاثية المناحي

1.8.2 مفاهيم المتانة

تتساوى مميزات المتانة في رقاقة ثلاثية المناحي في الأهمية مع مميزات الجساءة بناء كلبنة أساسٍ لتوصيف الصفائح الطبقية. وبمراجعة الدراسات السابقة، تبدو القضيةَ المركزيةَ هنا في امتلاك الإجهادات والانفعالات النسبية الرئيسيّة القيم الأكبر، بغضّ النظر عن الاتجاه أو التوجه؛ مع ذلك – وبالتعريف– ليس لاتجاه الإجهاد أو الانفعال أي أهمية بتاتاً في المواد متماثلة المناحي. وبسبب ثلاثيّة المناحي، لا تتطابق محاور الإجهاد الرئيسيّة مع محاور الانفعال الرئيسيّة. فوق ذلك، بما أن قيمةَ المتانة في اتجاه ما أصغرُ منها في اتجاه آخر فإن الإجهادَ الأعلى قد لا يكون الإجهادَ الناظم للتصميم، ونحتاج إذاً إلى مقارنةٍ منطقية بين مجال الإجهاد الفعلي ومجال الإجهاد المسموح به، بغضّ النظر عن القيم الرئيسيّة.

يفيد ما أُنجِز في المقاطع السابقة عن علاقات الجساءة كأساسٍ لتحديد مجال الإجهاد الفعلي، وما يتبقّى هو تعريف مجال الإجهاد المسموح به. تكمن الخطوة الأولى لمثل هذا التعريف في إيجاد قيم الإجهادات أو المتانات المسموح بها في الإحداثيات الرئيسية للمادة. تُعتبر هذه المعلومةُ أساسيةً في دراسة متانة رقاقة ثلاثية المناحي.

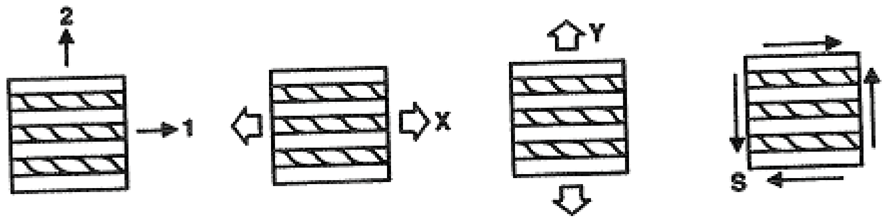
هناك ثلاث متانات أساسيّة لرقاقةٍ خاضعةٍ لإجهاد ضمن مستواها نفسه إذا كانت متانات الشدّ والانضغاط للرقاقة متساويةً:

X = المتانة المحورية أو الطولية (في الاتجاه 1)

Y = المتانة العرضانية (في الاتجاه 2)

S = متانة القصّ (في الإحداثيَّتين 1−2)

(الوحدات هنا هي قوة/سطح، أي الإجهادات المسموح بها). يبيّن الشكل 2-16 الاتجاهات الموافقة لكلٍّ من هذه المتانات؛ وتنجم المتانات بوضوح عن التطبيق المستقلّ للإجهادات الموافقة $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$.



الشكل 2-16: المتانات الأساسية لرقاقة مقوّاة محورياً (ضمن اتجاه واحد)

كما يوضّح المثال التالي أنه لا أهمية للإجهادات الرئيسيّة في تحديد متانة الرقاقة ثلاثية المناحي،. لنعتبر الرقاقة ذات الألياف أحادية المحور المبيّنة في الشكل 2-16، ولتكن المتانات الافتراضية للرقاقة في المستوي 1−2 كما يلي:

$$X = 50000 \text{ psi} \quad (350 \text{ Mpa})$$

$$Y = 1000 \text{ psi} \quad (7 \text{ Mpa})$$

$$S = 2000 \text{ psi} \quad (14 \text{ Mpa})$$

تكون أيضاً قيمُ الجساءة عاليةً في الاتجاه 1 ومنخفضةً في الاتجاه 2، حيث يمكن تصوّرُ ذلك بسهولة اعتماداً على الأساس الفيزيائي لتوجه الليف. لنتخيّل أن قيم الإجهادات في المستوى 1−2 هي:

$$\sigma_1 = 45000 \text{ psi} \quad (315 \text{ Mpa})$$

$$\sigma_2 = 2000 \text{ psi} \quad (14 \text{ Mpa})$$

$$\tau_{12} = 1000 \text{ psi} \quad (7 \text{ Mpa})$$

من الواضح هنا أن الإجهاد الرئيسيّ الأعظمي أصغر من المتانة الأعظمية. مع ذلك، بما أن σ_2 أكبر من Y، ينبغي أن تخفق الرقاقة تحت الإجهادات المُطبّقة (من المحتمل – ولكن ليس بالضرورة – حدوث ذلك من خلال تشقّق موازٍ للألياف). تكمن الملاحظة الأساسية هنا في أن المتانة دالة لــتوجه الإجهادات بالنسبة إلى الإحداثيات

الرئيسيّة للمادة لرقاقةٍ ثلاثية المناحي. على العكس من ذلك، تكون المتانة في المادة متماثلة المناحي مستقلّةً عن توجه المادة بالنسبة إلى الإجهادات المطبَّقة (ليس هناك توجه في المادة متماثلة المناحي).

إذا كانت للمادة مميزات مختلفة في حالتَي الشدّ والضغط – كما هو حال غالبية المواد المركّبة– يحتاج عندها الأمر إلى المتانات التالية:

X_t = المتانة المحورية أو الطولية تحت الشدّ

X_c = المتانة المحورية أو الطولية تحت الضغط

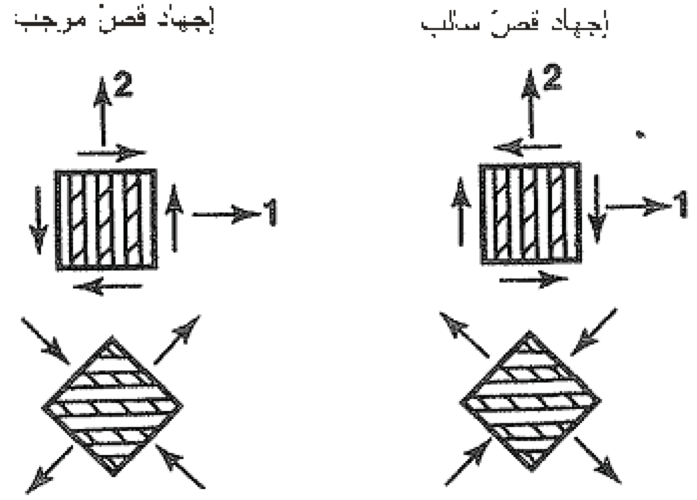
Y_t = المتانة العرضانية تحت الشدّ

Y_c = المتانة العرضانية تحت الضغط

S = متانة القصّ

تذكّرْ وجوبَ تعريف المتانات السابقة ضمن الإحداثيات الرئيسيّة للمادة.

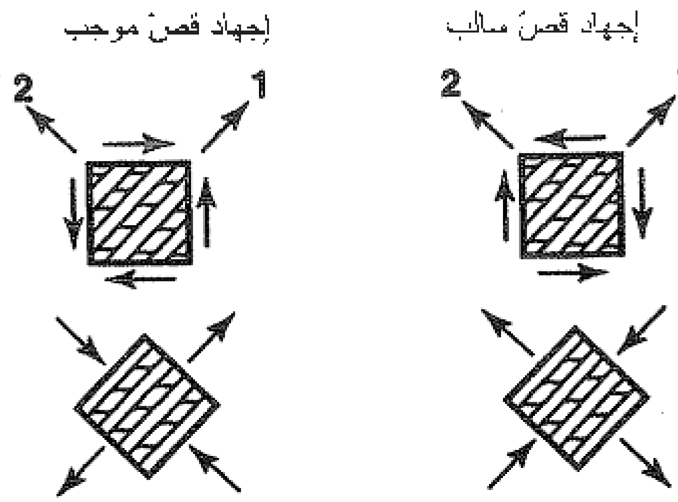
بسبب تعريف إجهاد القصّ البحت، يجب أن تكون متانة القصّ في الإحداثيات الرئيسيّة للمادة مستقلةً عن الاختلافات بين سلوكَي الشدّ متانة والضغط. يعني ذلك أن إجهاد القصّ – سواء كان موجباً أم سالباً – يأخذ القيمة الأعظمية نفسها ضمن الإحداثيات الرئيسيّة للمادة من أجل المواد التي تبدي سلوكاً مختلفاً في الشدّ عنه في الضغط. يمكن تبرير هذه الإفادة عبر ملاحظة الشكل 2-17 حيث تُطبَّق إجهادات قصّ موجبة وسالبة على رقاقة مقوّاة محورياً. ينسجم الاصطلاحُ هنا عن إشارة إجهادات قصّ موجبة مع اصطلاح باغانو (Pagano) وتشو (Chou) في أن إجهاد القصّ الموجب τ_{12} موجَّه في الاتجاه 2 الموجب فوق وجهٍ في الاتجاه 1 الموجب [2–8]. لاحظ أنه لا فرقاً حقيقياً في الشكل 2-17 بين حقول الإجهاد الموسومة بالموجبة وإجهادات القصّ السالبة. يشكل كلا مجالي الإجهاد صورتين كاملتين الواحد للآخر بالنسبة إلى مرآة، حتى عند تفحّصِ الإجهادات الرئيسيّة، كما في النصف السفلي من الشكل 2-17. وهكذا، تبقى القيمةُ الأعظمية لإجهاد القصّ نفسَها في كلتا الحالتَين لأن فعل الإجهادات على قطعتَي المادة يبقى نفسَه.



الشكل 2–17: إجهاد القصّ في الإحداثيات الرئيسيّة للمادة

مع ذلك، تعتمد القيمةُ الأعظمية لإجهاد القصّ ضمن إحداثيات مختلفة عن الإحداثيّات الرئيسيّة للمادة على إشارتة إجهاد القص. على سبيل المثال، عند زاوية 45^o بالنسبة إلى المحاور الرئيسيّة للمادة ينجم عن إجهادات القصّ الموجبة والسالبة إجهاداتٌ ناظمية متعاكسة الإشارة على الألياف، كما في الشكل 2-18. في حالة إجهاد قصّ موجب، تنجم هنا إجهاداتُ شدٍّ في اتجاه الألياف، بينما تظهر إجهاداتٌ ضغط عمودية على الألياف. من أجل إجهاد قصّ سالب، تتواجد إجهادات ضغط في اتجاه الليف بينما تحصل إجهادات الشدّ بشكل عرضاني بالنسبة إلى الألياف. مع ذلك، تختلف كلتا المتانات الناظمية ومعاملات الجساءات الناظمية للمادة تحت حمولة الشدّ عنه تحت حمولة الضغط.

وهكذا، تختلف القيمُ الظاهرية لمتانات القصّ ومعاملات جساءة القصّ من أجل إجهادات قصّ موجبة وسالبة مطبَّقة عند زاوية 45^o بالنسبة إلى الإحداثيات الرئيسيّة للمادة. يمكن تعميم هذه الحجج من المثال البسيط لرقاقة مقوّاة محورياً إلى المواد المحبوكة.



الشكل 2-18 إجهادات القصّ عند زاوية 45^o بالنسبة إلى الإحداثيات الرئيسيّة للمادة

المثالُ السابق ليس إلاّ واحدةٍ من الصعوبات التي نلاقيها عند الدراسة التحليليّة للمواد ثلاثية المناحي ذوات المميزات المختلفة في حالة الشدّ وفي حالة الضغط. لقد تمّ عرضُ المثال لتبيانِ كيفيةِ إمكانيةِ تحولِ معلومةٍ أساسيّة في الإحداثيات الرئيسيّة للمادة إلى توجهات إحداثياتٍ أخرى مفيدة استناداً إلى مجال الإجهاد المعتبَر. تُشكل هذه التحويلات مؤشرات بسيطة على أن المعلومةَ الأساسيّةَ – أسواء كانت متانات أم معاملات جساءة – تكون في شكل موتّر (tensor)، وتخضع بذلك إلى القواعد المتحكمة بتحويلات الموتّر المعطاة في الملحق أ.

لن نغوص أكثر في تفاصيل موضوع المواد ذات المتانات ومعاملات الجساءة المختلفة في حالة الشدّ عنها في حالة الضغط (إلاّ من أجل تقديم قيم مختلفة للمتانات) وذلك لأن البحوث حول هكذا مواد لا تزال في بداياتها. مع ذلك، يُعتبَر هذا الموضوعُ مهماً جداً ضمن المجال العام للمواد المركّبة – إن لم يكن ضمن الفئة الخاصّة للمواد المركّبة التصفيحيّة المقوّاة ليفيّاً–. كان أمبارتسوميان (Ambartsumyan) وزملاؤه أولَ من قام ببحوثٍ عن هذا الموضوع في سنة 1965 [2–9]. استقصت قلّةٌ من العلماء الأمريكيين كذلك بعضاً من جوانب ميكانيك هذه المواد (راجع جونز Jones [2–10]، بيرت (Bert) [2–11] وبيرت (Bert) وريدي (Reddy) [2–12]).

2.8.2 التحديد التجريبي للمتانة والجساءة

يمكن إجراء بعض التجارب الأساسية في حالة المواد ثلاثية المناحي من أجل قياس مميزاتها في الإحداثيات الرئيسيّة للمادة. تبيّن هذه التجارب – شريطة إجرائها بشكلٍ جيّد– المميزات المميّزة لكلتا المتانة والجساءة في المادة. تذكّرْ أن مميزات الجساءة هي:

E_1 = معامِل يونغ في الاتجاه 1

E_2 = معامِل يونغ في الاتجاه 2

$\upsilon_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}$ في $\sigma_1 = \sigma$ وجميع الإجهادات الأخرى معدومة (تساوي صفراً)

$\upsilon_{21} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ في $\sigma_2 = \sigma$ وجميع الإجهادات الأخرى معدومة (تساوي صفراً)

G_{12} = معامِل القصّ في الإحداثيّتَين 1−2

حيث تكون ثلاثة مقادير فقط من بين $E_1, E_2, \upsilon_{12}, \upsilon_{21}$ مستقلّة، أمّا مميزات المتانة فهي:

X = المتانة المحورية أو الطولانية (في الاتجاه 1)

Y = المتانة العرضانية (في الاتجاه 2)

S = متانة القصّ (في الإحداثيّتَين 1−2)

حيث يمكن أن يكون لــ X و Y قيمٌ مختلفة في حالتَي الشدّ والضغط.

نصف الآن عدةَ تجارب يمكن عبرها الحصولُ على المعلومات الأساسية السابقة عن الجساءة والمتانة. من أجل كثيرٍ من المواد المركّبة – ولكن ليس جميعها– يكون سلوك الإجهاد– الانفعال خطّيّاً ابتداءً من قيمةٍ معدومة للحمولة ولغاية القيمة النهائية لها أو حمولة الكسر. إن هذا السلوكَ الخطّيَّ نمطيٌّ من أجل المواد المركّبة إيبوكسي– زجاج، ويكون سلوكاً معقولاً جداً في حالة المواد المركّبة إيبوكسي– بور وإيبوكسي–غرافيت، إلاّ فيما يخصّ سلوك القصّ الذي يكون لا خطياً بدرجةٍ كبيرة حتى الكسر.

هناك عنصرٌ مفتاحيٌّ مهمٌّ في التحديد التجريبي لمميزات الجساءة والمتانة للرقاقة، وهو تطبيق حالة إجهادٍ منتظم في العيّنة. من السهل تحقيق مثل هذه الحمولة في المواد متماثلة المناحي. مع ذلك، تُدخِل ثلاثيّةُ المناحي، في ما يخص المواد المركّبة، بين الإجهادات الناظمية وانفعالات القصّ، وإجهادات القصّ والانفعالات الناظميّة وانفعالات

القصّ، وذلك عندما تُحمَّل هذه المواد ضمن إحداثيّاتٍ غيرِ رئيسيّة للمادة ، حيث تُعطى عبارات الإجهاد – انفعال بالمعادلة (2.88). وهكذا، علينا توخّي الحذر بخصوص الحصول على المعلومة المرغوب بها. يُعتبَر أخذُ الحيطة والحذر هذا مظهراً نمطياً للمعرفة المطلوبة من أجل معالجة المواد المركّبة.

قبل أن نتدارس أيّاً من الاختبارات الخاصّة، علينا تفحّص إجرائية "الاختبار" أو القياس نفسها. ففي نهاية الأمر، الاختبار ليس بديلاً عن التفكير! إن الاختبارات كثيراً ما تكون حذقةً ودقيقة في انعكاساتها، وبالتالي علينا:

- فهم الهدف من الاختبار
- تصوّر وتوقع النتائج المتوقَّعة
- معرفة فرص حدوث الأخطاء
- التساؤل عن مدى صلاحية الاختبارات "المعيارية" للمعادن عند استخدامها من أجل المواد المركّبة

نتّفق على الأرجح على المعايير التالية لجودة اختبارِ عيّنةٍ ما:

(1) يجب أن يحصل الإجهادُ الأعلى في منطقة القياس (وهي المنطقة ذات المساحة الأصغر للمقطع العرضاني) بحيث يحصل الإخفاق في منطقة القياس.

(2) يجب أن يتواجدَ مجال إجهادٍ منتظم في جميع أرجاء منطقة القياس، وذلك لإبطال آثار الإخفاق الحجمي الإحصائي (على سبيل المثال، لا بدّ من وجود توزيع واقعي للأعطاب المألوفة من أجل أن يكون الاختبار ممثلاً بشكلٍ جيّد للمادة الحقيقيّة).

(3) لا بدّ من إزالة الإجهادات "الأخرى" غير المرغوب بها في منطقة القياس (مثلاً، حذف إجهاداتِ الانحراف الناتجة من آلياتِ تطبيق الحمولة مثل عدم استقامة مقابضُ التحميل).

(4) وبشكلٍ بديل عن (3)، يجب اعتبار بعض آثار النهايات والأطراف (مثل تزاوج وترابط القصّ– استطالة) في عملية اختزال المعطيات.

(5) يجب أن تكون مادةُ العيّنة وإجرائيةُ الاختبار ممثِّلتَين للتطبيق المُراد من وجهات النظر التالية:

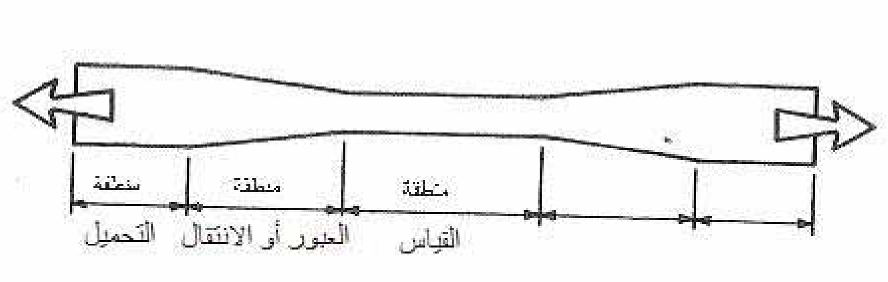
(أ) التصنيع (لا يمكن لعيّنةٍ شريطيّة في أية حالة أن تمثّل بنيةً ناتجة من لف الخيوط)

(ب) آثار الأبعاد (لا يمكن للأبعاد المميِّزة للعيّنة – مثل السماكة– مقاربة أيٍّ من الأبعاد المميِّزة للمادة – مثل حجم الفجوات أو قطر الليف، إلخ).

(ج) البيئة المحيطة (يجب أن تكون مقادير سرعة التحميل ومحتوى الرطوبة ودرجة حرارة العيّنة مماثلةً – إن لم تكن مطابقةً– للتطبيق الإنشائي الفعلي)

سوف نستخدم هذه المعايير لتقييم العديد من عيّنات الاختبار.

وإضافة إلى ذلك، ومهما كانت عيّنة الاختبار، هناك بشكل طبيعي بعض "المناطق ذات الاهتمام". على سبيل المثال، لنعتبرْ عيّنة الشدّ الموصوفة تخطيطياً في الشكل 2-19. تظهر هنا ثلاث مناطق: (1) منطقة التحميل حيث تُطبَّق الحمولة على العيّنة، (2) منطقة القياس التي يجب أن تخضع لإجهاد منتظم، وأن تكون موقع الإخفاق عند الحمولة الأعظمية، و(3) منطقة الانتقال التي يتمّ فيها الانتقال اللطيف (بدون تركّيز إجهادات) من منطقة التحميل إلى منطقة القياس. سوف ندرس عدة اختبارات صُمِّمت لقياس متانات ومعاملات جساءة المواد المركّبة. سنكون دوماً واعين ومُدركين لأهمية كلٍّ من معايير عيّنات الاختبار وأهمية مناطق العيّنة ذات الأهمية.



الشكل 2-19: مناطق العيّنة ذات الأهمية

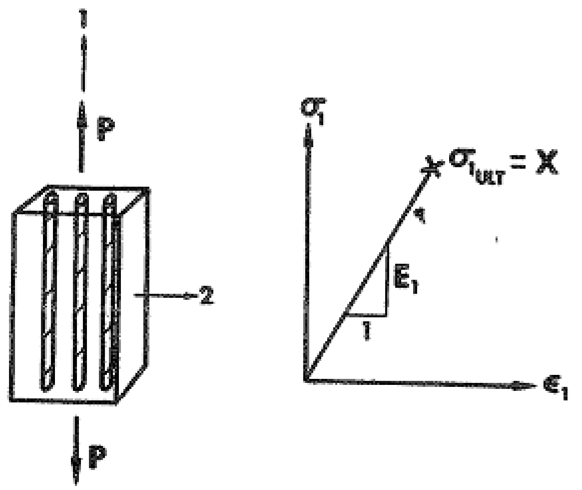
لنعتبر أولاً شدّ أحادي المحور (uniaxial loading) في الاتجاه 1 على قطعة مستوية لرقاقة مقوّاة محورياً، حيث نبيّن في الشكل 2-20 منطقة القياس فقط. لا تحتوي سماكة العيّنة على رقاقةٍ واحدةٍ فقط، بل على مجموعة رقاقات لها نفس التوجيه (سيكون

من الصعب بمكان التعامل مع رقاقة منفردة وذلك لأنها سهلة العطب جداً). يُقاس الانفعالان ε_1 و ε_2، ويكون بالتعريف:

$$\sigma_1 = \frac{P}{A}, \quad E_1 = \frac{\sigma_1}{\varepsilon_1}, \quad \upsilon_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}, \quad X = \frac{P_{ult}}{A} \qquad (2.103)$$

حيث A مساحة الفقرة العرضاني في مقطع القياس العمودية على الحمولة المُطبَّقة، و P_{ult} هي الحمولة النهائية على العيّنة. ولكن كيف يمكننا تحقيقُ مقطعِ قياس معقولٍ يتّفق مع معايير عيّنة الاختبار؟ لنتفحّص بعضاً من عيّناتٍ الاختبار الخاصّة لنرى كيفية تحقيقها للمعايير.

إن عيّنة اختبار الشدّ وفق المواصفة ASTM D 638 بسيطةٌ نوعاً ما، وتحتاج إلى تشغيلٍ سهلٍ من أجل تشكيل الانتقال المستدير من منطقةِ تحميل عريضة إلى منطقة قياس ضيّقة. يبلغ طولُ منطقةِ القياس حوالى ربعَ طول العيّنة، كما يبيّن الشكل 2-21. يحدث الإخفاق النمطيّ في منطقة الانتقال. لهذا، لا تحقق العيّنة معيار الإخفاق في منطقة القياس. مع ذلك، بما أن قيمَ متانة الإخفاق المحققة في هذه العيّنة هي بدون تقدير قيم المتانة الحقيقيّة، تعتبر هذه العيّنة عيّنةً عمليّة.

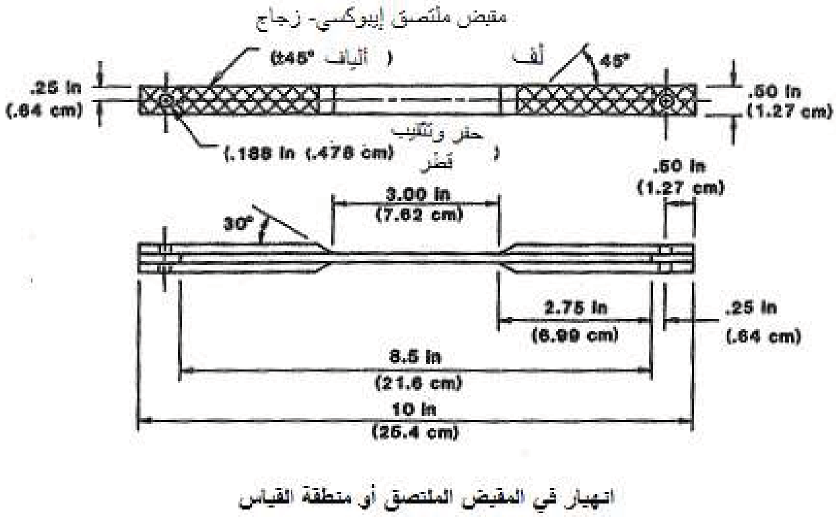


الشكل 2-20: تحميل محوري أحادي الاتجاه 1



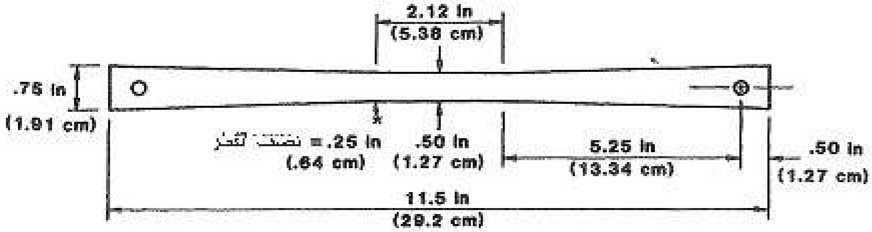
الشكل 2-21 عيّنة شدّ وفق المواصفة ASTM D 638

تأتي بعد ذلك عيّنة الشدّ مستقيمة الجوانب التي تُظهر منطقة انتقال يتم تشكيلها من خلال تغيير السماكة (بدلاً من تغيير العرض في عيّنة ASTM D 638)، كما يبيّن الشكل 2-22. حصل الإخفاقات نمطياً، إمّا في المقابض الملتصقة أو في منطقة القياس. إذا أصاب الإخفاق المقابض الملتصقة، لا يمكن عندها على الإطلاق اعتبارُ حمل الإخفاق قياساً لمتانة المادة المختبرة!



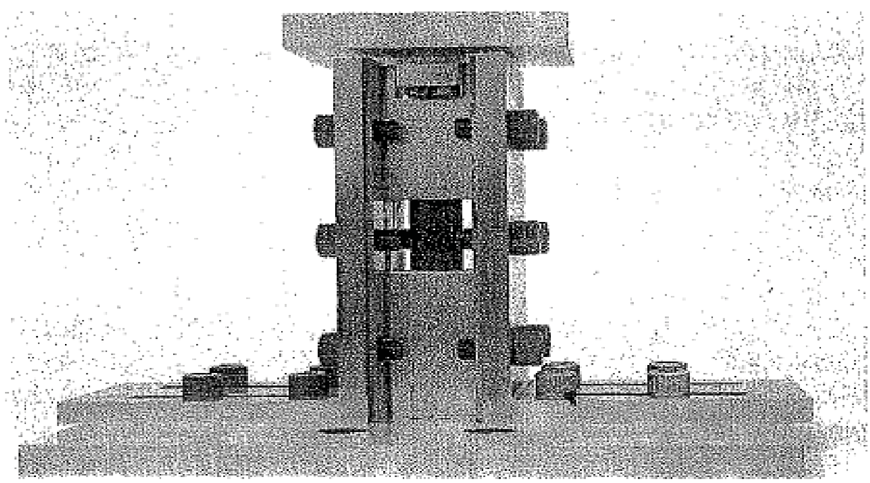
الشكل 2-22 عيّنة الشدّ مستقيمة الجانب

وأخيراً، تتطلّب عيّنة الشدّ القوسيّة تشغيلاً كبيراً لإيجاد منطقة انتقالٍ متدرجةٍ بشكلٍ كبير، كما في الشكل 2-23. إضافة إلى ذلك، تكون هذه العيّنة أطول بكثير من العيّنتَين السابقتَين، ومع ذلك، يحدث الإخفاق بشكل متّسق في منطقة القياس، ولهذا تكون العيّنةُ القوسيّة هي العيّنةَ الوحيدةَ من بين العيّنات الثلاث التي تحقّق المعيار الرئيسيّ للعيّنة الجيّدة.



الشكل 2-23: عيّنة شدّ القوسيّة (Bow-Tie)

عند تطبيق حمولة ضغط، سوف تنبعج ببساطة عيّنات الشدّ الطويلة واللّيّنة. وهكذا، لا بدّ من وجود دعامة جانبية لمنع حدوث الانبعاج، كما يبيّن الشكل 2-24 الموافق لمُثبّت اختبار الضغط بواسطة صفائح دعم جانبية. تكون العيّنة هنا – بشكل أساسيّ– طويلةً بقدر طول المُثبّت، ولا يمكن رؤية إلاّ قسم صغير من العيّنة، وذلك حيث لا تكون مدعّمة.



الشكل 2-24: مُثبّت اختبار الضغط

لنعتبر الآن إجرائيةَ القياس – التالي في الأهمية– والموافقة لتحميل شدٍّ محوري في الاتجاه 2 على قطعة مستوية لرقاقة مقوّاة محورياً، كما في الشكل 2-25. وكحالة التجربة الأولى، يُقاس ε_1 و ε_2، ويكون:

$$\sigma_2 = \frac{P}{A}, \quad E_2 = \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2}, \quad \upsilon_{12} = -\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}, \quad Y = \frac{P_{ult}}{A} \qquad (2.104)$$

حيث يمثل A – مرّةً أخرى– مساحة الفقرة العرضاني في منطقة القياس، و P_{ult} الحمولة النهائية على العيّنة.

يجب أن تحقّق مميزات الجساءة العلاقات العكسية:

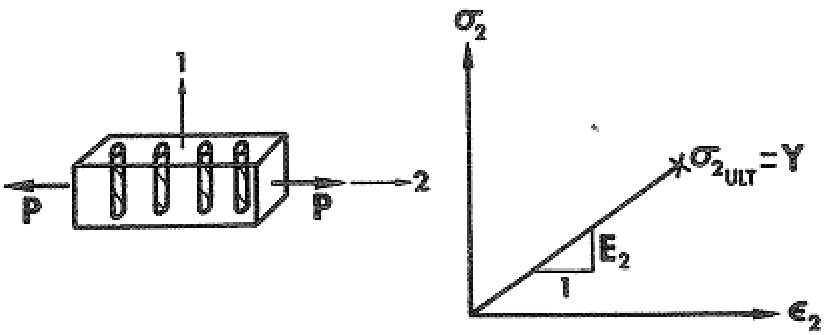
$$\frac{\upsilon_{12}}{E_1} = \frac{\upsilon_{21}}{E_2} \qquad (2.105)$$

وفيما عدا ذلك تتحقّق إحدى الإمكانيّات التالية:

(1) تمّ قياس المعطيات بشكل خاطئ

(2) تمّ إجراء الحسابات بشكلٍ خاطِئ

(3) لا يمكن توصيف المادة من خلال علاقات إجهاد– انفعال خطّيّة مرنة



الشكل 2-25: تحميل محوري أحادي الاتجاه 2

لنعتبر – من أجل القياس المهم الثالث الموافق لتحديد الخاصتّين المتبقّيتَين G_{12} و S– تحميل شدٍّ محوري يعمل زاوية 45^o مع الاتجاه 1 على قطعة مستوية من الرقاقة – أي ما يُعرَف باختبارٍ خارج المحور بزاوية 45^o – كما يبيّن الشكل 2-26. عبر قياس ε_x لوحده، يكون بوضوح:

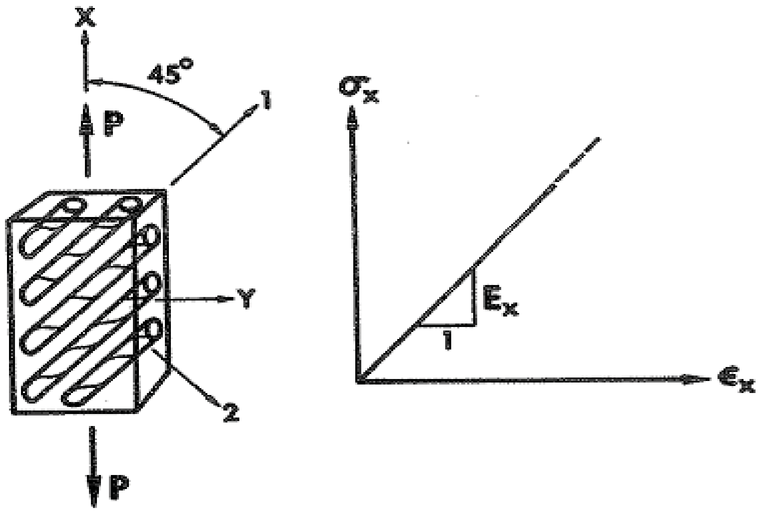
$$E_x = \frac{P/A}{\varepsilon_x} \qquad (2.106)$$

بعد ذلك، وباستعمال علاقات تحويل المعامِل في المعادلة (97.2)، يكون:

$$\frac{1}{E_x} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{E_1} - \frac{2\upsilon_{12}}{E_1} + \frac{1}{G_{12}} + \frac{1}{E_2}\right] \qquad (2.107)$$

حيث G_{12} هو المجهول الوحيد. إذاً:

$$G_{12} = \frac{1}{\frac{4}{E_x} - \frac{1}{E_1} - \frac{1}{E_2} + \frac{2\upsilon_{12}}{E_1}} \qquad (2.108)$$

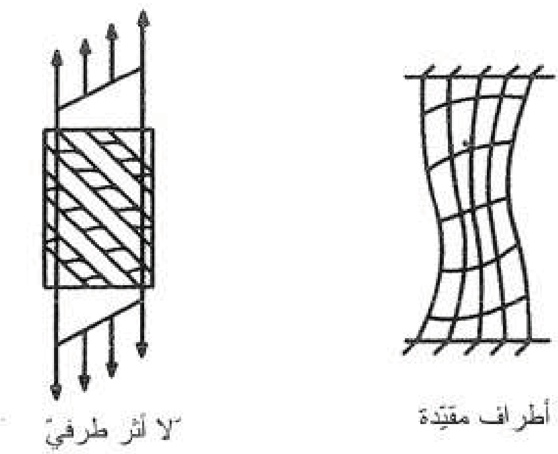


الشكل 2-26: تحميل محوري أحادي يعمل زاوية 45^o مع الاتجاه 1

ووفقاً لذلك، نكون افتراضاً قد وجدنا معامِل القصّ G_{12}. مع ذلك، لا توجد علاقة كالمعادلة للمعادلة (2.108) من أجل المتانات، وذلك لأن المتانة لا تتحوّل مثل الجساءة. وهكذا لا يمكننا الاعتماد على مثل هذه التجربة لتعيين S – إجهاد القصّ الأقصى (متانة القصّ)– لأنه لم يتمّ تحريض نمطِ تشويه قصّ يرافقه إخفاق في القصّ. لا بدّ إذاً من استعمال مقاربات أخرى للحصول على S.

مع ذلك – وقبل اعتبار مقارباتٍ أخرى لتعيين متانة القصّ– من المناسب التعليق على سهولة إنجاز اختبار الـ °45 خارج المحور. من الواضح من المعادلة

(2.87) وبسبب وجود الحدّ S_{16}، أن هناك تزاوجاً (ارتباطاً) بين الإجهاد الناظمي σ_x وانفعال القصّ γ_{xy}. وهكذا، وبالرغم من الإشارة إلى قوةٍ وحيدةٍ فقط P في الشكل 26-2، لا يمكن إجراء التجربة بشكلٍ مناسب ما لم تكن القوةُ مطبّقةً بشكلٍ منتظم ولغاية الأطراف، وما لم تكن أطرافُ الرقاقة – بالإضافة إلى ما سبق– حرةً وقابلةً للانفعال بالطريقة المبيّنة في يسار الشكل 2-27. وفي حالة أخرى، إذا كانت أطرافُ نهايات الرقاقة مثبّتةً في فكي آلة التحميل مثلاً، وفي حال تطبيق محصلة قوة P، فإن الرقاقة لن تخضع لتشوه قصّ، وبالتالي سوف تتعرّض للتشوه بالطريقة المبيّنة في يمين الشكل 27-2 [2–13]. في حال كانت العيّنة طويلةً كفايةً مقارنةً بعرضها، يكون الانفعال في منتصف مثل هذه العيّنة مماثلاً للقصّ والاستطالة للرقاقةٍ غير المقيّدة المبيّنة في الشكل 2-27. يعني ذلك أنه بعيداً عن آثار نهايات سانت فونانت[1] (Saint-Venant)، فإن نمط الاختبار لايهم. ومع ذلك، فإننا لا نملك حرّية الاختيار عادةً من أجل استخدامِ مقدارٍ كبيرٍ من المادة للحصول على منطقة قياسٍ مفيدٍ لا يحوي آثار سانت – فونانت.



الشكل 2-27: انفعال رقاقة مقوّاة محورياً خاضعة لحمولة تصنع زاوية 45^o مع الألياف

[1] صرّح سانت– فونانت بأن حمولتَين مختلفتَين متكافئتَين سكونياً تُنتجان إجهاداتٍ وتشوهاتٍ متماثلةً على مسافةٍ بعيدةٍ كفايةً عن منطقة تطبيق الحمولتين. وهكذا، إذا طبّقنا حمولتَين متكافئتَين سكونياً وكانت نقطة الملاحظة والمراقبة قريبةً من النهاية الطرفيّة حيث يتمّ تطبيقُ الحمولة، فإن الإجهادات والانفعالات سوف تكون مختلفةً من أجل كل حمولة، ومنه تسمية آثار نهايات سانت–فونانت.

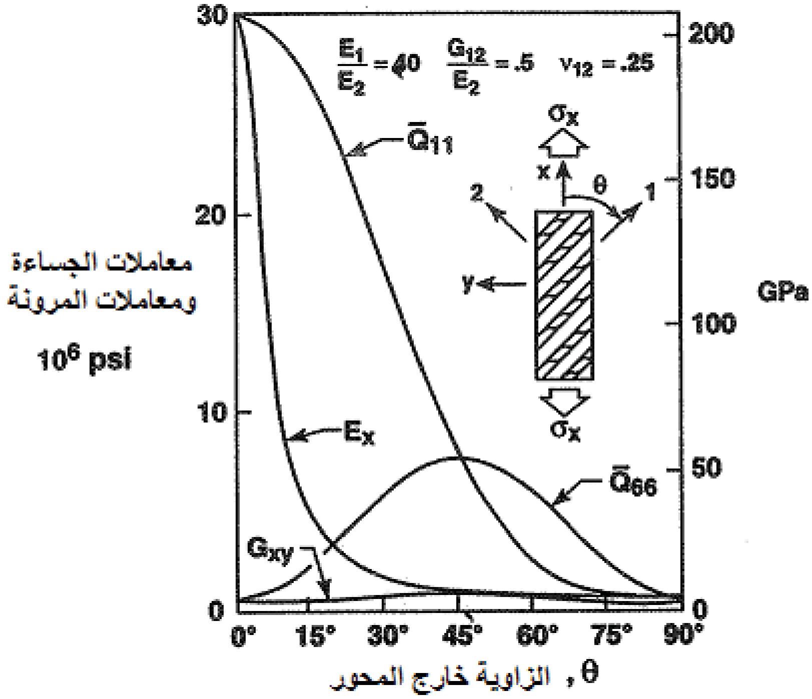
هناك خاصّة إضافية للاختبار خارج المحور يبيّنها الشكلان 2-26 و 2-27، وهي أننا لا نقيس فعلاً E_x. بدلاً من ذلك، إننا نقيس الجساءةَ المختزلة المحوَّلة $\overline{Q}_{11}$ شريطةَ ألاّ تكون نسبة الطول إلى العرض عاليةً جداً في العيّنة. ينجم سببُ هذا الاختلاف عن أن حالةِ الانفعال المقبولة هندسياً في العيّنة يعتمد على هندسة العيّنة بشكلٍ كبير. إذا كانت العيّنةُ طويلةً ورقيقة، غدت الشروط الحدّيّة عند مقابض أطراف العيّنة بلا نتائج استناداً إلى سانت–فونانت. ووفق ذلك، نحصل على انفعال محوريّ صرف حيث:

$$\sigma_x = E_x \varepsilon_x \qquad (2.109)$$

مع ذلك، إذا كانت العيّنةُ قصيرةً وعريضة، اقتضى القيدُ الطرفيّ $\sigma_x \neq 0$ و $\varepsilon_y = \gamma_{xy} = 0$ علاقةَ إجهاد– انفعال:

$$\sigma_x = \overline{Q}_{11} \varepsilon_x \qquad (2.110)$$

وهي منسجمة مع المعادلة (2.84). ويجب على القارئ أن يتحقّق من المعادلتَين (2.109) و(2.110) عبر فرضِ الشروط المذكورة سابقاً و اشتقاق (استنتاج) علاقة σ_x. ويتوضّح جيداً أن الاختلافَ مهمٌ بين E_x في المعادلة (2.109) و $\overline{Q}_{11}$ في المعادلة (2.110) في الشكل 2-28 الموافق لعيّنات من إيبوكسي– غرافيت. تكون قيمةُ $\overline{Q}_{11}$ هنا – من أجل حمولة خارج المحور تصنع زاوية 30^o مع اتجاه الليف– أكبرَ بـــ 10.4 مرّة من E_x! وتوجد اختلافاتٌ مشابهة لـــ $\overline{Q}_{66}$ بدلالة G_{xy}. يكون الفرق بين $\overline{Q}_{11}$ و E_x أصغرَ في حالة المواد ذات القيم المنخفضة لـــ E_1/E_2 منه في حالة المواد إيبوكسي–غرافيت. ويكمن المعنى العملي للاختلاف بين $\overline{Q}_{11}$ و E_x في وجوبِ كونِ نسبةِ الطول إلى العرض للعيّنات خارج المحور كبيرةً كفايةً من أجل ضمان قياسنا لـــ E_x وليس لـــ $\overline{Q}_{11}$. قدّم باغانو (Pagano) وهالبين (Halpin) تحليلاً كمياً لأثر نسبة الطول إلى العرض على قيمة E_x الظاهرية. لاحظْ – عند هذه النقطة– أنه بالرغم من اعتقادنا بأننا قمنا بقياس G_{12} عبر الإجرائية التي قادت إلى المعادلة (2.108) فإن قيمة E_x قد قُدّرت بشكلٍ مغالٍ جداً. وهكذا، تكون أيضاً قيمة G_{12} من المعادلة (2.108) قد قُدّرت بشكلٍ مغالٍ جداً، وبالتالي فهي قيمةٌ غيرُ موثوقٍ بها.



الشكل 2− 28: معاملات الجساءة $\overline{Q}_{11}$ و $\overline{Q}_{66}$ بدلالة المعامِلَين E_x وG_{xy}

يتمثّل البحثُ المستمرّ من أجل تحديد معامِل القصّ ومتانة القص في إجراء مجموعة من الاختبارات. يُناقش هنا عدةَ اختبارات، وذلك بسبب وجود عيوبٍ في أيٍّ منها – كما سيتبين– وبسبب عدم وجود اتفاقٍ عامٍّ – إلى حدّ ما– على الطريقة الأمثل لقياس مميزات القصّ.

يتضمّن اختبار أنبوب الفتل الذي وصفه ويتني (Whitney)، باغانو (Pagano) وبايبس (Pipes) [2−14] أنبوباً رقيقاً دائريّ الشكل خاضعاً للعزم T عند الأطراف، كما يبيّن الشكل 2-29. يُصنَع الأنبوبُ من عدة رقاقاتٍ، تتراصف اتجاهاتُ أليافها جميعاً إمّا بشكلٍ موازٍ لمحور الأنبوب أو بشكل محيطيّ. هناك ضمانةٌ معقولة لوجود حالة إجهادٍ ثابتٍ عبر سماكة الأنبوب شريطةَ أن تكون هذه السماكة عدة رقاقات فقط. مع ذلك، يمكن أن تظهر بعض صعوبات المقبض الطرفي الجدّيّة بسبب الطبيعة الرقيقة للأنبوب. عموماً، يجب بناءُ سماكة نهايات الأنبوب عبر تحقيق لصق طبقات

إضافية من أجل إدخال الحمل بطريقةٍ يحصل معها الإخفاق في المنطقة المركزية للأنبوب ذات الإجهاد المنتظم (تذكّر معايير عيّنة الاختبار). إن تصنيعَ أنابيب الفتل ذو كلفة عالية، ويحتاج إلى مجموعة أدواتٍ متطوّرة. إذا تم قياس انفعال القصّ γ_{12} عند تطبيق إجهاد قصّ τ_{12} يكون:

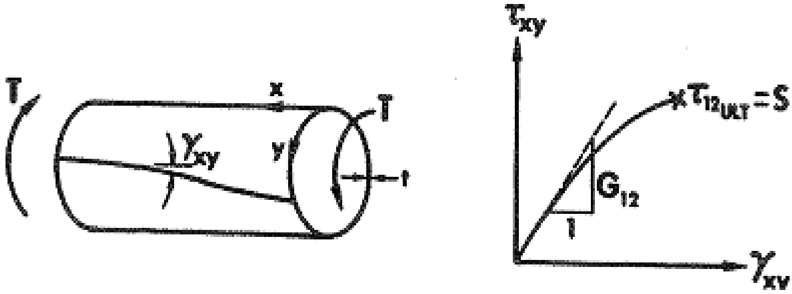
$$\tau_{12} = \frac{T}{2\pi r^2 t} \qquad (2.111)$$

$$S = \tau_{12_{ult}} = \frac{T_{ult}}{2\pi r^2 t} \qquad (2.112)$$

ويكون مُعامِل القصّ أيضاً:

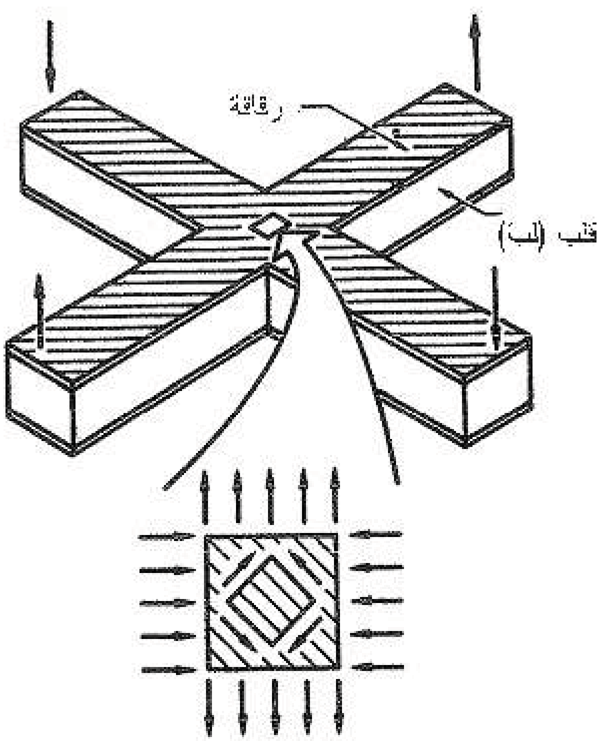
$$G_{12} = \frac{\tau_{12}}{\gamma_{12}} \qquad (2.113)$$

من أجل القسم الخطّيّ من منحنى الإجهاد– انفعال. ومع ذلك، يكون منحنى إجهاد القصّ– انفعال القصّ النموذجي غيرَ خطّيّ تماماً كما يوضّح الشكل 2-29. استناداً إلى ذلك، يجب استخدام كامل منحنى الإجهاد – انفعال بدلاً من المعامِل الابتدائي "المرن" في التحليلات العملية، كما فعل هاهن (Hahn) وتساي (Tsai) [2–15] أو جونز (Jones) ومورغان (Morgan) [2–16]. مع ذلك، أُنجزت غالبية تحليلات المواد المركّبة باستخدام المعامِل المرن الابتدائي من المعادلة (2.113).

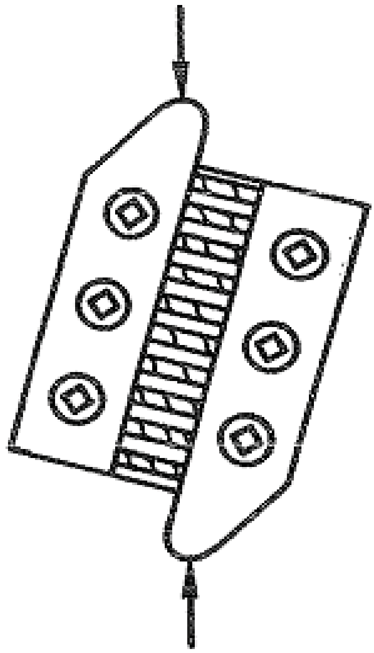


الشكل 2-29: اختبار أنبوب الفتل

يوجد اختبارٌ آخر لتحديد معامِل القصّ ومتانة القصّ في المادة المركّبة هو اختبارُ الجائز المتصالب ذي بنية الشطيرة (السندويتشيّة) لـــ شوكي (Shockey)، الذي تمّ توصيفه من قبل وادوبس (Waddoups) [2–17]. تُشكل الرقاقة المركّبة التي يتم تقييمها وجه الجائز المتصالب الذي يقلُّ قيمة معامِل المرونة لقلبه بمقدار مرتبتَين عن القيمة الموافقة للرقاقة. تخضع تشكيلة الجائز المتصالب إلى الحمولتين المبيّنة في الشكل 2-30. تنجم عن ذلك حالةُ إجهادٍ مستوٍ يمثّل افتراضاً – عند زاويةِ °45 بالنسبة إلى المحور x– إجهادِ قصٍّ صرف منتظم. مع ذلك، وبسبب تركيز الإجهادات الحتمي عند زوايا الصليب– فإنه لا يتمّ الاقتراب من حالةِ الإجهاد المنتظمٍ إلاّ في مركز الصليب فعلاً. يبدأ الإخفاق عند زوايا الصليب، وبذلك، لا يمكن النظر إلى اختبار الجائز المتصالب – حتى مع زوايا مدوّرة– كأداة قياسٍ مناسبة لمتانة القصّ وجساءته.



الشكل 2-30: اختبار الجائز المتصالب ذي بنية الشطيرة



الشكل 2-31: اختبار قصّ السكة

يوجد اختبار آخر لتحديد متانة القصّ ومعامِل القصّ وهو اختبار قصّ السكة الذي وصفه كلّ من ويتني (Whitney) وستانسبارغر (Stansbarger) وهاوِل (Howell) [2–18]. بشكلٍ جوهريّ، تُثبَّت بواسطة البراغي أربعُ قطع من قضبان سكّةٍ على طول طرفَين متقابلَين لرقاقة، كما يبيّن الشكل 2-31 تخطيطيّاً. يبرزُ زوجٌ من القضبان عند أعلى الصفيحة الطبقية، بينما يبرز الزوج الآخَر عند أسفلها. توضع المجموعةُ بين رؤوس إطارٍ تحميل وتُضغط، فيحدث قصّ في الرقاقة. مع ذلك، يجب اختيار هندسة مثل هذه العيّنة بشكلٍ حذر لتأخذ بعين الاعتبار الآثار الطرفيّة مثل الأطراف الحرّة عند أعلى الرقاقة وأسفلها. يمكن لهذه التأثيرات وغيرها أن تقودَ إلى تقييمات للمتانة أخفضَ من قيمِ الواقع الفيزيائي. مع ذلك، يستعمل اختبارُ قصّ السكة بشكل واسع في صناعة الطائرات، لأنه اختبار بسيط وزهيد الكلفة، ويمكن استعماله للاختبار عند درجات الحرارة سواء كانت أعلى من درجة حرارة الغرفة أم أخفض منها.

3.8.2 خلاصة للمميزات الميكانيكيّة

يعطي الجدول 2-3، كتوضيحٍ لنتائج القياسات الآنفة الذكر، المميزات الميكانيكيّة لأربع مواد مركّبة مقوّاة محورياً: إيبوكسي–زجاج، إيبوكسي–بور، إيبوكسي–غرافيت وإيبوكسي–كيفلار ®49.

الجدول 2–3 أ: المميزات الميكانيكيّة النمطيّة لبعض المواد المركّبة (الواحدات المستخدَمة في الولايات المتحدة)

الخاصّة الفيزيائيّة	مواد مركّبة مقوّاة محورياً			
	إيبوكسي–زجاج	إيبوكسي–بورون	إيبوكسي–غرافيت	إيبوكسي–كيفلار ®49.
E_1	7.8×10^6 psi	30×10^6 psi	30×10^6 psi	11×10^6 psi
E_2	2.6×10^6 psi	3×10^6 psi	0.75×10^6 psi	0.8×10^6 psi
υ_{12}	0.25	0.3	0.25	0.34
G_{12}	1.3×10^6 psi	1×10^6 psi	0.375×10^6 psi	0.3×10^6 psi
X_t	150×10^3 psi	200×10^3 psi	150×10^3 psi	200×10^3 psi
Y_t	4×10^3 psi	12×10^3 psi	6×10^3 psi	4×10^3 psi
S	6×10^3 psi	18×10^3 psi	10×10^3 psi	6.4×10^3 psi
X_c	150×10^3 psi	400×10^3 psi	100×10^3 psi	40×10^3 psi
Y_c	20×10^3 psi	40×10^3 psi	17×10^3 psi	20×10^3 psi

تُعدّ هذه القيم ممثلة للمتانات ولمعاملات الجساءة الابتدائية التي يمكن الحصول عليها في هذه المواد (باستثناء الإيبوكسي– غرافيت الذي يتوفر وفق عدة تنويعات). مع ذلك، تعتبر هذه القيم لأغراض التوضيح فقط، ولا يجب استخدامها من أجل تصميم الإنشاءات المركّبة، حيث يتوجّب استخدام المعلومات الحديثة فقط حول الليف الخاصّ وجملة المادة الرابطة. مرة أخرى، تذكّرْ خاصيّةَ الخطيّة الأساسيّة لنتائج الإجهاد الناظمي– الانفعال الناظمي واللاخطية لنتائج إجهاد القص– تشوه القص (وخاصةً من أجل إيبوكسي–بور وإيبوكسي–غرافيت). نبيّن في الملحق ج منحنيات نمطيةً للإجهاد–

انفعال الإجهاد من أجل المواد الثلاثة الأولى. تتغيّر القيمُ الخاصّة عندما يتغيّر محتوى المادة المركّبة من اللّيف والمادة الرابطة. سيتم في الفصل الثالث عند مناقشة الميكانيك الميكروي للرقاقة وصف الحججَ المنطقية وراء تغيّر هذه القيم. وسيتم استعمال القيم المذكورة في الجدول 2-3 في أمثلة المسائل والوظائف ضمن هذا الكتاب، ولقد تمّ في الواقع استعمالها فعلاً عند الحصول على الشكلَين 2-11 و2-12.

الجدول 2–3 ب: المميزات الميكانيكيّة النمطيّة لبعض المواد المركّبة (واحدات النظام الدولي)

الخاصّة الفيزيائيّة	مواد مركّبة مقوّاة محورياً			
	إيبوكسي– زجاج	إيبوكسي– بورون	إيبوكسي– غرافيت	إيبوكسي–كيفلار 49®
E_1	54 غيغا باسكال	207 غيغا باسكال	207 غيغا باسكال	76 غيغا باسكال
E_2	18 غيغا باسكال	21 غيغا باسكال	5 غيغا باسكال	5.5 غيغا باسكال
υ_{12}	0.25	0.3	0.25	34.0
G_{12}	9 غيغا باسكال	7 غيغا باسكال	2.6 غيغا باسكال	2.1 غيغا باسكال
X_t	1035 ميغا باسكال	1380 ميغا باسكال	1035 ميغا باسكال	1380 ميغا باسكال
Y_t	28 ميغا باسكال	83 ميغا باسكال	41 ميغا باسكال	28 ميغا باسكال
S	41 ميغا باسكال	124 ميغا باسكال	69 ميغا باسكال	44 ميغا باسكال
X_c	1035 ميغا باسكال	2760 ميغا باسكال	689 ميغا باسكال	276 ميغا باسكال
Y_c	138 ميغا باسكال	276 ميغا باسكال	117 ميغا باسكال	138 ميغا باسكال

نستطيع الآن – بعد تعريف معاملات الجساءة والمتانات الأساسية ضمن الإحداثيات الرئيسيّة للمادة – أن ننتقل – في الفقرة 9.2– إلى تحديد كيفية سلوك الرقاقة ثلاثية المناحي الخاضعة لحالاتِ إجهادٍ ثنائيّ المحور. يجب هنا أن نجمعَ كاملَ

المعلومات الموافقة للإحداثيات الرئيسيّة للمادة من أجل تعريف جساءة ومتانة الرقاقة من أجل توجهات اعتباطية وحالات إجهاد ثنائيّة المحور اعتباطية.

مجموعة المسائل 8.2:

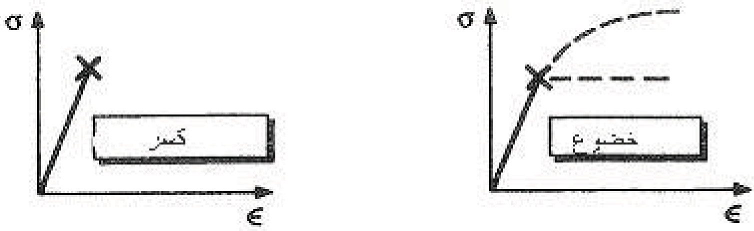
1.8.2 ابحث عن مواصفات الــ ASTM الموافقة لاثنَين من قياسات الشدّ الموصوفة في الفقرة 8.2، ثم اقرأها ولخّصها.

2.8.2 ابحث ثم صِفْ اختبارَين آخرَين لتحديد جساءة القص ومتانة القصّ في رقاقة مقوّاة ليفيّاً ثلاثيّة المناحي.

9.2 معايير المتانة ثنائية المحور لرقاقة ثلاثية المناحي

تعتمد غالبية قياسات متانة مادةٍ ما على حالاتِ إجهاد محورية. مع ذلك، تتضمّن مسألة التصميم العملية العامّة على الأقلّ حالةَ إجهاد ثنائية المحور إن لم تكن ثلاثية المحور. وهكذا، نحتاج إلى طريقة منطقية لاستخدام المعلومات عن المتانة المحورية التي تمّ الحصول عليها ضمن الإحداثيات الرئيسيّة للمادة من أجل تحليل مسائل الحمولتين متعددة المحاور. ومن المستحيل فيزيائياً الحصول على مميزات متانة رقاقةٍ في جميع الاتجاهات الممكنة، ولذلك لا بدّ من تحديد طريقة ما يتمّ عبرها الحصول على المميزات في اتجاهٍ بدلالة المميزات ضمن الإحداثيات الرئيسيّة للمادة. وفي مثل هذا التوسع للمعلومات المكتسَبة ضمن الإحداثيات الرئيسيّة للمادة، تصبح المفاهيمُ المعروفة جيداً عن الإجهادات الرئيسيّة والانفعالات الرئيسيّة عديمةَ القيمة. وحيث يوجد العديد من الآليات الميكروية الممكنة للإخفاق، يكون التحويل الموتّريّ للمتانات شديد التعقيد. بالإضافة إلى ذلك، تُعتبر التحويلات الموتّريّة لخصائص المتانة أعقد بكثير من التحويل الموتري لمميزات الجساءة (حتى ولو وُجد موتّر المتانة فإنه سيكون من مرتبةٍ أعلى من موتّر الجساءة). مع ذلك، يمكن إنجاز التحويلات الموتّريّة للمتانة واستعمالها كمعيار إخفاق ظواهريّ (phenomenological) (ويعود السبب في سمة الظاهريّ هذه إلى الاقتصار على إمكانية التوقع فقط بحدوث الإخفاق وليس بإمكانية تحديد النمط الحالي للإخفاق). سيتم اعتمادُ مقاربةٍ تجريبية نوعاً ما: سيتم مقارنة مغلَّفات الإخفاق الفعلي في فضاء الإجهاد مع مغلّفات مبسّطة للإخفاق.

لا يمكن اشتقاق مغلّفات الإخفاق الفعلي المبسّطة من النظريات الفيزيائية عن الإخفاق التي يتم فيها "مكاملة" العمليات الفيزيائية الفعلية المسبِّبة للإخفاق على المستوى الميكروي للحصول على نظرية إخفاق. بدلاً من ذلك، نتعامل مع نظريات ظواهرية، حيث نتجاهل الآليات الفعلية للإخفاق، ونركّز على الحوادث الميكروي الإجمالية له. تعتمد النظريات الظواهرية على مطابقة المنحنيات، وبذلك يمكن اعتبارها كـمعايير إخفاق وليس كنظرياتٍ من أيّ نوعٍ كان (يقتضي مصطلح النظرية عمليةَ اشتقاقٍ صوريّة).

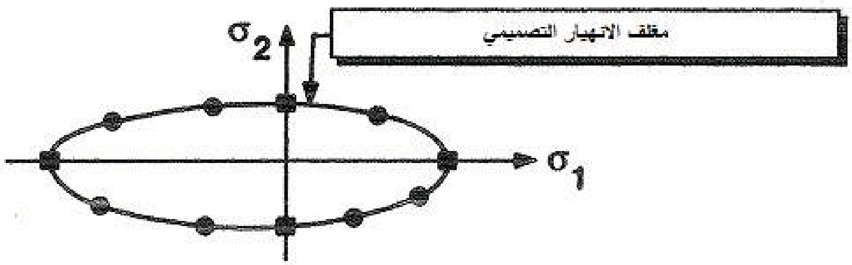


الشكل 2-32: إخفاق (الكسر) (fracture) مقابل الخضوع (yielding)

تبتعد مغلّفات الإخفاق المبسّطة قليلاً عن مفهوم سطوح الخضوع في نظرية اللدونة (plasticity). يمثّل مفهوما مغلّفات (أو سطوح) الإخفاق وسطوح (أو مغلّفات) الخضوع كلاهما نهايةَ السلوك المرن الخطيّ لحالة إجهادٍ متعدد المحاور. يُرمَز لنهايات حدود السلوك المرن الخطي هذه بالرمز x في منحنيات الإجهاد – انفعال من أجل شرط الكسر ونوعَين من شروط الخضوع في الشكل 2-32. في الحقيقة، لا تقتصر مغلّفاتُ الإخفاق على كونها نهاية السلوك الخطّيّ المرن متعدد المحاور (بالرغم من أنها كذلك من أجل المواد الهشّة أو القصفة (bristle)). إنها تُخفي الظواهرَ الماديّة الحقيقيّة التي يتم حدوثها، وتمثّل فعلاً مستويات الإجهادات التي يحصل عندها الإخفاق، حتى ولو حدثت ظواهر أخرى مثل الخضوع عند مستوياتِ إجهادٍ أكثر انخفاضاً.

إن هدفنا هو إيجاد تعريفٍ تحليلي لسطح أو لمغلَّف الإخفاق في فضاء الإجهادات بحيث يمكن استعماله بشكلٍ مناسب في التصميم. على سبيل المثال، يبيّن الشكل 2-33 معطيات الإخفاق من أجل مادة افتراضية في بعدَين اثنَين. وهنا تتمتع المادة

بمتانات غير متساوية في الشدّ وفي الضغط، وعلينا – بطريقةٍ ما– وصف هذه المعطيات بواسطة منحنى – أو مجموعة منحنيات – يملك كلٌّ منها معادلة مناسبة للاستخدام في التصميم. يعني ذلك أنه علينا إجراء مطابقة المنحنى لمعطيات الإخفاق مع معادلةٍ يمكن اعتبارها تطابقاً معقولاً من أجل أغراض التصميم. وعلينا أن نكون مدركين لحقيقة أن منحنى إخفاق وحيد هو عبارة عن عملية تقريبية أو وسطية لمجموع الحوادث التي تسبّب فعلاً الإخفاق. وهكذا، فإننا نفرط في تبسيط عملية الإخفاق الفعلية.



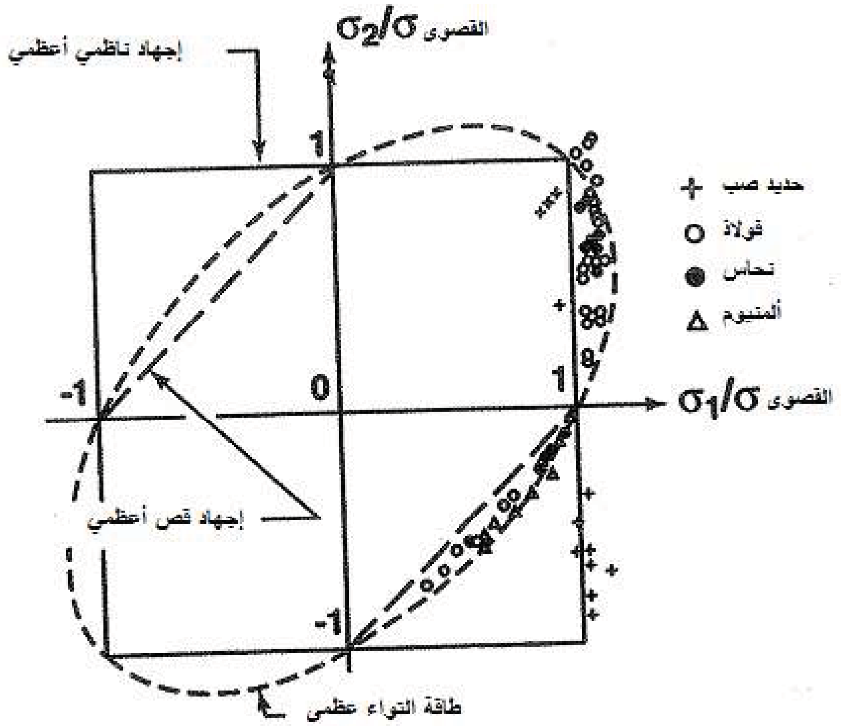
الشكل 2-33: معطيات إخفاق افتراضية ثنائية البعد مع منحنى تصميم

لسوء الحظ، نفقد من خلال مطابقة المنحنى القدرةَ على تحديد نمط الإخفاق. يعني ذلك أن معايير تطابق منحنى الإخفاق تكون منفصلةً عموماً عن معرفة كيفية إخفاق المادة بدقة. ربّما يكون أحسنُ وصفٍ لعملية تطابق المنحنى هو وصف جوهن هارت سميث (John Hart-Smith): "إن غالبيةَ معايير الإخفاق هي منحنيات عديمة المعنى تُمرّر في نقاط معطيات لا علاقة بينها" [2–19]. تأمّل ذلك مليّاً! يمثّل كلٌّ من المتانات في الاتجاهات الرئيسيّة للمادة X_t, X_c, Y_t, Y_c والموافقة للمربّعات المملوءة في الشكل 2-33 نمطَ إخفاق مختلف تماماً، وبالتالي لماذا يجب ارتباطها مع بعضها البعض بواسطة منحنى وحيد. سوف نرى لاحقاً أن X_t يوافق كسر الليف، بينما يوافق X_c انبعاجَه، كما أن Y_t يوافق كسرَ المصفوفة بينما يوافق Y_c إخفاق الضغط للمصفوفة، وأن سلوك المادة (أو السلوك البنيوي في حالة X_c) الموافق لكلّ إخفاق يكون مختلفاً بشكل كبير. وهكذا، ليس من سبب فيزيائي لتفسير ارتباط نقاط الإخفاق المتنوّعة بواسطة منحنٍ مستمرٍّ منفرد. في الحقيقة، هناك سببٌ لــعدم ارتباط نقاطِ معطيات متانة المادة الرئيسيّة

من خلال منحنٍ وحيد. ومع ذلك، فإن المصمّمين يحتاجون شيئاً سهلاً كفايةً من أجل الاستخدام اليومي، ولهذا نتبع مقاربة مطابقة المنحنى.

تنجح عملية مطابقة المنحنى بشكل جيّد من أجل المعادن الهندسية التقليدية. لاحظ مع ذلك أن عملية مطابقة المنحنى أقلّ عرضة للتحدي هنا منه في حالة المواد ثلاثية المناحي، وذلك لأن المعادن متماثلة المناحي، وبالتالي لا تكون متاناتها مختلفةً في الاتجاهات المختلفة. يبيّن الشكل 2-34 معطياتِ الإخفاق بالنسبة إلى حديد الصبّ والفولاذ والنحاس والألمنيوم مع ثلاثة معايير مألوفة للإخفاق. في هذا الشكل، تنسجم معطيات حديد الصبّ بأفضل شكل مع معيار إخفاق الإجهاد الناظمي الأعظمي، ويعني ذلك أن حديد الصبّ ينهار بطريقةٍ قصفة (هشة) عندما يبلغ الإجهادُ الرئيسي الأكبرُ قيمةَ إجهادِ الإخفاق المحوري، بغضّ النظر عن قيم الإجهادات الرئيسيّة الأخرى. بالمقابل، تخفف المعادنَ الأخرى – الفولاذ والنحاس والألمنيوم– بطريقة لدنة – بواسطة الخضوع (yielding) ربّما– وتتجمّع مختلف معطيات الإخفاق لهذه المعادن وبشكلٍ أساسي على معيار إخفاق إجهاد القصّ الأعظمي و معيار إخفاق طاقة الالتواء (distortional) الأعظمية (ويُعرف كذلك بمعيار إخفاق فون ميزيس von Mises) أو بينهما.

يتطابق معيارا إجهاد القص الأعظمي ومعيار الإجهاد الناظمي الأعظمي في الربعَين الأول والثالث في الشكل 2-34، ولكنهما يختلفان عن بعضهما البعض في الربعَين الثاني والرابع. يمثّل معيار طاقة الالتواء الأعظمية تأثيراً متبادلاً بين الإجهادات الناظمية الرئيسية، بحيث يؤثّر كلا الإجهادَين الناظميَّين في الإخفاق، وليس واحداً منهما فقط، كما هو الأمر في حالة معيار الإجهاد الناظمي الأعظمي. نستنتج بشكل واضح من خلال الشكل 2-34 أن المعادن المختلفة تخفق بطرقٍ مختلفة، وبالتالي فهي تحتاج إلى معايير إخفاق متنوّعة. ألا يجب توقّعُ استنتاجٍ مماثل بالنسبة إلى مواد المركّبة؟

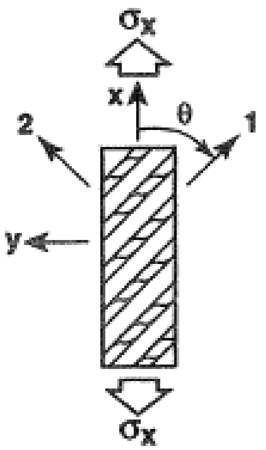


الشكل 2-34: معايير الإخفاق للمعادن

(تمّ تجميع المعطيات من مصادر مختلفة من قبل مورفي Murphy [2−20])

يقتصر اهتمامنا في هذا الفقرة على الحمولة ثنائية المحور. سوف نتفحّص معايير المتانة ثنائية المحور التالية: (1) معيار إخفاق الإجهاد الأعظمي، (2) معيار إخفاق الانفعال الأعظمي، (3) معيار إخفاق تساي− هيل، (4) معيار إخفاق هوفمان و(5) معيار إخفاق موتر (تنسور) تساي−وو. يُنظر إلى المادة في جميع معايير الإخفاق هذه – بالرغم من أنها ثلاثية المناحي− على أنها متجانسة. وهكذا، لا يمكننا أساساً تفسير بعض آليّات الإخفاق على المستوى الميكروي. في الوقت نفسه، تميل معاييرُ الإخفاق إلى أن تكون ملساء بشكلٍ أكبر منه في حالة السلوك الحقيقي الذي غالباً ما يبدي تبعثراً معتبَراً للمعطيات بسببِ تقنيات الاختبار وعدمِ الانتظام في عملية التصنيع، إلخ. يكمن الهدف النهائي لمغلّف معيار إخفاق يتفق مع مغلّف متانة فعليّة في التمكن مباشرة من تصميم عناصر إنشائية مصنوعة من مواد مركّبة.

سوف نقوم من أجل كلّ معيارٍ من معايير الإخفاق بتوليد إجهاداتٍ ثنائية المحور بواسطة تحميلٍ خارج المحور لرقاقةٍ مقوّاة محورياً. يعني ذلك أن الإجهاد المحوري σ_x خارج المحور وعند زاويةٍ θ مع الألياف يتحوّل إلى إجهادات ثنائية المحور ضمن الإحداثيات الرئيسية للمادة، كما يبيّن الشكل 2-35. انطلاقاً من معادلات تحويل الإجهاد في الشكل 2-35، لا يمكن بكل وضوح لحمولة محورية إنتاج حالةِ مزجٍ من الشدّ والضغط في الإحداثيات الرئيسيّة للمادة. وهكذا، لا بدّ من تطبيق حالة حمولةٍ أخرى من أجل اختبار أي معيارِ إخفاق إزاء شرط مزيج من الشدّ والضغط.



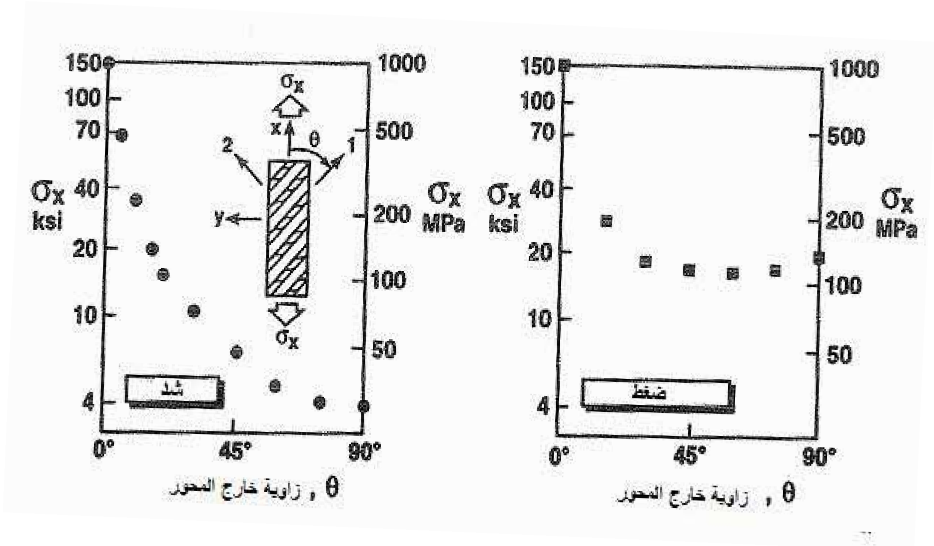
$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2\theta$$

$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2\theta$$

$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin\theta\cos\theta$$

الشكل 2–35: إجهادات ثنائية المحور ناجمة عن تحميل محوري أحادي خارج المحور

تعطى غالبية عمليات المقارنة بين معيار إخفاق ما ومعطيات الإخفاق من أجل معطيات إيبوكسي– زجاج في الشكل 2-36 على شكل تابعٍ للزاوية θ خارج المحور من أجل كلتا حمولتَي الشدّ والضغط [2–21]. يُرمز لمعطيات الشدّ بدوائر مملوءة، بينما ترمز المربّعات المملوءة لمعطيات الضغط. تمّ الحصول على معطيات الشدّ باستخدام عيّنات على شكل عظمة الكلب، بينما تمّ الحصول على معطيات الضغط باستعمال عيّنات ذات مقاطع عرضية مستطيلة منتظمة. تبلغ قيمة متانة القصّ لهذا الـــ إيبوكسي– زجاج 8 ksi (أي 55 Mpa) بدلاً من 6 ksi (أي 41 Mpa) في الجدول 2-3.



الشكل 2-36: معطيات إخفاق مقاسة في إيبوكسي- زجاج (عن تساي Tsai [2-21])

1.9.2 معيار إخفاق الإجهاد الأعظمي

في حالة معيار إخفاق الإجهاد الأعظمي (maximum stress failure criterion)، يجب أن تقلّ قيمة كلّ من الإجهادات في الإحداثيات الرئيسيّة للمادة عن قيمة المتانة الموافقة، وإلاّ فإن الكسرَ حاصلٌ. يعني ذلك من أجل إجهادات الشدّ:

$$\sigma_1 < X_t, \sigma_2 < Y_t \qquad (2.114)$$

ومن أجل إجهادات الضغط:

$$\sigma_1 > X_c, \sigma_2 > Y_c \qquad (2.115)$$

وكذلك:

$$|\tau_{12}| < S \qquad (2.116)$$

لاحظ أن متانة القص مستقلة عن إشارة τ_{12} كما نوقش في الفقرة 8.2. إذا لم يتحقّق أيٌّ من المتراجحات (inequolities) السابقة، عندها يتم اعتماد فرضيةَ أن المادة قد أخفقت من خلال آلية إخفاق موافقة لـــ $X_t, X_c, Y_t, Y_c,$ أو S على التوالي. لا حظْ

عدم وجود تفاعل بين أنماط الإخفاق في هذا المعيار، وبالتالي هناك في الحقيقة خمسة معايير فرعية وخمس آلياتٍ إخفاق.

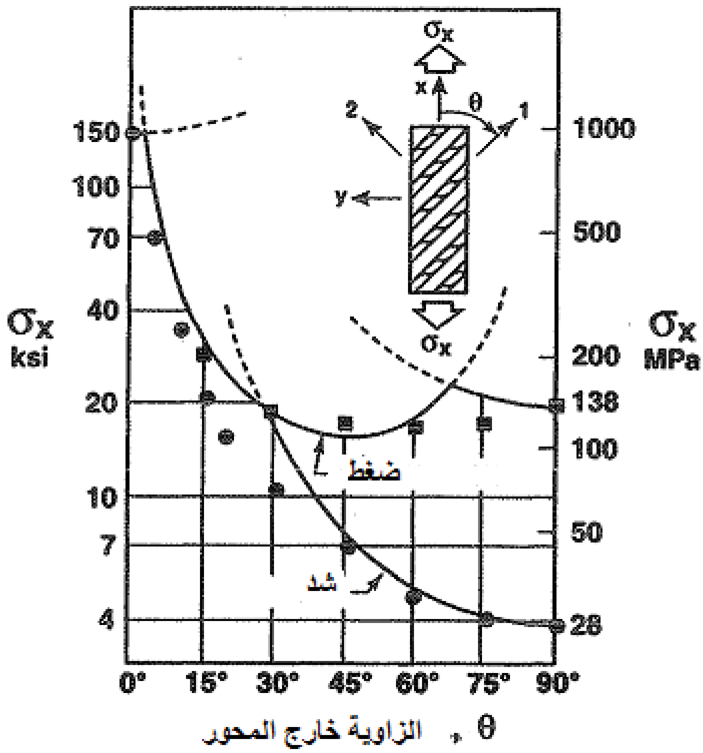
عند تطبيق معيار الإجهاد الأعظمي، يجب على الإجهادات في الجسم تحت الاعتبار أن تتحوّل إلى إجهادات في الإحداثيات الرئيسيّة للمادة. على سبيل المثال، اعتبر تساي [2−21] رقاقةً مركّبة مقوّاةً محورياً خاضعةً لحمولة محورية بزاوية θ مع الألياف، كما يبيّن الشكل 35.2. يتم الحصول على الإجهادات ثنائية المحور في الإحداثيات الرئيسيّة للمادة من خلال تحويل الإجهاد المحوري σ_x عبر:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2\theta, \quad \sigma_2 = \sigma_x \sin^2\theta, \quad \tau_{12} = -\sigma_x \sin\theta\cos\theta, \qquad (2.117)$$

وبعد ذلك، من خلال قلب المعادلات (2.117) والتعويض بالمعادلات (2.114) − (2.116) يكون الإجهادُ المحوري الأعظمي σ_x الأصغرَ بين:

$$\frac{X_c}{\cos^2\theta} < \sigma_x < \frac{X_t}{\cos^2\theta}, \quad \frac{Y_c}{\sin^2\theta} < \sigma_x < \frac{Y_t}{\sin^2\theta}, \quad |\sigma_x| < \left|\frac{S}{\sin\theta\cos\theta}\right| \quad (2.118)$$

يبيّن الشكل 2-37 هذا المعيار، حيث تمّ رسمُ كلا سلوكَي الشدّ والضغط معاً من أجل مادة مركّبة من إيبوكسي− زجاج ذات خصائص مبيّنة في الجدول 2-3 فيما خلا متانة القص، كما أشير سابقاً. تمّ رسمُ المتانة المحورية للمادة المركّبة أحادية الاتجاه في الشكل 2-37 بدلالة الزاوية θ الواقعة بين اتجاه التحميل واتجاهات الإحداثيات الرئيسيّة للمادة. يتوضّح معيارُ الإجهاد الأعظمي كمنحنيات متّصلة عديدة حيث يتحكّم المنحنى الأخفض بالمتانة. لم تتم ملاحظةُ النتوءاتِ "النظرية" في تغيّرات المتانة ضمن المعطيات التجريبية. إضافة إلى ذلك، لا يمثّل تغيّرُ المتانة "النظري" بشكلٍ مرضٍ تغيّرَ المتانة التجريبي. وهكذا، يجب البحث عن معيار آخر للمتانة ثنائية المحور.



الشكل 2–37: معيار إخفاق الإجهاد الأعظمي

2.9.2 معيار إخفاق الانفعال الأعظمي

إن معيار إخفاق الانفعال الأعظمي (maximum strain failure criterion) مماثل جداً لمعيار إخفاق الإجهاد الأعظمي. مع ذلك، فإن إخفاق الإافعال هي التي تكون محدودةً هنا وليس الإجهادات. بشكلٍ دقيق، نقول بأن المادة أصيبت بالإخفاق وفقاً لهذا المعيار إذا لم تتحقّق واحدةٌ على الأقل من المتراجحات التالية:

$$\varepsilon_1 < X_{\varepsilon_1}, \quad \varepsilon_2 < X_{\varepsilon_2}, \quad |\gamma_{12}| < S_{\varepsilon} \quad (2.119)$$

وأيضاً بالنسبة إلى المواد ذوات المتانات المختلفة في حالتَي الشدّ والانضغاط:

$$\varepsilon_1 > X_{\varepsilon_c}, \quad \varepsilon_2 > Y_{\varepsilon_c} \quad (2.120)$$

حيث:

$X_{\epsilon t}(X_{\varepsilon c})$ = انفعال الشد (الضغط) النسبي الناظميّ في الاتجاه 1

$Y_{\epsilon t}(Y_{\varepsilon c})$ = انفعال الشد (الضغط) النسبي الناظميّ في الاتجاه 2

S_ε = انفعال القصّ النسبي الأعظمي في الإحداثيات 1-2.

كحال متانة القصّ، لا يتأثّر انفعال القصّ الأعظمي بإشارة إجهاد القصّ. يجب إيجاد قيم الانفعالات في الإحداثيات الرئيسيّة للمادة $\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \gamma_{12}$ انطلاقاً من الانفعالات في إحداثيات الجسم بواسطة التحويلات وذلك قبل تطبيق المعيار.

من أجل مادة مركّبة مقوّاة محورياً خاضعةٍ لحمولة محورية بزاوية θ مع الألياف (المسألة-المثال في الفقرة 1.9.2 عن معيار الإجهاد الأعظمي)، يمكن إيجاد القيم المسموحة للإجهادات انطلاقاً من تلك المسموحة للانفعالات $X_{\varepsilon_t}, Y_{\varepsilon_t}$، إلخ، كما يلي:

نبدأ بعلاقات الإجهاد- الانفعال:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1}\left(\sigma_1 - \upsilon_{12}\sigma_2\right)$$
$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E_2}\left(\sigma_2 - \upsilon_{21}\sigma_1\right) \qquad (2.121)$$
$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}}$$

وبالتالي من خلال تعويض معادلات التحويل للإجهاد:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cos^2\theta$$
$$\sigma_2 = \sigma_x \sin^2\theta \qquad (2.122)$$
$$\tau_{12} = -\sigma_x \sin\theta\cos\theta$$

في علاقات الإجهاد- الانفعال (المعادلات 2.121)، تُعطى الانفعالات بالعلاقات:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_1}\left(\cos^2\theta - \upsilon_{12}\sin^2\theta\right)\sigma_x$$
$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E_2}\left(\sin^2\theta - \upsilon_{21}\cos^2\theta\right)\sigma_x \qquad (2.123)$$
$$\gamma_{12} = -\frac{1}{G_{12}}\left(\sin\theta\cos\theta\right)\sigma_x$$

وأخيراً، إذا طُبق التقييد المعتاد للسلوك المرن الخطي حتى الإخفاق:

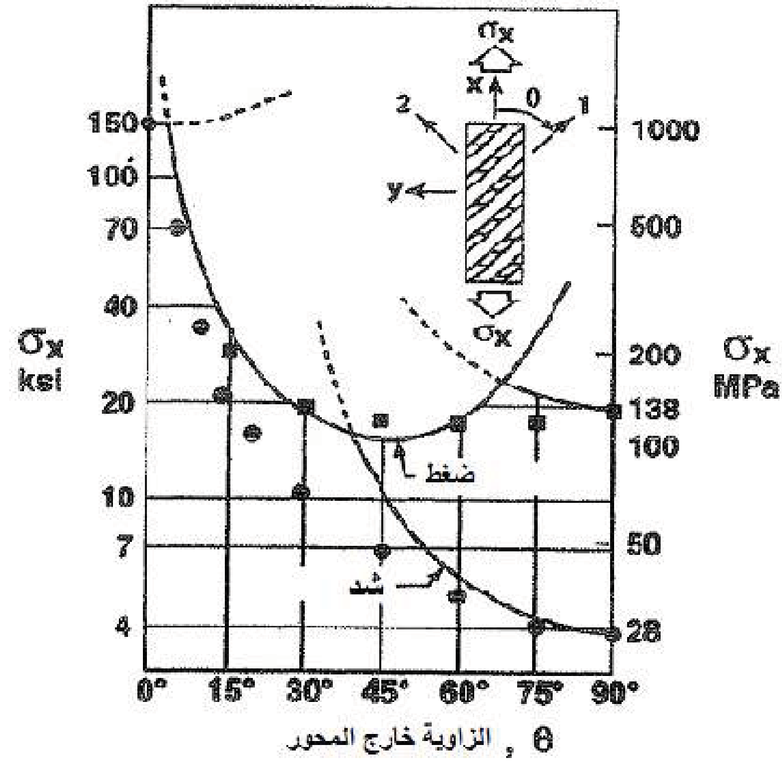
$$X_{\varepsilon_t} = \frac{X_t}{E_1},\quad Y_{\varepsilon_t} = \frac{Y_t}{E_2},\quad S_{\varepsilon} = \frac{S}{G_{12}},\quad X_{\varepsilon_c} = \frac{X_c}{E_1},\quad Y_{\varepsilon_c} = \frac{Y_c}{E_2} \quad (2.124)$$

(يمكن لهذه العلاقات أن تتأتّى كذلك وبشكلٍ طبيعي من القيم المقاسة)، فإنه يمكن كتابة معيار إخفاق الانفعال الأعظمي لحمولةٍ محورية خارج المحور على الشكل:

$$\begin{aligned}
&\frac{X_c}{\cos^2\theta - \upsilon_{12}\sin^2\theta} < \sigma_x < \frac{X_t}{\cos^2\theta - \upsilon_{12}\sin^2\theta} \\
&\frac{Y_c}{\cos^2\theta - \upsilon_{21}\sin^2\theta} < \sigma_x < \frac{Y_t}{\cos^2\theta - \upsilon_{21}\sin^2\theta} \qquad (2.125) \\
&|\sigma_x| < \left|\frac{S}{\sin\theta\cos\theta}\right|
\end{aligned}$$

يكمن الخلاف الوحيد بين معيار إخفاق الانفعال الأعظمي (المعادلات 2.125) ومعيار إخفاق الإجهاد الأعظمي (المعادلة 2.118) في احتواء معيار إخفاق الانفعال الأعظمي على حدود نسبة بواسّون.

وكحال معيار إخفاق الإجهاد الأعظمي، يمكن رسم معيار إخفاق الانفعال الأعظمي إزاء النتائج التجريبية المتوفّرة لمادة مركّبة من أجل حمولة محورية خارج المحور. إن الاختلافات بين النتائج التجريبية والتوقع في الشكل 2-38 مماثلةٌ – وإن كانت أكثر وضوحاً– لحالة معيار إخفاق الإجهاد الأعظمي في الشكل 2-37. وهكذا لم نجدْ بعدُ معيار الإخفاق المناسب لهذه المادة المركّبة من إيبوكسي– زجاج.



الشكل 2–38: معيار إخفاق الانفعال الأعظمي (وفقاً لــتساي Tsai [2–21])

3.9.2 معيار الإخفاق لــتساي–هيل Tsai-Hill

اقترح هيل [2–22] معيار خضوعٍ للمواد ثلاثية المناحي:

$$(G+H)\sigma_1^2+(F+H)\sigma_2^2+(F+G)\sigma_3^2-2H\sigma_1\sigma_2-2G\sigma_1\sigma_3-2F\sigma_2\sigma_3$$
$$+2L\tau_{23}^2+2M\tau_{13}^2+2N\tau_{12}^2=1$$

(2.126)

يُستخدم معيار الخضوع ثلاثي المناحي هذا كمتانة ثلاثية المناحي أو كمعيارِ إخفاق وفق فهمٍ يعتبر كلا المعيارَين نهايتَين للسلوك المرن الخطيّ. وهكذا، يجب النظر إلى إجهادات الخضوع لــهيل (Hill) F,G,H,L,M وN على أنها انفعالات إخفاق، ويغدو معيارُ هيل توسيعاً لمعيار الخضوع لــفون ميزيس الذي – بدوره– يمكن ربطه بمقدار الطاقة المستخدَمة لتشويه الجسم متماثل المناحي بدلاً من تغيير حجمه. مع ذلــك،

لا يمكننا فصل التشويه عن التمدّد في المواد ثلاثية المناحي. لهذا، لا يمكن ربط المعادلة (2.126) بطاقة التشويه. لسوء الحظ، لا يزال بعض المؤلّفين يسمي خطأً المعيارَ المذكورَ في هذا الفقرة بمعيار إخفاق طاقة التشويه.

تم ربط معاملات متانة الإخفاق F,G,H,L,M و N بمتانات إخفاق الاعتيادية X,Y و S من أجل رقاقة من قبل تساي [2−21]. لو كان τ_{12} يؤثّر وحده في الجسم، يكون عندها بسبب أن قيمته العظمى هي S:

$$2N = \frac{1}{S^2} \quad (2.127)$$

وبشكل مماثل، لو كان σ_1 وحده يؤثّر في الجسم لكان:

$$G + H = \frac{1}{X^2} \quad (2.128)$$

أما لو كان σ_2 يؤثّر وحده لكان:

$$.F + H = \frac{1}{Y^2} \quad (2.129)$$

لو رمزنا للمتانة وفق الاتجاه 3 بالرمز Z وكان σ_3 يؤثّر وحده لكان:

$$.F + G = \frac{1}{Z^2} \quad (2.130)$$

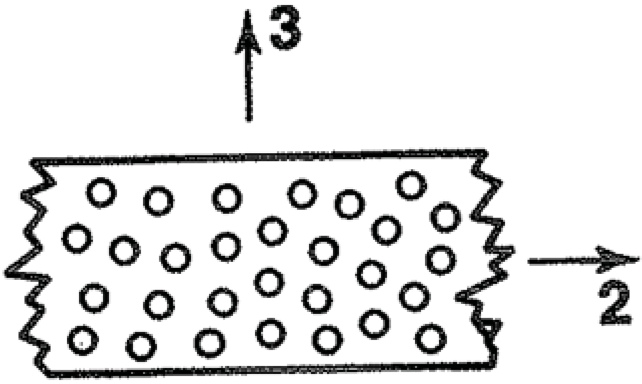
وبالتالي، يؤدي دمج المعادلات (2.128)، (2.129) و(2.130) مع بعضها البعض إلى العلاقات التالية، التي تربط بين F,G,H و X,Y,Z:

$$2F = \frac{1}{Y^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{X^2}, \quad 2G = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Z^2} - \frac{1}{Y^2}, \quad 2H = \frac{1}{X^2} + \frac{1}{Y^2} - \frac{1}{Z^2}, \quad (2.131)$$

من أجل إجهادٍ مستوٍ في المستوي 1−2 لرقاقة أحادية الاتجاه مع ألياف وفق الاتجاه 1، يكون $\sigma_3=\tau_{13}=\tau_{23}=0$. مع ذلك، ومن الفقرة العرضي لمثل هذه الرقاقة في الشكل 2-39، وبسبب التناظر الهندسي الواضح لبناء المادة، يكون Y=Z. وبذلك تقود المعادلةُ (2.126) إلى العلاقة:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1 \qquad (2.132)$$

كمعيارِ تحكم الإخفاق بدلالة متانات الرقاقة المألوفة X,Y وS. يجب هنا استخدام القيمِ المناسبة لـــ X_t أو X_c وY_t أو Y_c اعتماداً على إشارتَي σ_1 و σ_2. وهكذا يتمّ توليدُ سطحٍ مختلف في كلّ جزءٍ من فضاء الإجهاد $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$ ثلاثي الأبعاد (باستثناء كون السطح متناظراً بالنسبة إلى المستوي $\tau_{12} = 0$ لأن S تأخذ قيمة وحيدة فقط).



الشكل 2−39: مقطع عرضاني لرقاقة أحادية الاتجاه ذات ألياف في الاتجاه 1

وأخيراً، من أجل المثال المذكور في هذا الفقرة على المادة المركّبة خارج المحور، يؤدي استبدال معادلات تحويل الإجهاد:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_x \cos^2\theta \\ \sigma_2 &= \sigma_x \sin^2\theta \\ \tau_{12} &= -\sigma_x \sin\theta\cos\theta \end{aligned} \qquad (2.133)$$

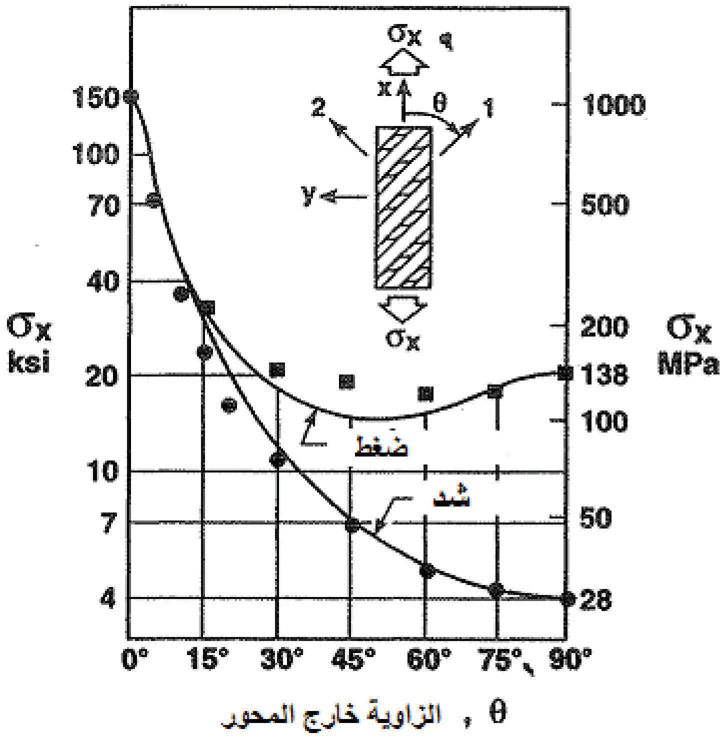
في المعادلة (2.132) إلى معيارَ إخفاق تساي−هيل للمتانة المحورية خارج المحور:

$$\frac{\cos^4\theta}{X^2} + \left[\frac{1}{S^2} - \frac{1}{X^2}\right]\cos^2\theta\sin^2\theta + \frac{\sin^4\theta}{Y^2} = \frac{1}{\sigma_x^2} \qquad (2.134)$$

وهذا يشكّل ذلك معياراً واحداً وليس ثلاثة معايير كما في حالة معايير الإخفاق السابقة. بما أن قيمتَي متانتَي الشدّ والضغط للرقاقة المركّبة تكونان عادةً مختلفتَين،

يتوجّب على X وY أن يأخذا القيمَ، المناسبةَ التي تعتمد على الإرباعية (quadrant) الذي تقع فيه الإجهاداتُ ضمن فضائها. وهكذا يتكوّن مغلّف الإخفاق في فضاء الإجهاد من أربع قطع مختلفة مستمرة في القيم، ولكن ليس في الميل عند المتانات المحورية.

يبيّن الشكل 2-40 نتائجَ هذا المعيار مع المعطيات التجريبية لــمركّب إيبوكسي –زجاج–E، ويكون التوافقَ بين معيار إخفاق تساي–هيل والتجربة جيداً. تم، إذاً، إيجاد معيارَ إخفاق مناسب لرقاقات إيبوكسي– زجاج –E من أجل توجيهات متنوّعة في حقول الإجهاد ثنائية المحور.



الشكل 2–40: معيار تساي–هيل (عن تساي Tsai [2–21])

يبدو أن معيار تساي– هيل قابلٌ للتطبيق للتوقع بإخفاق هذه المادة المركّبة من إيبوكسي– زجاج–E بشكل أفضل من معيار إخفاق الإجهاد الأعظمي أو معيار إخفاق الانفعال الأعظمي. هناك مزايا أخرى أقلّ وضوحاً لمعيار إخفاق تساي–هيل:

(1) إن تغيّرَ المتانة مع زاوية توجيه الرقاقة هو على الأرجح تغيّر ناعم بدون تحدبات، التي لا تشاهد في النتائج المخبرية.

(2) تتناقص المتانة بشكل مستمرّ عندما تتزايد θ انطلاقاً من 0^o، بدلاً من الازدياد في المتانة المحورية الذي يميّز كلاً من معيارَي الإجهاد الأعظمي والانفعال الأعظمي للإخفاق.

(3) إن التوافقَ بين المعيار والتجربة هو أفضل ممّا يبدو للوهلة الأولى لأن منحنيات الأشكال 2-37، 2-38 و2-40 قد رسمت على مقياس لوغاريتمي. يبلغ الخطأ في معياري الإجهاد والانفعال الأعظميَّين نسبة 100% عند الزاوية 30^o.

(4) يوجد تفاعل هام بين متانات الإخفاق X,Y, S في معيار تساي–هيل، ولكن لا يوجدَ البتّة لأيّ تفاعل في المعايير السابقة التي تفترض أن وقائع الإخفاقات المحورية والعرضانية وإخفاقات القصّ تحدث بشكل مستقلّ إحداها عن الأخرى.

يبدو أن معيارَ إخفاق – تساي – هيل هو الأكثر دقة من بين المعايير التي نوقشت وذلك من أجل مركّب إيبوكسي– زجاج–E. مع ذلك، تعتمد قابلية تطبيق معيارٍ ما على كون المادة المدروسة هشة أم لدنة. يمكن معالجتة مواد مركّبة أخرى بشكل أفضل باستخدام معيار الإجهاد الأعظمي أو الانفعال الأعظمي أو حتى معايير أخرى.

4.9.2 معيار إخفاق هوفمان Hoffman

لتفسير القيمِ المختلفة في متانات الشدّ والضغط، أضاف هوفمان (Hoffman) حدوداً خطيّة إلى معادلة هيل (أساس معيار تساي–هيل) [2–23]:

(2.135)

$$C_1(\sigma_1-\sigma_3)^2+C_2(\sigma_3-\sigma_1)^2+C_3(\sigma_1-\sigma_2)^2+C_4\sigma_1+C_5\sigma_2+C_6\sigma_3+$$
$$+C_7\tau_{23}^2+C_8\tau_{31}^2+C_9\tau_{12}^2=1$$

حيث تتحدّد ثوابت الـــ C_i التسعة انطلاقاً من المتانات التسع في الإحداثيات الرئيسيّة للمادة: S_{23}, S_{31} $X_t, X_c, Y_t, Y_c, Z_t, Z_c$ و S_{12}. في حالة إجهادات مستوية في المستوي 1–2 $(\sigma_3=\tau_{23}=\tau_{31}=0)$ وتماثلِ مناحٍ عرضاني في المستوي 2–3، كما

في الشكل 2-39 ($Z_t = Y_t, Z_c = Y_c, S_{31} = S_{12}$)، يمكن تبسيط معيار الإخفاق في المعادلة (2.135) إلى:

$$-\frac{\sigma_1^2}{X_c X_t} + \frac{\sigma_1 \sigma_2}{X_c X_t} - \frac{\sigma_2^2}{Y_c Y_t} + \frac{X_c + X_t}{X_c X_t}\sigma_1 + \frac{Y_c + Y_t}{Y_c Y_t}\sigma_2 + \frac{\tau_{12}^2}{S_{12}^2} = 1 \quad (2.136)$$

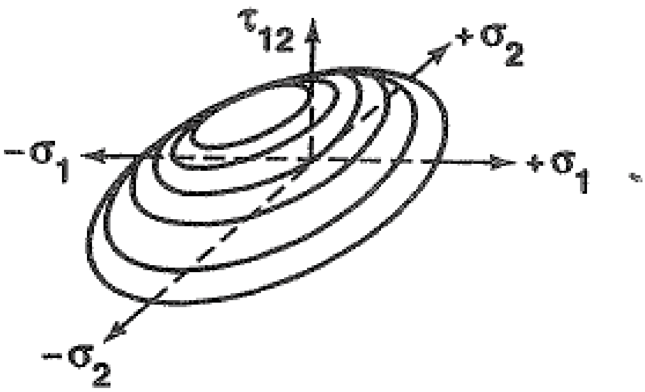
حيث X_c عدد سالبٌ بطبيعته –على سبيل المثال $X_c = -100$ ksi (أو 690 Mpa)– على خلاف ما ورد في ورقة هوفمان ولكن بما يتفّق مع ما هو مستخدم في هذا الكتاب. من أجل قيمٍ متساوية لمتانتي الشدّ والضغط ($X_c = -X_t = -X$ و $Y_c = -Y_t = -Y$) يؤول معيار هوفمان للإخفاق إلى معيار تساي–هيل في المعادلة (2.132). يبيّن الشكل 2-41 أن كلا المعيارَين يتمثلان بقطعين ناقصين (ellipsoicts) في الفضاء $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$، ويكون القطع الناقص لهوفمان متناظر حول المستوي $\sigma_1 - \sigma_2$ مع محاور رئيسية عند:

$$\beta = \frac{1}{2}\cot^{-1}\left[\frac{Y_c Y_t}{X_c X_t} - 1\right] \quad (2.137)$$

ومركزاً عند:

$$\sigma_1 = \frac{X_c + X_t}{2} + \frac{Y_c + Y_t}{2}, \quad \sigma_2 = \frac{Y_c + Y_t}{2} + \frac{(X_c + X_t) Y_c Y_t}{4 X_c X_t} \quad (2.138)$$

لاحظ أنه من أجل موادٍ متساوية في مقاومتَي الشدّ والضغط، تكون قيمة β مساويةً لـــ °45، بينما يقع مركز القطع الناقص في المبدأ origin.



الشكل 2–41: سطح الإخفاق لهوفمان

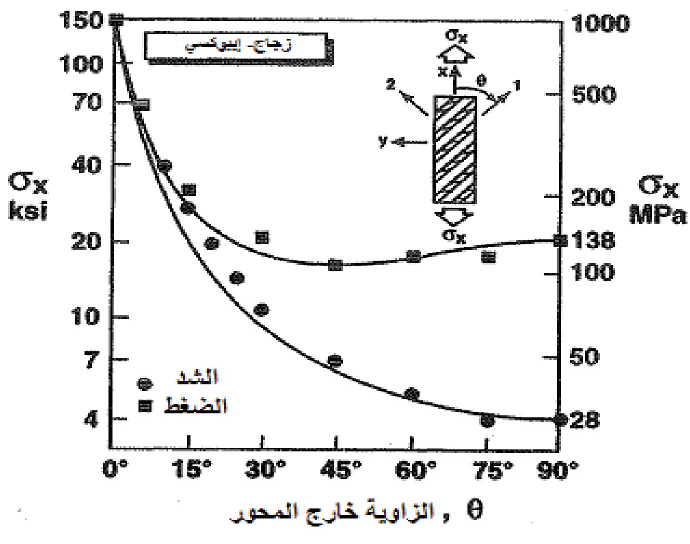
يتوافق معيار إخفاق هوفمان بشكلٍ جيّد جداً مع معطيات إخفاق مركّب إيبوكسي–زجاج [2–21] في الشكل 2-42، ومع معطيات مركّب إيبوكسي–غرافيت [2–24] في الشكل 2-43 ومع معطيات مركّب إيبوكسي–بورون [2–25] في الشكل 44.2. تقتضي حقيقةُ كونِ معيار إخفاق هوفمان منحنٍ وحيدٍ في جميع أرباع الفضاء $\sigma_1-\sigma_2$ أنّ المنحنى في أيّ ربعٍ منفرد ينجم عن انزياح القطعة الموافقة في معيار تساي–هيل. مع ذلك، تنجم هذه النتيجة بشكل طبيعي عن استخدام منحنٍ وحيدٍ في جميع الأرباع الأربعة.

تتمثّل المزايا الجيّدة لمعيار إخفاق هوفمان في:

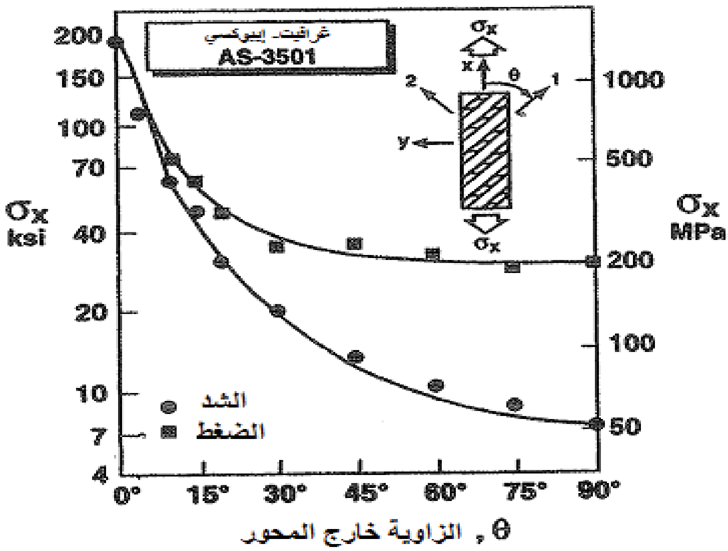
(1) تتمّ هنا معالجة التفاعل بين أنماط الإخفاق بدلاً من معايير منفصلة للإخفاق مثل معيار إخفاق الإجهاد الأعظمي ومعيار إخفاق الانفعال الأعظمي.

(2) يستخدم هنا معيار وحيد للإخفاق في جميع أرباعيات الفضاء $\sigma_1-\sigma_2$ بدلاً من القطع الموجودة في الأرباعيات المنفصلة في معيار إخفاق تساي–هيل، وذلك بسبب قيمٍ مختلفة لمتانات الشدّ والضغط.

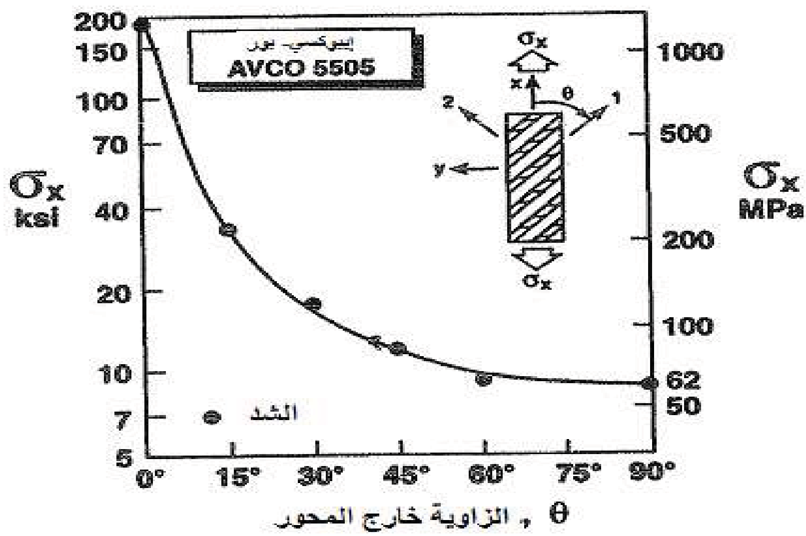
(3) من أجل استعمال التصميم، يُعتبرُ معيار هوفمان أبسطَ معيارٍ من بين المعايير التي نوقشت.



الشكل 2–42: معيار إخفاق هوفمان من أجل إيبوكسي–زجاج (المعطيات عن تساي [2–21])



الشكل 2–43: معيار إخفاق هوفمان من أجل إيبوكسي–غرافيت (المعطيات عن كيم (Kim) [2–24])



الشكل 2–44: معيار إخفاق هوفمان من أجل إيبوكسي- بورون (المعطيات عن بايبس (Pipes) وكول Cole [2–25])

5.9.2 موتر (تنسور) معيار الإخفاق لتساي- وو Tsai-Wu

تعاني معايير الإخفاق ثنائية المحور السابقة نقاط عدم كفاية عديدة في تمثيلها للمعطيات التجريبية. تتمثّل طريقةٌ واضحة لتحسين الترابط بين المعيار والتجربة في زيادة عدد الحدود في معادلة التوقع. استخدم تساي Tsai و وو Wu [2-26] زيادة القدرة هذه في مطابقة المنحنى مع الميزة الإضافية في تمثيل المتانات المختلفة في شكل موتّر (تنسور). وفي هذه العملية، برزت الحاجة إلى تعريفٍ جديد للمتانة من أجل تمثيل التفاعل بين الإجهادات في اتجاهَين اثنَين.

افترض تساي و وو أنه يوجدَ في فضاء الإجهادات سداسي الأبعاد سطح إخفاق وفق الشكل:

$$F_i\sigma_i + F_{ij}\sigma_i\sigma_j = 1 \qquad i, j = 1, \cdots, 6 \tag{2.139}$$

حيث يمثل F_i و F_{ij} موتّرا متانة من المرتبة الثانية والرابعة على التوالي، وحيث تم استعمال ترميز الإجهاد المختزَل المألوف ($\sigma_4 = \tau_{23}, \sigma_5 = \tau_{31}$ و $\sigma_6 = \tau_{12}$). من الواضح أن المعادلة (2.139) معقّدةٌ جداً؛ ولذلك سوف نقصر اهتمامنا على اختزال المعادلة (2.139) إلى حالة رقاقة ثلاثية المناحي تحت شروط الإجهاد المستوي:

$$F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 = 1 \tag{2.140}$$

تفيد الحدود الخطّيّة (linear terms) في الإجهادات في تمثيل متانات مختلفة في حالتَي الشدّ والضغط، أمّا الحدود التربيعية (quadratic term) في الإجهادات فهي تقريباً الحدودُ الشائعة التي تمثّل قطعٍ ناقص في فضاء الإجهادات. مع ذلك، إن الوسيطَ (parameter) المستقلّ F_{12} جديدٌ ومختلفٌ كليةً عن المعامل غير المستقلّ $2H = 1/X^2$ في معيار إخفاق تساي- هيل والتابع للحدّ المتضمِّن للتفاعل بين الإجهادات الناظمية في الاتجاهَين 1 و2.

يتم تعريف أغلب مركّبات موتّرات المتانة بدلالة المتانات الهندسية التي تمّت مناقشتها سابقاً. على سبيل المثال، لنعتبر حمولةً محورية على عيّنة في الاتجاه 1. في حالة حمولةِ شدّ، تكون X_t المتانة الهندسية، بينما في حالة حمولةِ ضغط فهي تكو ن X_c (مثلاً، $X_c = -400$ ksi أو 2760 Mpa- من أجل إيبوكسي- بورون). وهكذا، من أجل حمولة شدّ يكون:

$$F_1 X_t + F_{11} X_t^2 = 1 \tag{2.141}$$

وتحت حمولة ضغط:

$$F_1 X_c + F_{11} X_c^2 = 1 \tag{2.142}$$

بحلّ المعادلتَين (2.141) و(2.142) معاً:

$$F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}, \quad F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c} \tag{2.143}$$

وبشكل مماثل:

$$F_2 = \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}, \quad F_{22} = -\frac{1}{Y_t Y_c} \tag{2.144}$$

يؤدي إجراء تفكير مماثل – مع ملاحظتنا لاستقلال متانة القصّ في الإحداثيات الرئيسية للمادة عن إشارة إجهاد القصّ إلى:

$$F_6 = 0, \quad F_{66} = \frac{1}{S^2} \tag{2.145}$$

لاحظ أنه من أجل قيم متساوية لمتانتي الشدّ والضغط ($X_t = -X_c, Y_t = -Y_c = -X$)، يكون:

$$F_1 = 0, \quad F_{11} = \frac{1}{X^2}, \quad F_2 = 0, \quad F_{22} = \frac{1}{Y^2} \tag{2.146}$$

ممّا يقودنا إلى معيار إخفاق:

$$\frac{\sigma_1}{X^2} + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1 \tag{2.147}$$

وهو مماثلٌ بشكل لافت للنظر لمعيار إخفاق تساي-هيل فيما عدا قيمة F_{12} التي لا تساوي $-\frac{1}{X^2}$.

يبقى تحديد الموتّر ذي المرتبة الرابعة F_{12}. من حيث المبدأ، لا يمكن إيجاد F_{12} انطلاقاً من أيّ اختبارٍ محوريّ في الاتجاهات الرئيسيّة للمادة. بدلاً من ذلك، لا بدّ من استخدام اختبارٍ ثنائي المحور. يجب ألّا تكون هذه الحقيقة مفاجئة لأن F_{42} هو معاملُ جداء σ_1 و σ_2 في معيار الإخفاق (المعادلة 2.140). وهكذا – على سبيل المثال- يمكننا فرضُ حالة شدّ ثنائي

المحور تتّصف بـــ $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ مع جميع الإجهادات الأخرى تساوي صفراً. وعلى ذلك، باستخدام المعادلة 2,140، يكون:

$$\left(F_1 + F_2\right)\sigma + \left(F_{11} + F_{22} + 2F_{12}\right)\sigma^2 = 1 \tag{2.148}$$

قم بالحلّ الآن، من أجل إيجاد F_{12} بعد تعويض التعاريف التي تم اشتقاقها لـــ F_1, F_2, F_{11} و F_{22}:

$$\begin{aligned} &F_1 = \frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c}, \quad F_{11} = -\frac{1}{X_t X_c} \\ &F_{12} = \frac{1}{2\sigma^2}\left[1 - \left(\frac{1}{X_t} + \frac{1}{X_c} + \frac{1}{Y_t} + \frac{1}{Y_c}\right)\sigma + \left(\frac{1}{X_t X_c} + \frac{1}{Y_t Y_c}\right)\sigma^2\right] \end{aligned} \tag{2.149}$$

تعتمد إذاً قيمة F_{12} على المتانات الهندسية المتنوّعة وكذلك على إجهاد إخفاق الشدّ ثنائي المحور σ. يناقش تساي و وو أيضاً استعمالَ اختباراتٍ محورية خارج المحور من أجل تعيين متانات التفاعل مثل F_{12} [2–26].

لنتذكّر عند هذه النقطة أن مجمل التفاعل بين الإجهادات الناظمية σ_1 و σ_2 في معيار إخفاق تساي–هيل يرتبط مع المتانة في الاتجاه 1 وفق:

$$\frac{\sigma_1^2}{X^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{X^2} + \frac{\sigma_2^2}{Y^2} + \frac{\tau_{12}^2}{S^2} = 1 \tag{2.150}$$

وهكذا، يتضح أن موتّر (تنسور) معيار إخفاق – تساي – وو ذو صفة أكثر عمومية من معيارَي إخفاق تساي–هيل وهوفمان. تتضمن المزايا الخاصة لمعيار إخفاق – تساي – وو (1) اللاتغيّر عند دوران الإحداثيات أو إعادة تعريفها؛ (2) التحويل وفقاً لقوانين تحويل الموتّر المعروفة (وبالتالي تسهيل عملية تفسير المعطيات)؛ و(3) مميزات التناظر المماثلة لمعاملات الجساءاة والمطاوعة (compliances). بناءً على كلّ ذلك، تكون العمليات الرياضية باستعمال موتّر (تنسور) معيار الإخفاق هذا معروفةً وبسيطةً نسبياً.

قاس بايبس وكول [2–25] حدّ التفاعل F_{12} ضمن اختبارات عديدة خارج المحور من أجل الإيبوكسي–بورون، وأفادا عن تغيّر ملموس لـــ F_{12} من أجل اختبارات شدّ خارج المحور وعن تغيّر مقبولٍ في حالة اختباراتِ ضغط خارج المحور. مع ذلك، إن تحقيق اختبارات الضغط أصعبُ بكثير من إنجاز اختبارات الشدّ خارج المحور "السهلة" على عيّنة مسطّحة ذات نسبة كبيرة للطول على العرض. تكون عيّنة الضغط ذات النسبة الكبيرة للطول على العرض من أجل تجنّب آثار الاقران استطالة–قصّ عرضةً بشكل كبير إلى الانبعاج؛ ولذلك يجب استعمال عيّنة أنبوبية (ذات نهاية لتجنّب آثار الاقران استطالة–قصّ).

بالرغم من أن تحديد F_{12} لم يكن دقيقاً، حصل بايبس وكول على توافقٍ ممتاز بين موتّر (تنسور) معيار إخفاق – تساي – وو والمعطيات التجريبية المبيّنة في الشكل 2-45. ينجم عن تغيرات F_{12} بمعدل جداء مساوٍ لثمانية تغيّرات بسيطة فقط في المتانة المتوقَّعة ضمن المجال $5^\circ < \theta < 25^\circ$، كما أن الفرق بين موتّر (تنسور) معيار إخفاق – تساي – وو ومعيار إخفاق لتساي–هيل كان أقلّ من 5% ضمن المجال $5^\circ < \theta < 25^\circ$.

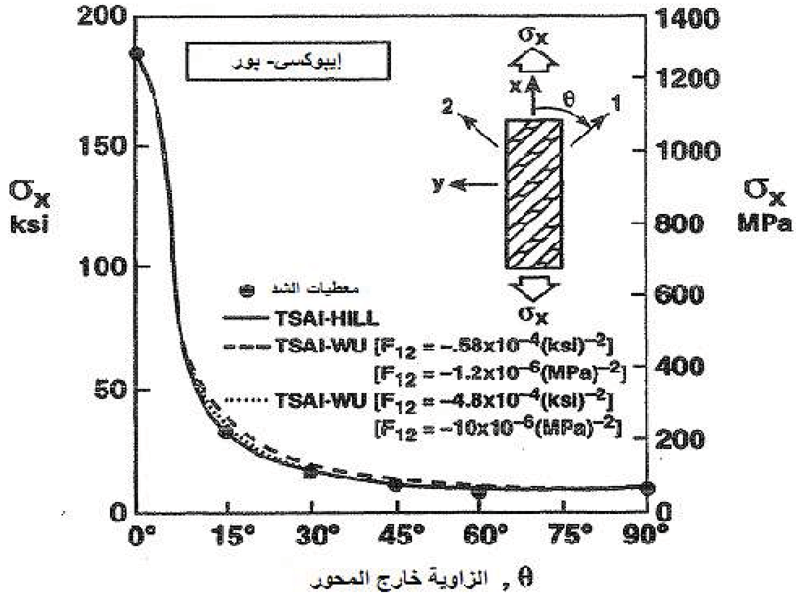
يمتلك معيار إخفاق لـــتساي–وو مميزات مهمة عديدة:

(1) قدرةٌ أكبر على إجراء مطابقة المنحنى مقارنةً بمعيارَي تساي–هيل وهوفمان، بسبب وجود حدّ إضافي في المعادلة.

(2) لا يمكن تعيين الحدّ الإضافي F_{12} إلاّ بواسطة اختبار ثنائي المحور مكلفٍ وصعب التحقيق.

(3) تغدو التفسيرات البيانية للنتائج أسهلَ بسبب الصياغة الموتّريّة.

وبسبب صعوبة وكلفة الحصول على قيمة موثوقة لـــ F_{12} وحقيقة التأثير الصغير لـــ F_{12} على النتائج النهائية كما يبدو، اقترح ناراياناسوامي (Narayanaswami) وأديلمان (Adelman) [2–27] أنه يمكن ببساطة اعتبار F_{12} مساوٍ للصفر. تتجنّب هذه المقاربة العملية التكاليفَ الباهظة للاختبار ثنائي المحور.



الشكل 2–45: موتّر (tensor) معيار إخفاق ـــ تساي ـــ وو (عن ـــ بايبس (Pipes) وكول (Cole) [2–25])

6.9.2 خلاصة لمعايير الإخفاق

وصف سينديكيج (Sendeckyj) [2–28] معايير أخرى للمتانة، كما عالج تينيسون (Tennyson) وماكدونالد (MacDonald) ونانيارو (Nanyaro) الخطوةَ المنطقية التالية في عملية مطابقة المنحنى، ألا وهي المطابقة بواسطة كثير حدود من الدرجة الثالثة لمعطيات الإخفاق [2–29]. مع ذلك، لقد حدّ التعقيدُ الإضافي لمعيارهم مجال استخدامه، بالرغم من أنهم قد حددوا بعض شروط التحميل التي يغدو معيارهم معها ضرورياً لوصف سلوك الإخفاق الفعليّ بشكلٍ جيد.

9.2 مجموعة المسائل

1.9.2 عيّن أيّاً من المعايير الفرعية للإخفاق صالحٌ للتطبيق، وذلك من أجل كلّ جزءٍ من المنحنيات متعددة الأجزاء الموافقة لمعيار إخفاق الإجهاد الأعظمي ومعيار إخفاق الانفعال الأعظمي في الشكلَين 37.2 و 38.2 من أجل حمولة σ_x محورية خارج المحور.

2.9.2 استنتج المعادلة (2.131) انطلاقاً من المعادلات (2.128)، (2.129) و(2.130).

3.9.2 استنتج المعادلة (2.132) انطلاقاً من المعادلتَين (2.131) و(2.125).

4.9.2 استنتج المعادلة (2.134) انطلاقاً من المعادلتَين (2.132) و(2.133).

5.9.2 ماهو معيارُ إخفاق – تساي – هيل عندما تكون ألياف رقاقة أحادية الاتجاه في المستوي 1–2 مصطفةً في الاتجاه 2؟ ارمز – كما هو معتاد – لمتانة الرقاقة وفق اتجاه الليف بالرمز X؛ وبالتالي تكون المتانة في الاتجاه 1 هي Y. قارن هذا المعيار بالمعادلة (2.132)

6.9.2 أوجدْ معيارَ إخفاق – تساي – هيل من أجل حمولة قصٍّ صرفة تصنع زوايا θ متنوّعة مع الاتجاهات الرئيسية للمادة، أي القصّ المشابه مع المعادلة (2.134)

7.9.2 لاحظ أنه من أجل معطيات تساي للإيبوكسي– زجاج–E في الشكل 2-36 تكون قيمة متانة الضغط المحورية عند زوايا بين °0 و°90 أقلّ فعلياً من Y_c (هذا الأمر غير صحيح من أجل متانة الشدّ المحورية). الاستدلال الصحيح هنا هو أن متانة قصّ الإيبوكسي– زجاج –E منخفضة. تعتبر هذه الحالة المشابه من حيث المتانة في معيار إخفاق – تساي – هيل في المعادلة 2.134 لتغيّر الجساءة المدروسة في المسألة 7.6.2. أوجد العلاقة بين X, S وY التي تسمح للمتانة المحورية خارج المحور أن تأخذ قيماً منخفضة بهذا الشكل، وكذلك العلاقة في حالة كون قيم المتانة المحورية خارج المحور أكبر من X.

8.9.2 حدد سمةَ معيار إخفاق لتساي–هيل من أجل حمولةٍ قصٍّ صرفة عند زوايا خارج المحور بين °0 و°90، وذلك من خلال تفحّص مميِّزات النتيجة انطلاقاً من المسألة 6.9.2 وباستخدام تقانيات الملحق ب. يعني ذلك أن هذا هو مشابه القصّ للمسألة 7.9.2.

10.2 موجز

ناقشنا في الفقرة 2.2 علاقات الإجهاد– انفعال (قانون هوك المعمَّم) من أجل مواد غير متماثلة المناحي ومواد ثلاثية المناحي ومواد متماثلة المناحي. تمتلك هذه

العلاقات طريقتين مألوفتين ومقبولتين للتعبير: معاملات المطاوعة ومعاملات الجساءة كمعاملات (ثوابت مرونة) لعلاقات الإجهاد− انفعال. يتضمّن الشكلُ الأكثر جاذبيةً لعلاقات الإجهاد− انفعال من أجل المواد ثلاثية المناحي إدراجَ الثوابتَ الهندسية الموصوفة في الفقرة 3.2. إن الثوابت الهندسية مفيدة بشكل خاص لوصف سلوك المواد المركّبة لأن تعريفها يتمّ باستخدام القياسات الفيزيائية الأبسط والأكثر وضوحاً. في الفقرة 4.2، تم اشتقاق بعضَ القيود على ثوابت المرونة على شكلِ حدود. تعتبر هذه القيود مفيدة لفهم السلوك غير المألوف للمواد المركّبة مقارنةً بسلوك المواد متماثلة المناحي التقليدية. تركّز الاهتمام في الفقرة 5.2 على علاقات الإجهاد− انفعال من أجل مواد ثلاثية المناحي تحت شروط الإجهاد المستوي الذي يمثّل الاستخدامَ الأكثر شيوعاً للرقاقة المركّبة. تم في الفقرة 6.2 تحويل علاقات الإجهاد− انفعال هذه إلى علاقاتٍ ضمن أنظمة إحداثيات غير متوازية مع الاتجاهات الرئيسية للمادة في الرقاقة. إن هذا التحويل ضروري من أجل وصف سلوك مواد مركّبة ذات ألياف تأخذ اتجاهات مختلفة عن الاتجاهات الهندسية الطبيعية للعنصر الإنشائي (على سبيل المثال، تمتلك بنية قوقعة اسطوانية دائرية ذات لفٍ حلزوني إحداثياتٍ حلزونيةً تنتظم الألياف ضمنها بخلاف إحداثيات المحور والمحيط لبنية القوقعة الأسطوانية الدائرية هذه). وترتبط أكثر علاقات الإجهاد − انفعال لرقاقةٍ ثلاثية المناحي ذات اتجاهات رئيسية للمادة غير مصطفة مع الاتجاهات الهندسية الواضحة مع ثوابت هندسية معمّمة ومع المواد غير متماثلة المناحي. تبيّن في الفقرة 7.2 أن معاملات الجساءة المختزَلة والمحوَّلة التي تم اشتقاقها في الفقرة 6.2 تمتلك بعض التركيبات التي تبقى لامتغيرة تجاه إجراء دورانٍ للإحداثيات في مستوى الرقاقة، وتكون المقادير اللامتغيّرة هذه مفيدةً عند تصميم البنى المركّبة الصفائحية. تم بعد ذلك في الفقرة 8.2 معالجة موضوعَ متانة الرقاقة المهم، حيث تمّ في حالة المواد المركّبة رفضُ المقاربة المألوفة في حالة المواد التقليدية متماثلة المناحي والقائمة على مقارنة الإجهاد الرئيسي الأعظمي مع الإجهاد الأعظمي المسموح به. تم بعد ذلك وصف اختبارات قياس معاملات الجساءة ومتانات الرقاقات المركّبة ثلاثية المناحي في الإحداثيات الرئيسية للمادة. تضمن الفقرة 9.2 مناقشة الإجراءات لتقدير المتانة ضمن إحداثيات غير رئيسية للمادة، والمتانة تحت شروط حمولةٍ ثنائية المحور.

وتبين أن هناك معيارَ إخفاقٍ تربيعيّ في الإجهادات ثنائية المحور يتّفق بشكل جيد مع المعطيات التجريبية.

المراجع

2-1 Stephen W. Tsai, *Mechanics of Composite Materials, Part II*, Theoretical Aspects, Air Force Materials Laboratory Technical Report AFML-TR-66-149, November 1966.

2-2 B. M. Lempriere, "Poisson's Ratio in Orthotropic Materials." *AIAA Journal*: November 1968, pp. 2226-2227.

2-3 E. O. Dickerson and B. DiMartino, "Off-Axis Strength and Testing of Filamentary Materials for Aircraft Application." in: *Advanced Fibrous Reinforced Composites*, Vol. 10, Society of Aerospace Materlafs and Process Engineers, 1966, p. H-23.

2-4 Robert C. Reuter (Jr.). "Concise Property Transformation Relations for an Anisotropic Lamina." *Journal of Composite Materials*: April 1971, pp. 270-272.

2-5 S. G. Lekhnlfskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body.* San Francisco: Holden-Day, 1963.

2-6 Robert M. Jones, "Stiffness of Orthotropic Materials and Laminated Fiber-Reinforced Composites." *AIAA Journal*: January 1974, pp. 112-114.

2-7 Stephen W. Tsai and Nicholas J. Pagano, "Invariant Properties of Composite Materials." in: *Composite Materials Workshop*, S. W. Tsai, J. C. Halpin, and Nicholas J. Pagano (eds.), St. Louis, Missouri, 13-21 July 1961, Technomlc, Westport, Connecticut, 1968, pp. 233-253. Also AFML- TR-67 -349, March 1968.

2-8 N. J. Pagano and P. C. Chou, "The Importance of Signs of Shear Stress and Shear Strain in Composites." *Journal of Composite Materials*: January 1969, pp. 166-173.

2-9 S. A. Ambartsumyan, "The Axisymmetric Problem of a Circular Cylindrical Shell Made of Material with Different Stiffness in Tension and Compression." *Izvests Akademii Nauk SSSR Mekhanika*, no. 4. 1965, pp. 77-85; English translation N69-11070, STAR.

2-10 Robert M. Jones, "Buckling of Stiffened Multilayered Circular Cylindrical Shells with Different Orthotropic Moduli in Tension and Compression." *AIAA Journal*: May 1971, pp. 917-923.

2-11 Charles W. Bert, "Models for Fibrous Composites with- Different Properties in Tension and Compression." *Journal of Engineering Materials and Technology:* October 1977, pp. 344-349.

2-12 C. W. Bert and J. N. Reddy, "Mechanics of Bimodular Composite Structures." in: *Mechanics of Composite Materials - Recent Advances*, Proceedings of the IUTAM Symposium on Mechanics of Composite Materials, Zvi Hashin and Carl T. Herakovich (eds.), Blacksburg, Virginia, 16-19 August 1982, Pergamon Press, New York, 1983, pp. 323-337.

2-13 N. J. Pagano and J. C. Halpin, "Influence of End Constraint in the Testing of Anisotropic Bedies." *Journal of Composite Materials:* January 1968, pp. 18-31.

2-14 J. M. Whitney, N. J. Pagano, and R. B. Pipes, "Design and Fabrication of Tubular' Specimens for Composite Characterization." Paper presented at: *Composite Materials: Testing and Design (Second Conference),* H. T. Corten (Chairman), Anaheim, California, 20-22 April 1971, ASTM STP 497, American Society for Testing and Materials, 1972, pp. 52-67.

2-15 Hong T. Hahn and Stephen W. Tsai, "Nonlinear Elastic Behavior of Unidirectional Composite Laminae." *Journal of Composite Materials:* January 1973, pp. 102-111.

2-16 Robert M. Jones and Harold S. Morgan, "Analysis of Nonlinear Stress-Strain Behavior of Fiber-Reinforced Composite Materials." *AIM Journal:* December 1977, pp. 1669-1676.

2-17 Max E. Waddoups, "Characterization and Design of Composite Materials." in: Composite *Materials' Workshop,* S. W. Tsai, J. C. Halpin, and Nicholas J. Pagano (eds.), St. Louis, Missouri, 13-21 July 1967, Technomic, Westport, Connecticut, 1968, pp. 254-308.

2.18 J. M. Whitney, D. L. Stansbarger, and H. B. Howell, "Analysis of the Rail Shear Test -Applications and Limitations." *Journal of Composite Materials:* January 1971, pp. 24-34.

2-19 John Hart-Smith, Douglas Aircraft Company, Long Beach, California, Communication.

2-20 Glenn Murphy, *Advanced Mechanics of Materials.* New York: McGraw-Hill, 1946. p. 83.

2-21 Stephen W. Tsai, "Strength Theories of Filamentary Structures." Paper presented at: *Fundamental Aspects of Fiber Reinforced Plastic Composites,* Conference Proceedings, R. T. Schwartz and H. S. Schwartz (eds.), Dayton, Ohio, 24-26 May 1966, Wiley Interscience, New York, 1968, pp. 3-11.

2-22 R. Hill, *The Mathematical Theory of Plasticity.* London: Oxford University Press,1950, p. 318.

2-23 Oscar Hoffman, "The Brittle Strength of Orthotropk: Materials." *Journal of Composite Materials:* April 1967, pp. 200-206.

2-24 Ran Y. Kim, Personal Communication, 8 April 1981. For additional information, see: Ran Y. Kim, "On the Off-Axis and Angle-Ply Strength of Composites." in: *Test Methods and Design Allowables for Fibrous Composites,* C. C. Chamis (ed.), Dearbom, Michigan, 2-3 October 1979, ASTM STP 734, American Society for Testing and Materials, 1981, pp. 91-108 (reprinted with permission).

2-25 R. Byron Pipes and B. W. Cole, "On the Off-Axis Strength Test for Anisotropic Matrials." *Journal of Composite Materials:* April 1973, pp. 246-256.

2-26 Stephen W. Tsai and Edward M. Wu, "A General Theory of Strength for Anisotropic Materials." *Journal of Composite Materials:* January 1971, pp. 58-80.

2-27 R. Narayanaswami and Howard M. Adelman, "Evaluation of the Tensor Polynomial and Hoffman Strength Theories for Composite Materials." *Journal of Composite Materials:* October 1977, pp. 366-377.

2-28 G. P. Sendeckyj, "A Brief Survey of Empirical Multiaxlal Strength Criteria for Composites." Paper presented at: *Composite Materials: Testing and Design (Second Conference),* H. T. Corten (Chairman), Anaheim, California, 20-22 April 1971, ASTM STP 497, American Society for Testing and Materials, 1972, pp. 41-51.

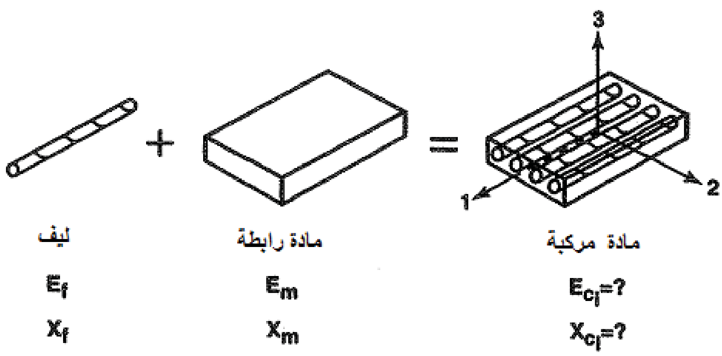
2-29 R. C. Tennyson, D. MacDonald, and A. P. Nanyaro, "Evaluation of the Tensor Polynomial Failure Criterion for Composite Materials." *Journal of Composite Materials:* January 1978, pp. 63-75.

الفصل الثالث

السلوك الميكانيكي الميكروي لرقاقة

1.3 مقدّمة

تطرّقنا في الفصل الثاني إلى معالجة الخصائص "الظاهرية" للرقاقة، ويعني ذلك أنه تم اعتبار قطعةً كبيرةً بشكل كافٍ من الرقاقة بحيث لا يمكن كشف حقيقةِ كونها مؤلّفة من مكوّنَين ماديَّين أو أكثر. وهكذا، أمكن لنا – وبطريقة سحرية تقريباً– القول إن مادة مركّبة من إيبوكسي– بورون ذات ألياف بورون أحادية الاتجاه ضمن الإيبوكسي لها بعض قيم معاملات الجساءة والمتانات التي قمنا بقياسها وفق اتجاهات متعدّدة. مع ذلك، لم يتم طرح هذا السؤال: كيف يمكن تغيير معاملات جساءة أو متانات مادة مركّبة من الإيبوكسي– غرافيت عبر تغيير نسبة ألياف الغرافيت إلى مصفوفة مادة الإيبوكسي؟ أي أن السؤال الأساسي في الميكانيك الميكروي هو: ما هي العلاقة بين خصائص المادة المركّبة وخصائص مكوّناتها المادية، كما في الشكل 3-1.



الشكل 3-1: السؤال الأساسي في الميكانيك الميكروي

تماماً، وحيث إنه يتوجّب وجود نوعٍ منطقي من الأسباب لاختيار جساءةٍ و/أو متانة خاصتّين للمادة الهندسية من أجل تطبيق إنشائي معيَّن ما، فإنه لا بدّ كذلك من وجود سببٍ منطقي لتحديد كيفية تحقيق هذه الجساءة والمتانة من أجل مادة مركَّبة من مادتين أو

أكثر. هذا يعني كيف يمكن تغيير النسب المئوية للمواد المكوِّنة من أجل الوصول إلى القيم المطلوبة لجساءة ومتانة المادة مركبة؟

يمكن المساعدةُ في تقسيمٍ مناسبٍ للجهود المذكورة أعلاه من خلال تعريف منطقتَين لسلوك المادة المركّبة –هما الميكانيك الميكروي والميكانيك الماكروي:

الميكانيك الميكروي (المجهري) (micromechanics) – هو دراسة سلوك المادة المركّبة حيث يتم تفحّص بالتفصيل التفاعل المتبادلة بين المواد المكوِّنة كجزءٍ من تعريف سلوك المادة المركّبة غير المتجانسة.

الميكانيك الماكروي (macromchranics) – هو دراسة سلوك المادة المركّبة حيث نفترضها متجانسةً وأن آثار المواد المكوِّنة لها لا يمكن كشفها إلاّ كخصائص ظاهرية (apparent) وسطية للمادة المركّبة.

هكذا، يمكن لخصائص الرقاقة أن تتعيّن تجريبياً في الحالة "الناتجة من التصنيع"، أو أن يتمّ تقديرها رياضياً على أساس خصائص المواد المكوِّنة. يعني ذلك أننا نستطيع التوقع بخصائص الرقاقة من خلال إجرائيات الميكانيك الميكروي، وأننا نستطيع قياس خصائص الرقاقة عبر طرق فيزيائية واستخدامها للقيام بتحليل ميكانيكي ماكروي للبنية. إن معرفة كيفية التوقع الخصائص هي جوهرية لصنع مواد مركّبة التي يجب أن تمتلك بعض الخصائص الظاهرية الماكروية. هكذا، يكون الميكانيك الميكروي ملحقاً طبيعياً للميكانيك الماكروي عندما ينظر له ضمن تصميم المواد الهندسية وليس كبيئةِ تحليل بنيوي.

يمكن تبيان القوة الحقيقيّة في التصميم عندما تتفّق توقعات الميكانيك الميكروية عن خصائص الرقاقة مع القيم المقاسة تجريبياً لهذه الخصائص. مع ذلك، لنعترف أن هناك قيوداً مهمة ومتأصلّة في صميم التحليل الميكانيكي الميكروي؛ فعلى سبيل المثال، تُعتبر الرابطةُ المثالية بين الألياف والمصفوفة تقييداً مألوفاً أثناء التحليل قد لا تحققه بعض المواد المركّبة. ومن الجائز أن تؤدي الرابطة غير المثالية إلى مادة ذات خصائص أسوأ من تلك التي يتوقع بها التحليل الميكانيكي الميكروي. وهكذا، يتوجّب إثبات صلاحية نظريات الميكانيك الميكروي عبر العمل التجريبي الدقيق. ومع اعتبار جميع هذه الإفادات العامة كقاعدة، دعنا الآن ننكبّ على دراسة بعض نظريات الميكانيك الميكروي الخاصة.

هناك مقاربتان أساسيتان لميكانيك المواد المركّبة الميكروي:

(1) ميكانيك المواد

(2) المرونة

تجسّد مقاربة ميكانيك المواد (أو متانة المواد أو قوتها) المفهومَ المألوف لفرضيات تبسيطية على نحو واسع تتعلّق بالسلوك المفترَض للنظم الميكانيكية. أما مقاربة المرونة فهي تنطوي على الأقل على ثلاث مقاربات: (1) مبادئ تحديدية، (2) حلول صحيحة مضبوطة، و(3) حلول تقريبية. تتميّز جميع هذه المقاربات بتحقيقها الأكثر صرامةً للقوانين الفيزيائية (التوازن، استمرار التشويه وتآلفه، وعلاقات الإجهاد- انفعال) مقارنةً بميكانيك المواد. سيتم مناقشة كلتا المقاربتَين في هذا الفصل.

يكمن الهدف من جميع مقاربات الميكانيك الميكروي في تحديد معاملات المرونة (elasticity) أو معاملات الجساءة (stiffnesses) أو المطاوعة (compliances) لمادة مركّبة بدلالة معاملات المرونة للمواد المكوِّنة. على سبيل المثال، يجب تعيين عوامل المرونة لمادة مركّبة مقوّاة بالألياف بدلالة خصائص الألياف والمصفوفة ونسبها الحجمية:

$$C_{ij} = C_{ij}\left(E_f, \upsilon_f, V_f, E_m, \upsilon_m, V_m\right)$$

حيث E_f: عامل يونغ لليف متماثل المناحي

ν_f: نسبة بواسون لليف متماثل المناحي

V_f = حجم الألياف \ الحجم الكلّي للمادة المركّبة

مع تعاريف مشابهة من أجل المصفوفة.

هناك هدفٌ إضافي ومتمّم لمقاربات الميكانيك الميكروي في تحليل المواد المركّبة، وهو تحديد متانات المادة المركّبة بدلالة متانات المواد المكوِّنة. على سبيل المثال، يجب تعيين متانة المادة المركّبة المقوّاة بالألياف بدلالة متانات الألياف والمصفوفة وحجومها النسبية (بنسبة إلى الحجم الكلّي للمادة المركّبة). بشكلٍ وظيفي، يكون:

$$X_i = X_i\left(X_{if}, V_f, X_{im}, V_m\right)$$

حيث X_i= X, Y, S= متانات المادة المركّبة

X_{if} = X_f, Y_f, S_f= متانات الألياف

V_f = حجم الألياف \ الحجم الكلّي للمادة المركّبة

مع تعاريف مشابهة من أجل مادة المصفوفة، يمكن تغيير التعاريف السابقة لتفسير المتانات المختلفة تحت تحميل الشدّ أو الضغط. فوق ذلك، يمكن تبسيط التعاريف من أجل ألياف و/أو مصفوفة متماثلة المناحي. في الحقيقة، يمكن أن نصاب بالدهشة عند رؤيتنا لشكل العلاقة الوظيفة الفعلية في حالة متانة مادة مركّبة عند الضغط ، وسنأتي على ذلك بتفصيل أكبر لاحقاً.

لا تتوفّر أعمال وأدبيّات علمية كثيرة حول نظريات الميكانيك الميكروي عن المتانة. مع ذلك، فإن أعمالاً معتبَرة حول نظريات الميكانيك الميكروي حول الجساءة قد تمّ إنجازها. سوف نركّز على جوانب نظرية الجساءة الأكثر استخداماً (مثلاً معادلات هالبين– تساي Halpin-Tsai) بالإضافة إلى تلك الجوانب التي تبيّن بوضوح قوّة الميكانيك الميكروي. سوف يتم إيجاز المعلومات المتوفّرة عن المتانة مع نفس النية فيما يخصّ الجساءة.

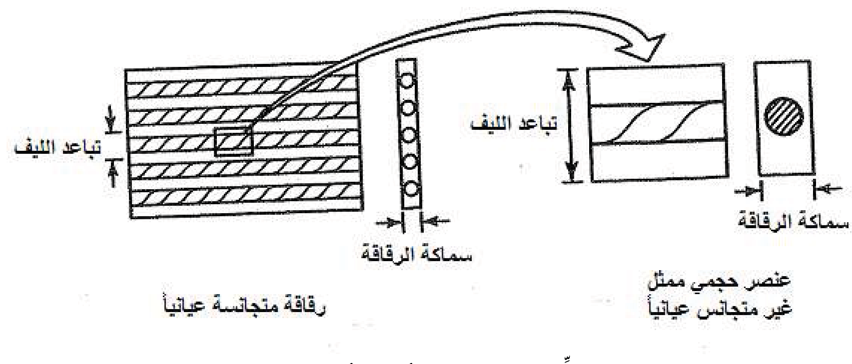
بغض النظر عن مقاربة الميكانيك الميكروي المستعملة للجساءة، تكون القيود الأساسية على المواد المركّبة التي يمكن معالجتها:

- الرقاقة
  - عديمة الإجهاد في البداية
  - متجانسة ماكروياً
  - مرنة خطيّاً
  - ثلاثية المناحي ماكروياً
- الألياف
  - متجانسة
  - متباعدة فيما بينها بانتظام
  - مرنة خطياً
  - متراصفة (مصطفّة) على نحو كامل
  - متماثلة المناحي
  - ملتصقة على نحو كامل
- المصفوفة
  - متجانسة
  - متماثلة المناحي
  - مرنة خطياً
  - عديمة الفجوات

بالإضافة إلى ذلك، لا يمكن أن توجد فجوات في الألياف أو في المصفوفة أو بينهما (يعني ذلك أن الروابط بين الألياف والمصفوفة مثالية كاملة). يتوجبّ أن تكون هذه الشروط التقييدية موضع شكٍ على الأقل، أي أن بعضها قد يبدو منطقياً بشكل تامّ ولكن

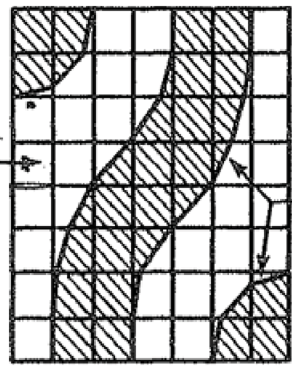
بعضها الآخر يبدو –ظاهرياً نوعاً ما– غيرَ محتمل الحدوث. على سبيل المثال، يمكن للمصفوفة أن تحتوي على قليلٍ من الفجوات بحيث يمكن اعتبارها خاليةً منها، ولكن الروابط بين الألياف والمصفوفة لن تكون بالتأكيد مثاليةً.

يُعتبر مفهوم العنصر الحجمي الممثِّل أساسياً في مناقشة الميكانيك الميكروي، وهو أصغر منطقةٍ أو قطعة من المادة يمكن النظر إلى الإجهادات والانفعالات فيها كما لو كانت منتظمة ماكروياً مع امتلاك العنصر الحجمي النسب الصحيحة للألياف وللمصفوفة أي أنه لا يزال يمثّل حجمياً المادة المركّبة مع مكوّناتها. مع ذلك، تكون الإجهادات والانفعالات غير منتظمة على المستوى الميكروي بسبب عدم تجانس المادة، وبالتالي يكون مقياس العنصر الحجمي مهماً جداً. عموماً، يظهر فقط ليف واحد في عنصر حجمي ممثِّل، ولكن قد نحتاج أحياناً إلى أكثر من ليف. يشكّل التباعد بين الألياف في الرقاقة المركّبة ذات الألياف أحادية الاتجاه بعداً واحداً للعنصر الحجمي الممثّل؛ بينما يتمثّل واحدٌ من البعدَين الآخرين بسماكة الرقاقة أو بالتباعد بين الألياف وفق اتجاه السماكة إذا كانت سماكة الرقاقة أكبر من ليف؛ ويكون البعد الثالث كيفياً. يبيّن الشكل 3-2 عنصراً حجمياً ممثِّلاً نموذجياً لرقاقةٍ ذات ألياف أحادية الاتجاه.



الشكل 3-2: عنصر حجمي ممثِّل – رقاقة ذات ألياف أحادية الاتجاه

يتوجّب على العنصر الحجمي الممثِّل من أجل رقاقات بألياف محيكة (منسوجة) في اتجاهَين أن يكون أكثر تعقيداً منه في حالة رقاقة بألياف أحادية الاتجاه. إذا أُهملت هندسة النسيج، يكون بعدان من أبعاد العنصر الحجمي الممثِّل، هما، تباعدي الألياف الموافقة. ويتحدّد البعد الثالث من خلال عدد الألياف في السماكة. أمّا إذا أخذنا بعين الاعتبار الهندسةَ الفعلية للنسيج (ألياف منحنية) فإن تمثيل العنصر الحجمي الممثِّل باستعمال عناصر منتهية، كما في الشكل 3-3 قد يصبح أمراً مرغوباً به. يُستعمل هنا عناصر محدودة بشكل مثلثات أو رباعيات الأضلاع – بما فيها المربّعات– لتمثيل على حدٍّ سواء الليف والمصفوفة المحيطة التي تعتبر مثالية.

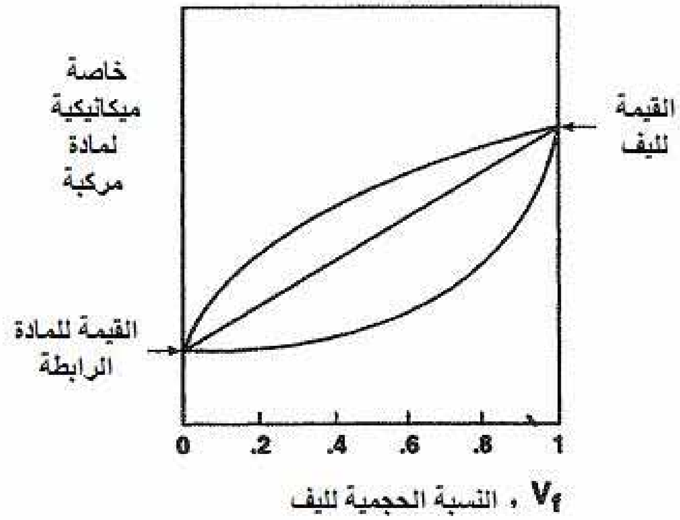


الشكل 3–3: نموذج عنصر محدود لعنصر حجمي ممثِّل من أجل رقاقة محيكة

بغضّ النظر عن مقاربة التحليل المعتمدة، يجب تعريف العنصر الحجمي الممثل واستخدامه بعناية. في الحقيقة، إن مفهوم العنصر الحجمي الممثِّل أمرٌ حاسمٌ وجوهري في التحليل، وهو المشابه في الميكانيك الميكروي لمخطّطات القوى المؤثرة في علمَي الاستاتيكا والديناميكا. إن رتبة العنصر الحجمي الممثِّل أعلى منها في مخطّط القوى المؤثرة، وذلك بسبب معالجة الأول للانفعالات والإجهادات بالإضافة إلى القوى.

تُمثَّل نتائجُ دراسات الميكانيك الميكروي للمواد المركّبة ذات الألياف أحادية الاتجاه كمنحنيات بيانية لخاصية ميكانيكيّة منفردة إزاء النسبة الحجمية للّيف. يبيّن الشكل

4-3 تمثيلاً تخطيطياً لعدة علاقات وظيفية ممكنة بين خاصية ما والنسبة الحجمية للألياف. وإضافة إلى ذلك، سيتم الحصول على الحدود العليا والدنيا لهذه العلاقات الوظيفية.

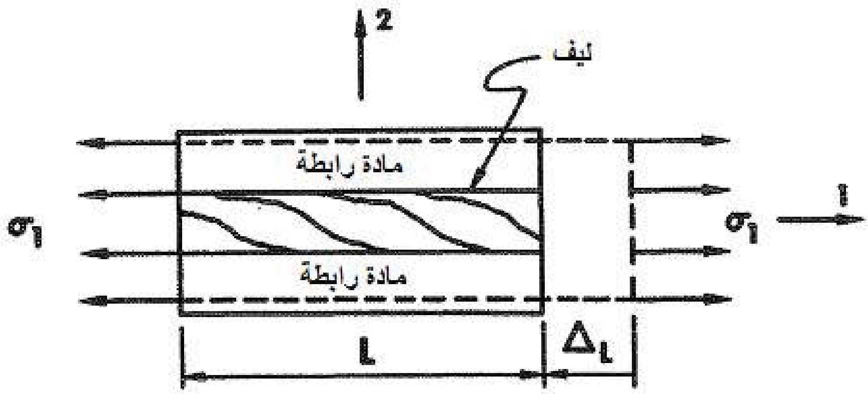


الشكل 3-4: أشكال نمطية لنتائج الميكانيك الميكروي

يُناقَش في الفقرة 2.3 مقاربةَ ميكانيك المواد لجساءة المادة الهندسية في الميكانيك الميكروي، حيث تُعرَض بعض التقريبات البسيطة للثوابت الهندسية E_1, E_2, υ_{12} و G_{12} لمادة ثلاثية المناحي. يناقش الفقرة 3.3 مقاربةَ المرونة لجساءة المادة الهندسية في الميكانيك الميكروي، حيث يتم تفحص تقنيات التحديد والحلول الصحيحة المضبوطة ومفهوم التجاور (contiguity) والمعادلات التقريبية لـــهالبين- تساي (Halpin-Tsai). يتم بعد ذلك في الفقرة 4.3 مقارنة نتائجَ المقاربات المتنوّعة، للتوقع بقيم الجساءة، بالبيانات التجريبية من أجل مواد مركّبة حبيبية وأخرى مقوّاة بالألياف. وبشكل موازٍ لدراسة جساءة المادة في الميكانيك الميكروي، يتم في الفقرة 5.3 إدخال تحليل الميكانيك الميكروي لمتانات المادة، حيث توصف توقعات ميكانيك المواد حول متانات الشدّ والضغط.

2.3 مقاربة ميكانيك المواد للجساءة

تكمن الميزة المفتاح لمقاربة ميكانيك المواد في وجوب اعتماد بعض الفرضيات التبسيطية حول السلوك الميكانيكي لمادة مركّبة من أجل الحصول على حلّ فعّال. يجب على كلّ فرضية أن تكون ممكنةً، وهذا يعني وجوبَ وجود سببٍ لإمكانية كون الفرضية صحيحة (لا يمكن للفرضيات في الميكانيك أن تكون اعتباطية). إن أهم الفرضيات الشهيرة هي أن الانفعالات وفق اتجاه الليف في المواد المركبة المقوّاة بألياف أحادية الاتجاه هي نفسها في الألياف كما في المصفوفة، كما يبيّن الشكل 3-5. إذا لم تكن الانفعالات هي نفسَها فإن ذلك يقتضي حدوث الكسر بين الألياف والمصفوفة. لهذا، تمتلك الفرضية سبباً مقنعاً. بما أن الانفعالات هي نفسها في كلا المصفوفة والألياف فمن الواضح أن المقاطع العمودية على المحور 1 التي كانت مستويةً قبل تطبيق الإجهاد عليها تبقى مستوية بعد تطبيقه. ما ذكرناه هنا يمثّل فرضيةً مهمةً في المقاربات المألوفة لميكانيك المواد، كما في نظريات العارضة (beam) والصفيحة والقوقعة. سوف نشتقّ – اعتماداً على هذه القاعدة – توقعات ميكانيك المواد عن المعاملات الظاهرية ثلاثية المناحي لمادة مركبة مقوّاة بالألياف أحادية الاتجاه، وبشكلٍ دقيق المعاملات E_1, E_2, υ_{12} و G_{12}. لاحظ أن أساسَ الفرضيات التبسيطية لأيّ توقع يكون راسخاً، وليس مجرّد فكرة مرغوب بها.



الشكل 3-5: عنصر حجمي ممثِّل مُحمَّل في الاتجاه 1

1.2.3 تحديد E_1

إن معامل المادة المركّبة في الاتجاه 1، أي في اتجاه الليف هو أولُ معاملٍ للتحديد. من الشكل 3-5 يكون:

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta_L}{L} \tag{3.1}$$

حيث ينطبق ε_1 على كلٍ من الألياف والمصفوفة بحسب الفرضية الأساسية. عندها إذا كان سلوكُ كلا المواد المكوِّنة مرناً، كانت الإجهادات في اتجاه الليف:

$$\sigma_f = E_f \varepsilon_1, \quad \sigma_m = E_m \varepsilon_1 \tag{3.2}$$

يؤثر الإجهاد الوسطيّ σ_1 في مساحة الفقرة العرضاني A للعنصر الحجمي الممثِّل، بينما يؤثّر σ_f على مساحة الفقرة العرضاني للألياف A_f، ويؤثر σ_m في مساحة الفقرة العرضاني للمصفوفة A_m. إذاً تكون محصلة القوة على العنصر الحجمي الممثِّل للمادة المركّبة:

$$P = \sigma_1 A = \sigma_f A_f + \sigma_m A_m \tag{3.3}$$

بتعويض المعادلة (3.2) في المعادلة (3.3) والإقرار من الميكانيك الماكروي بأن:

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1 \tag{3.4}$$

يكون ظاهرياً:

$$E_1 = E_f \frac{A_f}{A} + E_m \frac{A_m}{A} \tag{3.5}$$

ولكنّ يمكن كتابة النسبتين الحجميتين للألياف وللمصفوفة على النحو التالي:

$$V_f = \frac{A_f}{A}, \quad V_m = \frac{A_m}{A} \tag{3.6}$$

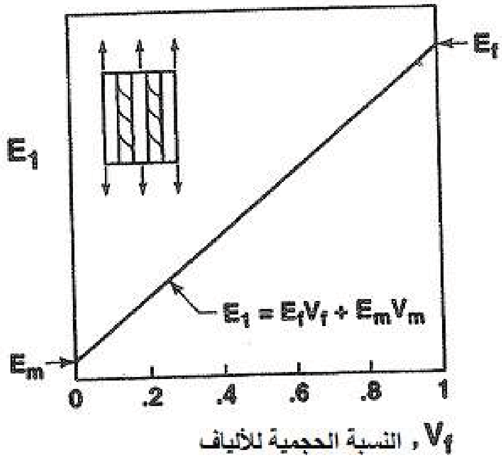
وبالتالي:

$$E_1 = E_f V_f + E_m V_m \tag{3.7}$$

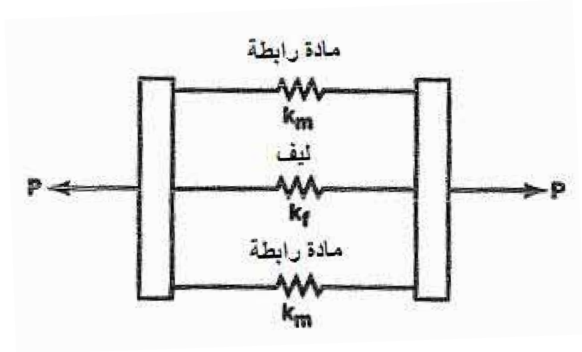
تُعرف هذه العلاقة بــقاعدة المخاليط لمعامل يونغ الظاهري للمادة المركبة في اتجاه الألياف، وتُمثَّل بيانياً في الشكل 3-6. تمثّل قاعدة المخاليط تغيّراً خطيّاً لمعامل يونغ الظاهري E_1 من القيمة E_m إلى القيمة E_f عندما تتغيّر V_f من 0 إلى 1. يفوق معاملُ الليف عادةً معاملَ المصفوفة بعدة أضعاف، ولذلك، يهيمن معاملُ الليف على معامل المركَّب E_1 عند قيمٍ عملية وشائعة للنسب الحجمية لليف حول القيمة 0.6− ، وأيّ تغييرات كبيرة في E_m لن تؤثّر إلاّ قليلاً في قيمة E_1 (لا يتناسب تأثيرها أبداً مع التغيّر في E_m) طالما لم تقترب النسبة الحجمية للألياف من الصفر. وهكذا ننظر إلى E_1 كخاصيّة يتحكّم بها الليف.

أمّا مشاركة الحمولة بين الليف والمصفوفة، فيمكن النظر إليها كنموذجٍ بسيط لنوابضَ على التوازي، كما في الشكل 3-7. إذا انفعلت جميع النوابض هنا بالمقدار نفسه (فرضية الانفعالات النسبية المتساوية) وكان $k_f >> k_m$، تحمّل النابض الليفي المقدارَ الأعظم من الحمولة المطبَّقة.

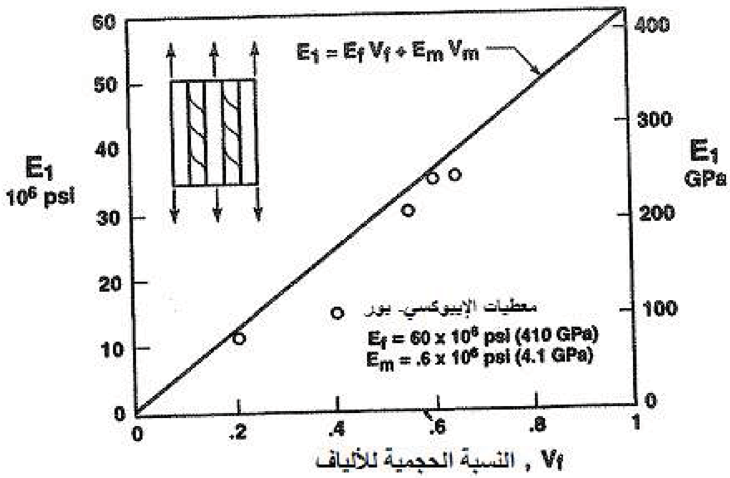
من أجل تثمين القيمة العملية لتحليل E_1 هذا، تأمّلْ وبتمعّن النتائج التجريبية وقارنها بالخط المستقيم المتوقَّع في الشكل 3-8. إن التطابق ممتاز!



الشكل 3−6: تغيّر E_1 مع النسبة الحجمية للألياف



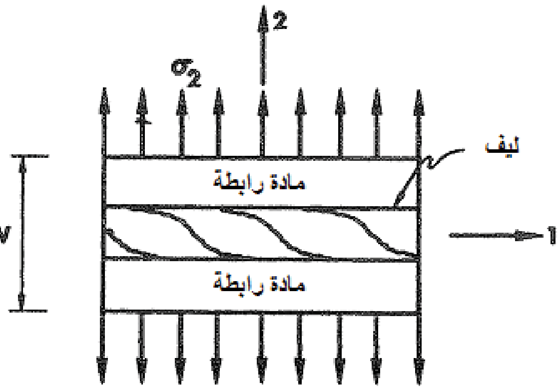
الشكل 3–7: التشارك في الحمولة في رقاقة مقوّاة بالألياف



الشكل 3–8: قيم E_1 المتوقَّعة إزاء المقاسة

2.2.3 تحديد E_2

نعتبر الآن معاملَ يونغ الظاهري E_2 للمادة المركّبة في الاتجاه العرضاني بالنسبة إلى الألياف (العمودي عليها). يُفترض في مقاربة ميكانيك المواد أن نفس الإجهاد العرضاني σ_2 يُطبّق على كلا الليف والمصفوفة، كما في الشكل 3-9. يعني ذلك ضرورةَ حدوث توازنٍ للعناصر المتجاورة في المادة المركّبة (الألياف والمصفوفة)، (وهذه إمكانية معقولةٌ جداً). مع ذلك، لا يمكننا القيام بأي تقريبٍ أو فرضية معقولة حول الانفعالات في الليف وفي المصفوفة وفق الاتجاه 2.



الشكل 3-9: عنصر حجمي ممثِّل محمَّل في الاتجاه 2

يمكن إيجاد الانفعالات في الليف وفي المصفوفة انطلاقاً من الإجهادات:

$$\varepsilon_f = \frac{\sigma_2}{E_f}, \quad \varepsilon_m = \frac{\sigma_2}{E_m} \tag{3.8}$$

إن البعدَ العرضاني الذي يؤثّر فيه ε_f وسطياً يساوي تقريباً لـــ $V_f W$، بينما يؤثّر ε_m في $V_m W$، وبالتالي يكون إجمالي التشويه العرضاني:

$$\Delta W = \varepsilon_2 W = V_f W \varepsilon_f + V_m W \varepsilon_m \tag{3.9}$$

أو

$$\varepsilon_2 = V_f \varepsilon_f + V_m \varepsilon_m \tag{3.10}$$

ويصبح ذلك بعد استبدال الانفعالات النسبية من المعادلة 8.3:

$$\varepsilon_2 = V_f \frac{\sigma_2}{E_f} + V_m \frac{\sigma_2}{E_m} \tag{3.11}$$

لكن ومن علاقة الإجهاد- الانفعال الماكروي:

$$\sigma_2 = E_2 \varepsilon_2 = E_2 \left(V_f \frac{\sigma_2}{E_f} + V_m \frac{\sigma_2}{E_m} \right) \tag{3.12}$$

ممّا يؤدي إلى:

$$E_2 = \frac{E_f E_m}{V_m E_f + V_f E_m} \tag{3.13}$$

وهذا هو التعبير في ميكانيك المواد لمعامل يونغ الظاهري في الاتجاه العرضاني بالنسبة إلى الألياف. يمكن جعل المعادلة (3.13) عديمة البعد على النحو:

$$\frac{E_2}{E_m}=\frac{1}{V_m+V_f\left(E_m/E_f\right)} \tag{3.14}$$

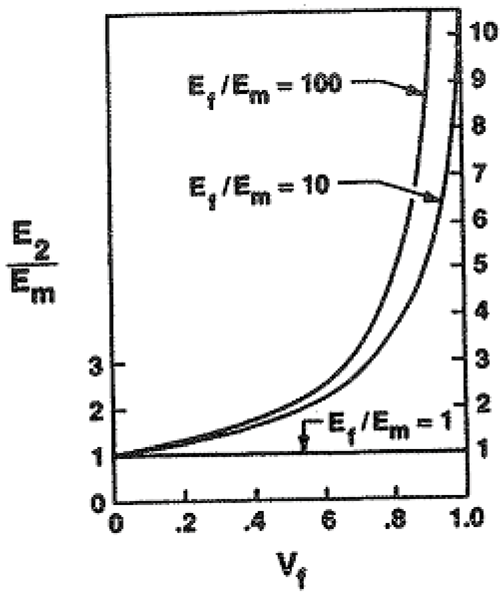
يعطي الجدول 3-1 قيماً لــ E_2/E_m من أجل ثلاث قيم لنسبة معامل الليف إلى معامل المصفوفة.

الجدول 3-1: قيم E_2/E_m من أجل قيم متنوّعة لــ E_f/E_m و V_f

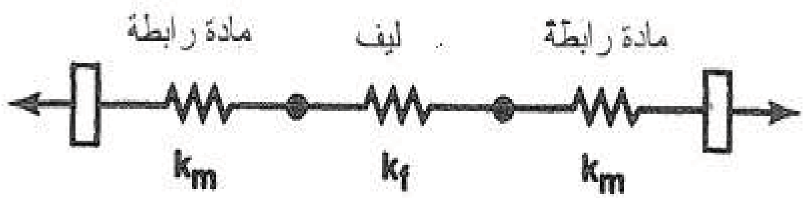
$\frac{E_f}{E_m}$	V_f							
	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	0.9	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1
10	1	1.22	1.56	1.82	2.17	3.56	5.26	10
100	1	1.25	1.66	1.98	2.46	4.80	9.17	100

يعطي الشكل 3-10 التمثيل البياني لنتائج E_2 المتوقَّعة من أجل ثلاث قيم لنسبة معاملَي الليف والمصفوفة. لاحظْ أنه إذا كان $V_f = 1$ فإن القيمة المتوقَّعة للمعامل هي تلك الموافقة للألياف. تذكّرْ مع ذلك أنه إذا طُبِّق إجهادُ الشدّ (tensile) σ_2، فإن ذلك يقتضي رابطةً مثالية بين الألياف (بين الألياف والمصفوفة)، بينما في حال تطبيق إجهادِ انضغاط (compressive) σ_2، ليس إلزامياً وجود مثل هذه الرابطة. لاحظْ كذلك أنه من الضروري وجود أكثرَ من 50% لكلّ حجم من الألياف لزيادة مقدار المعامل العرضاني E_2حتى ضعفَي مقدار معامل المصفوفة، حتى ولو كان $E_f=10\times E_m$! يعني ذلك أن الألياف لا تساهم كثيراً في المعامل العرضاني ما لم تكن نسبة الألياف عاليةً بشكل غير عملي. نستتنتج من كل هذا أن المصفوفة تتحكّم بخاصيّة E_2 للمادة المركّبة.

يمثّل نموذجٌ بسيطٌ لنوابضَ على التسلسل العنصرَ الحجمي الممثِّل المحمَّل في الاتجاه 2، كما في الشكل 3-11. وتكون المصفوفة هنا الوصلةَ الرخوةَ في سلسلة الجساءات، وبذلك تكون قيمة جساءة النابض منخفضةً جداً. ونتوقّع اعتماداً على هذا الأساس أن تشوهَ المصفوفة سوف يهيمن على تشوه المادة المركّبة.



الشكل 3−10: تغيّرات E_2 بدلالة النسبة الحجمية للألياف



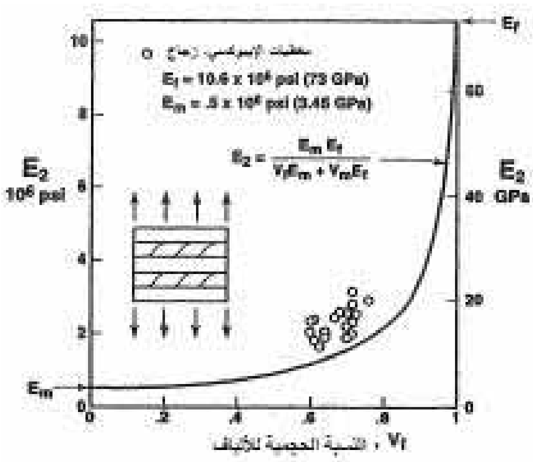
الشكل 3−11: المشاركة في التشوه في رقاقة مقوّاة بالألياف

من الواضح أن الفرضيات المتصلة بعملية الاشتقاق الآنفة الذكر ليست متماسكة بشكلٍ تامّ. هناك عدم توافق في الانفعال العرضاني عند الحدود بين الليف والمصفوفة بفضل المعادلة (3.8). علاوة على ذلك، لا تكون الإجهادات العرضانية على الأرجح نفسها في الليف وفي المصفوفة لأن υ_f غير مساوٍ لـــ υ_m. بدلاً من ذلك، سوف يشكّل التطابق التامّ للانزياحات عبر الحدود بين الليف والمصفوفة حلاً دقيقاً لمعامل يونغ العرضاني الظاهري. لا يمكن إيجاد مثلِ هذا الحلّ إلاّ باستخدام نظرية المرونة. ولا

يمكن تحديد مدى جدّيّة مثل هذه التناقضات الداخلية إلاّ من خلال المقارنة بالبيانات التجريبية.

هناك ملاحظة أخرى بخصوص هذا الحلّ، وهي أنه إذا كانت نسبتا بواسون للّيف وللمصفوفة غيرَ متساويتَين (هما مختلفتان على الأرجح) فإن ذلك سوف يحرّض على إيجاد إجهادات طولانية (longitutinal) في الليف وفي المصفوفة (مع محصلة قوة طولانية صافية معدومة)، مع إجهاداتِ قصٍّ مرافقةٍ عند الحدود بين الليف والمصفوفة. تنجم مثل إجهادات القصّ هذه – وبشكل طبيعي– عند بعض حالات الإجهاد، ولذلك لا يمكن اعتبار مميزة المادة هذه كأمرٍ غيرِ مرغوب به، أو كدليلٍ على عدم صلاحية الحلّ.

يبيّن الشكل 3-12 توقعات المعادلة 3.13 من أجل قيم E_2 بالإضافة إلى قيم E_2 التجريبية. يتضح هنا أن هذه المقاربة تقلّل من شأن مساهمةِ المصفوفة الليّنة في E_2. سوف نرى في الفقرة 4.3 أنه تتوفر مقارباتٍ أفضل لتقدير E_2، ولكن مقابل كلفة تعقيدٍ أكبر.



الشكل 3–12: قيم E_2 المتوقَّعة إزاء المقاسة (البيانات عن تساي Tsai [3–1])

3.2.3 تحديد υ_{12}

يمكن الحصول على ما يُعرَف بنسبة بواسون Poisson الأساسية υ_{12} من خلال مقاربةٍ مشابهة للتحليل من أجل E_1. بدايةً، تتعرّف نسبة بواسون الأساسية من خلال:

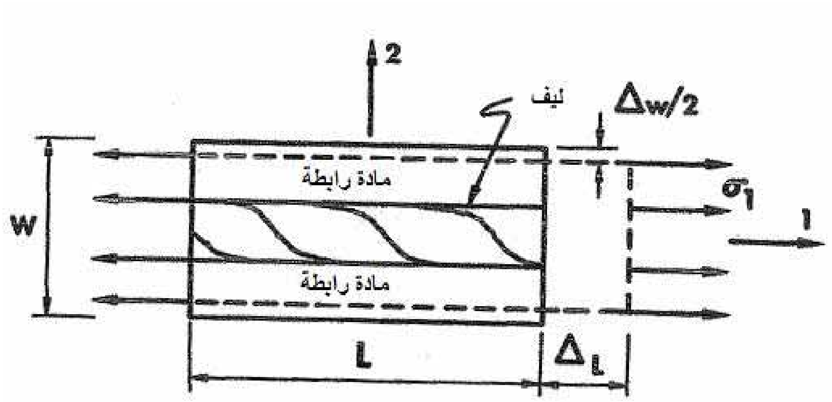
$$\upsilon_{12} = -\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \tag{3.15}$$

وذلك من أجل حالةٍ إجهاديّة حيث $\sigma_1 = \sigma$ وجميع الإجهادات الأخرى معدومة. نقوم بعد ذلك بوصف الانفعالات في العنصر الحجمي الممثِّل في الشكل 3-13. تكمن الفرضية التبسيطيّة الأساسية هنا في أن الانفعالات في الليف تكون مطابقةً لتلك في المصفوفة وذلك في اتجاه الليف، كما كان الحالُ في مقاربة E_1. يكون التشوهُ العرضاني ماكروياً Δ_W:

$$\Delta_W = -W\,\varepsilon_2 = W\,\upsilon_{12}\varepsilon_1 \tag{3.16}$$

بينما يكون مجهرياً:

$$\Delta_W = \Delta_{mW} + \Delta_{fW} \tag{3.17}$$



الشكل 3-13: عنصر حجمي ممثِّل مُحمّل في الاتجاه 1

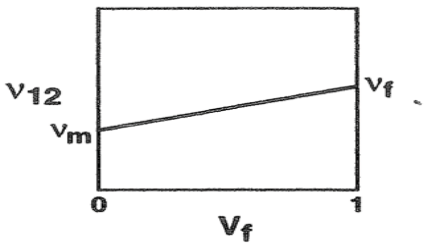
وبطريقةٍ مماثلة لتلك في تحليل معامل يونغ العرضاني E_2، يكون التشوهان العرضانيّان Δ_{mW} و Δ_{fW} بشكلٍ تقريبي:

$$\Delta_{mW} = WV_m \upsilon_m \varepsilon_1, \quad \Delta_{fW} = WV_f \upsilon_f \varepsilon_1 \tag{3.18}$$

تُدمج المعادلتان (3.16) –(3.18) مع التقسيم على $\varepsilon_1 W$ للحصول على:

$$\upsilon_{12} = \upsilon_m V_m + \upsilon_f V_f \tag{3.19}$$

وهذه قاعدة مخاليط من أجل نسبة بواسون الأساسية التي يمثلها الشكل 3-14 بيانياً بطريقةٍ مماثلة لتلك في E_1. بما أن نسبتَي بواسون υ_m و υ_f غيرُ مختلفتَين عن بعضهما البعض بشكل كبير، تكون نسبة بواسون الأساسية υ_{12} للمادة المركّبة حياديةً، أي أنه لا الألياف تهيمن ولا المصفوفة تهيمن. سوف تُعرض النتائج التجريبية لقيم υ_{12} في الفقرة 2.4.3.



الشكل 3–14: تغيّر υ_{12} إزاء النسبة الحجمية للألياف

4.2.3 تحديد G_{12}

يتحدّد معامل القصّ المستوي لرقاقةٍ في مقاربة ميكانيك المواد عبر افتراض كون إجهادات القصّ على الليف وعلى المصفوفة متطابقة فيما بينها (لا يمكن لانفعالات القصّ، بوضوح، أن تكون نفسها). يُظهر الشكلُ 3-15 الحمولةَ في العنصر الحجمي الممثِّل. استناداً إلى الفرضية الأساسية، يكون:

$$\gamma_m = \frac{\tau}{G_m}, \quad \gamma_f = \frac{\tau}{G_f} \qquad (3.20)$$

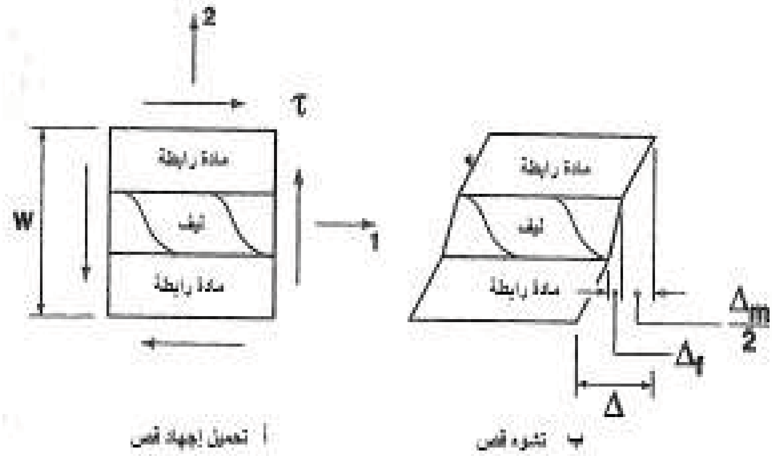
يمكن إهمال السلوك اللاخطّي لإجهاد القصّ– انفعال القصّ وهو سلوك نموذجي في المواد المركّبة المقوّاة بالألياف، أي يمكن النظر إليه، كما لو كان سلوكاً خطّيّاً.

يبيّن الشكل 3-15 هذه الانفعالات على المقياس الميكروي. لاحظ أن المصفوفة تنفعل أكثر من الليف في حالة القصّ لأن معامل القصّ في المصفوفة أقل منه في الليف. يُعطى تشوه القصّ بالعلاقة:

$$\Delta = \gamma W \qquad (3.21)$$

وتتألّف تقريباً من انفعالات ميكروية:

$$\Delta_m = V_m W \gamma_m, \quad \Delta_f = V_f W \gamma_f \qquad (3.22)$$



الشكل 3-15: عنصر حجمي ممثِّل مع تحميل قصّ (shear)

وحيث إن $\Delta = \Delta_m + \Delta_f$، يؤدي التقسيم على W إلى:

$$\gamma = V_m \gamma_m + V_f \gamma_f \qquad (3.23)$$

ومن خلال التعويض بالمعادلة (3.20) وإدراك العلاقة الماكروية:

$$\gamma = \frac{\tau}{G_{12}} \qquad (3.24)$$

يمكن كتابة المعادلة (3.23) على الشكل:

$$\frac{\tau}{G_{12}} = V_m \frac{\tau}{G_m} + V_f \frac{\tau}{G_f} \qquad (3.25)$$

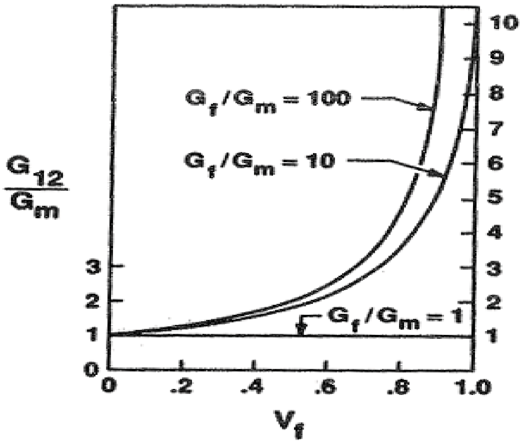
أخيراً:

$$G_{12} = \frac{G_m G_f}{V_m G_f + V_f G_m} \qquad (3.26)$$

وهذه علاقة من نفس نمط العلاقة التي تم الحصول عليها لمعامل يونغ العرضاني E_2. كما في حالة E_2، يمكن جعلُ تعبيرِ G_{12} منظَّماً من خلال معاملٍ مرتبطٍ بالمصفوفة، أي:

$$\frac{G_{12}}{G_m} = \frac{1}{V_m + V_f \left(G_m / G_f\right)} \qquad (3.27)$$

ويبيّن الشكل 3-16 الرسمَ البياني لهذه العلاقة من أجل عدة قيم لـــ G_f/G_m. لا يمكن لـــ G_{12} أن يزيد على ضعفَي قيمة G_m – حتى ولو كان $G_f/G_m=10$! – إلاّ إذا كان حجم الألياف أكبر من 50% من الحجم الكلّيّ. كما هو الحال مع E_2، تهيمن المادة المصفوفة على معامل القصّ G_{12} للمادة المركّبة. هناك بين القيم المقاسة لـــ G_{12} والقيم المتوقَّعة علاقة مماثلة لتلك الموافقة لـــ E_2، التي يوضّحها الشكل 3-12 (انظر الفقرة 2.4.3).



الشكل 3−16: تغيّر G_{12} بدلالة النسبة الحجمية للألياف

5.2.3 ملاحظات تلخيصية

تقدّم المناقشة السابقة أمثلةً لا غير عن أنماط مقاربات ميكانيك المواد التي يمكن استخدامها. تقود فرضيات أخرى حول السلوك الفيزيائي إلى علاقات أخرى لعوامل المرونة الأربعة في رقاقة مقوّاة في اتجّاه واحد. على سبيل المثال، حصل إكفال Ekvall [3−2] على تغييرٍ في علاقة قاعدة المخاليط لـــ E_1، وفي علاقة E_2 التي تأخذ بعين الاعتبار حالةَ الإجهاد ثلاثية المحاور ضمن المصفوفة والناجمةَ عن تقيُّد الليف:

$$E_1 = V_f E_f + V_m E_m^{'} \tag{3.28}$$

$$E_2 = \frac{E_f E_m^{'}}{V_f E_m^{'} + V_m E_f \left(1-\upsilon_m^2\right)} \tag{3.29}$$

حيث:

$$E_m^{'} = \frac{E_m}{1-21-\upsilon_m^2} \tag{3.30}$$

مع ذلك، لا تكون هذه التغييرات على العلاقات المشتقّة سابقاً ذاتَ أهميّة إلاّ من أجل $\upsilon_m < 1/4$. أوجدَ إكفال تغييرات أخرى لتفسير سمات بارزة أخرى مثل كون

الألياف مربّعة أو مستطيلة بدلاً من دائرية ولاعتبار تركيز الإجهادات الناجمة عن الألياف [3-3].

مجموعة المسائل 2.3

1.2.3 استخدم مقاربةً لميكانيك المواد من أجل تحديد معامِل يونغ الظاهري لمادة مركّبة مع "محتبس" "(inclusion)" ذو شكلٍ اعتباطي في عنصرٍ مكعّب متساوي الأضلاع –طول ضلعه الواحد (unit) – كما في العنصر الحجميّ الممثِّل (RVE) كما في الشكل 3-17. بيّنْ بالتفصيل أن المعامل (modulus) يُعطى بالعلاقة:

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{F/A}{\delta/L}=\frac{F/\left(1[L]\times 1[L]\right)}{\delta/\left(1[L]\right)}=\frac{F}{\delta[L]}$$

حيث [L] يمثّل واحدت للطول، وأنه يمكن كتابة ما سبق وفق التالي:

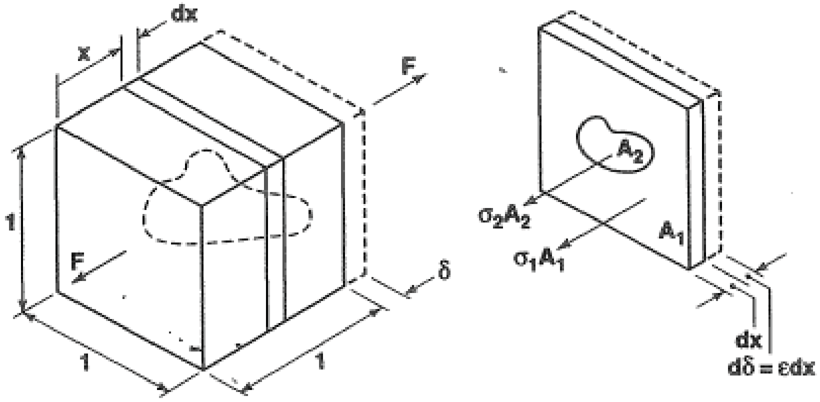
$$\frac{1}{E}=\int_0^1\frac{dx}{E_1+\left(E_2-E_1\right)A_2(x)}$$

حيث $A_2(x)$ هو توزيع المحتبس. لاحظ أن الشريحة dx على طول عنصر الحجم الممثل (RVE) تمثّل جزءاً ميكروياً للــ RVE، أي أدركِ الفرقَ بين ما يحدث للشريحة وبين ما يحدث لإجمالي العنصر الحجمي الممثِّل RVE. استخدم هذه النتيجة في المسائل 2.2.3 إلى 4.2.3.

2.2.3 تحقق أنه يمكن اختزال العلاقة العامة لمعامل مادة مركّبة مقوّاة بالتبعثر (dispersion – stiffned) إلى:

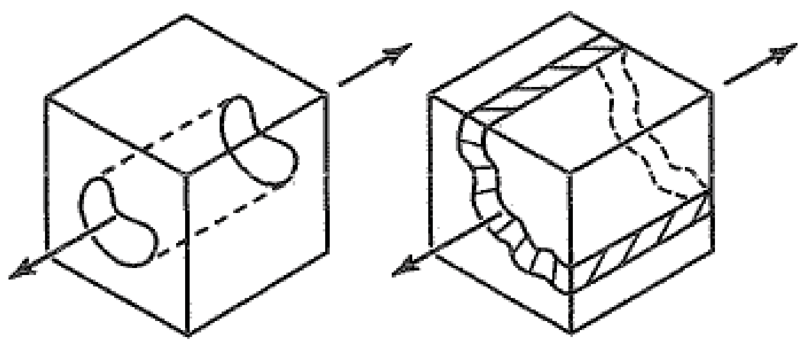
$$\frac{E}{E_m}=\frac{E_m+\left(E_d-E_m\right)V_d^{2/3}}{E_m+\left(E_d-E_m\right)V_d^{2/3}\left[1-V_d^{1/3}\right]}$$

من أجل حبيبة مكعّبة معاملها E_d ضمن مصفوفة معاملها E_m. يرمز V_d إلى النسبة الحجمية للحبيبات المكعّبة، بينما يُرمز إلى النسبة الموافقة للمصفوفة بـــ V_m التي تساوي $(1-V_d)$. توجيه: إن العنصر الحجمي الممثِّل هو مكعّبٌ ضمن مكعّب.



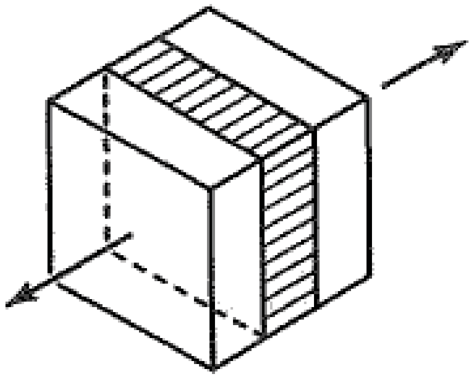
الشكل 3–17: تقوية حبيبيّة (عن بول Paul [3–4])

3.2.3 عيّن العلاقة التي تعبّر عن معامِل المادة المركّبة المقوّاة بواسطة حبيبيات غير محددة الفقرة العرضاني شريطة كونه موشورياً على طول الاتجاه الذي نرغب حساب المعامِل وفقاً له، كما يبيّن الشكل 3-18.



الشكل 3–18: تقوية موشورية (عن بول Paul [3–4])

4.2.3 عيّن العلاقة التي تعبّر عن معامِل المادة المركّبة التي تتكوّن من مصفوفة مقوّاة بصفيحة ثابتة السماكة في الاتجاه الذي نرغب حساب المعامِل وفقاً له، كما يبيّن الشكل 3-19.



الشكل 3−19: تقوية صفائحية (عن بول Paul [3−4])

5.2.3 ما هو الاستنتاج الذي تتوصل إليه إذا افترضتَ – من أجل تحديد E_2 في الفقرة 2.2.3− انفعالات متساويةً في الليف وفي المصفوفة، بدلاً من إجهادات متساوية في الاتجاه العمودي على الألياف؟

6.2.3 قم بتصميمِ نموذجٍ تخطيطي بواسطة نوابض الألياف ونوابض المصفوفة يأخذ بعين الاعتبار المحيط الحقيقيّ للألياف بواسطة المصفوفة، ويعني ذلك من أجل مقطعٍ عرضاني مثل ذلك الموافق لبعد "سماكة الرقاقة"، كما في الشكل 3-2، ماعدا جعل شكل الفقرة العرضاني لليف مربّع الشكل بدلاً من دائري.

3.3 مقاربة المرونة للجساءة

1.3.3 مقدّمة

إن تقسيمَ جهود تقدير الجساءة في الميكانيك الميكروي إلى مقاربةِ ميكانيك المواد ومقاربة المرونة بمقارباتها الفرعية لهو تقسيمٌ اعتباطيّ نوعاً ما. يقسِّم شاميس (Chamis) وسينديكيج (Sendeckyj) [3−5] مقارباتِ جساءة الميكانيك الميكروي إلى فئات أخرى كثيرة: التحليلات الشبكيّة[1]، مقاربات ميكانيك المواد، نماذج متّسقة داخلياً،

[1] تكمن الفرضية الأساسية للتحليل الشبكي في أن الألياف تقدّم مجملَ الجساءة الطولانية، بينما تقدّم المادة الرابطة مجملَ الجساءة العرضانية وجساءة القصّ بالإضافة إلى أثر بواسون. ندرك اعتماداً على =

تقنيات تغيّراتية باستخدام مبادئ تحديدية للطاقة، حلول صحيحة مضبوطة، مقاربات إحصائية، طرائق العنصر المحدّد، مقاربات نصف تجريبية، ونظريات البنية الميكروية. تجتمع كل هذه المقاربات حول الهدف المشترك في التوقع بمعاملات جساءات المواد المركّبة، و تستعمل جميعُها، ما عدا أول مقاربتين، بعضَ مبادئ نظرية المرونة – أو جميعها– بدرجات مختلفة، وبالتالي تُصنّف هذه المقاربات هنا كمقاربات مرونة. إن هذا التقسيم التبسيطي والكيفي مفيد في هذا الكتاب لأن هدفنا هنا هو مجرّد التآلف مع نظريات الميكانيك الميكروي المتقدّمة – بعد تقديم المفاهيم الأساسية – عبر استخدام الاستدلالات العقلية لميكانيك المواد النمطية. على القارئ المهتمّ بالميكانيك الميكروي أن يتمّمَ قراءة هذا الفصل بقراءة مؤلّفات شاميس وسينديكيج الممتازة والنقدية وذات المراجع الشاملة [3–5].

تُستخدم المبادئَ التغيّراتية الطاقيّة لنظرية المرونة التقليدية في الفقرة 2.3.3 من أجل إيجاد الحدود العليا والدنيا لمعاملات الرقاقة. مع ذلك، تقود هذه المقاربة عموماً إلى حدود قد لا تكون قريبةً كفايةً من الاستخدام العملي. يتم في الفقرة 3.3.3 استحضار جميعَ مبادئ نظرية المرونة من أجل تحديد معاملات الرقاقة. و بسبب التعقيد الناجم للمسألة، يغدو كثيرٌ من التقنياتِ التحليلية والحلولِ العددية ضرورياً من أجل الحصول على حلول. مع ذلك، لا تكون الفرضياتُ المعتمَدة في مثل هذه التحليلات والمتعلّقة بالتفاعل المتبادل بين الألياف والمصفوفة واقعيةً بشكلٍ كامل. تتضمن الفقرة 4.3.3 تفحّص مقاربةً مثيرةً للاهتمام للتأثيرات المتبادلة الأكثر واقعيّة بين الألياف والمصفوفة، وهي مقاربة التجاور. وفي الفقرة 5.3.3، تُعرض وتُناقش معادلات هالبين–تساي (Halpin-Tsai) الواسعة الاستعمال.

2.3.3 تقنيات تحديدية للمرونة

يُعتبر بول (Paul) [3–4] أولَ من استخدم التقنيات التحديدية (التغيّراتيّة) للمرونة الخطيّة من أجل تفحّص الحدودِ على معاملات المواد متعددة الأطوار. كان عمله موجّهاً بالأحرى نحو تحليل المعاملات المرنة للمعادن السبائكية بدلاً من المواد المركّبة

= ملاحظاتنا لنتائج ميكانيك المواد أن فرضية التحليل الشبكي هذه محافظة بشكل كبير، ولذلك سوف نتجاهل التحليل الشبكي في هذا الكتاب ونعالج نظريات أخرى أكثر فائدة.

المقواة بالألياف. وفقاً لذلك، تُعنى المعالجة بمادة مركّبة متماثلة المناحي مؤلَّفة من مكوّنات متناحية مختلفة متماثلة المناحي. تكون المادةَ المركّبة متماثلةُ المناحي لأن مكوّنات السبيكة متبعثرة بشكل منتظم دون اتجاهَ مفضّل. نرمز إلى معامل المصفوفة بـــ E_m، وإلى معامل المادة المتبعثرة بـــ E_d، أمّا معامل المادة المركّبة فنرمز إليه بـــ E. نرمز إلى النسبتَين الحجميّتَين للمادّتَين الرابطة والمتبعثرة بـــ V_m وV_d على التوالي، بحيث:

$$V_m + V_d = 1 \tag{3.31}$$

تقتضي أي علاقة لمعامل المادة المركّبة E أن يكون $E=E_m$ من أجل $V_m=1$ و $E=E_d$ من أجل $V_d=1$.

إحدى أبسط العلاقات التي تحقّق القيد السابق هي قاعدة المخاليط:

$$E = E_m V_m + E_d V_d \tag{3.32}$$

حيث نفترض مساهمات مكوِّنات المادة المركّبة في جساءة المركَّب متناسبةً بشكل مباشر مع قيم جساءاتها ومع نسبها الحجمية. سوف يتبيّن أن قاعدة المخاليط تقدّم حداً أعلى على معامِل المادة المركَّبة E في الحالة الخاصة، حيث:

$$\upsilon_m = \upsilon_d = \upsilon \tag{3.33}$$

تنجم علاقةٌ بسيطة أخرى بين معاملات المكوّنات عن ملاحظة وجوب اتّفاق مطاوعة (Compliance) المادة المركَّبة 1/E مع مطاوعة $1/E_m$ عندما $V_m=1$، ومع مطاوعة المادة المتبعثرة عندما $V_d=1$. تكون قاعدة المخاليط الناجمة عن المطاوعات:

$$\frac{1}{E} = \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_d}{E_d} \tag{3.34}$$

وسيتبيّن أن هذه القاعدة تقتضي وجود حدّ أدنى لمعامل المادة المركّبة E.

سوف يُفترض، في اختبار الشدّ الأحادي المحور من أجل تحديد المعامل المرن E للمادة المركّبة، أن حالات الإجهاد والانفعال ستكون منتظمة ماكروياً بما يتوافق والفرضية الأساسية عن تجانس وتماثل المناحي للمادة المركّبة. مع ذلك، لا تكون حالات الإجهاد وحالات الانفعال منتظمة على المستوى الميكروي. في اختبار الشدّ الأحادي المحور، يكون:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} \tag{3.35}$$

حيث σ هو الإجهاد الأحادي المحور المطبَّق وε الانفعال الأحادي المحور الناتج. يمكن كتابة طاقة الانفعال الناتجة وفق شكلَين متكافئَين:

$$U = \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}V \qquad (3.36)$$

$$U = \frac{1}{2}E\,\varepsilon^2 V \qquad (3.37)$$

الحد الأدنى على معامل يونـغ الظاهري

يكمن الأساس في تحديد حدٍّ أدنى على معامل يونغ الظاهري في تطبيق مبدأ الطاقة المتمّمة (المكمِّلة) الأصغرية (principle minimum complementary energy) الذي يمكن صياغته كما يلي: لتكن مقادير الشد (القوى والعزوم) محددة على سطح جسم ما. لتكن $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0, \tau_{xy}^0, \tau_{yz}^0, \tau_{zx}^0$ هي حالات إجهاد تحقِّق معادلات توازن الإجهاد والشروط الحدّيّة الخاصّة، أي حقل إجهادٍ مسموح به. لتكن U^0 طاقة الانفعال لحالة الإجهاد $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_z^0, \tau_{xy}^0, \tau_{yz}^0, \tau_{zx}^0$ المعطاة باستعمال علاقات الإجهاد – الانفعال (إعادة ترتيب بسيطة لعلاقات الإجهاد– الانفعال في المعادلة 2.17 بدلالة E وυ):

$$\sigma_x = \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right) + \frac{E}{(1+\upsilon)}\varepsilon_x$$

$$\vdots \qquad (3.38)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma_{xy}$$

وباستخدام عبارة طاقة الانفعال:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right)dV \qquad (3.39)$$

ولكن طاقة الانفعال U الفعلية ضمن الجسم والناجمة عن الحمولات المحددة لا يمكن أن تتجاوز U^0، أي:

$$U \le U^0 \qquad (3.40)$$

من أجل الحصول على حدّ أدنى على معامل يونغ الظاهري E، حمِّل عيّنة الاختبار الأحادي المحور الأساسية بإجهاد ناظمي عند طرفيها. يكون حقل الإجهاد الداخلي الذي يحقّق هذه الحمولة ومعادلات توازن الإجهاد:

$$\sigma_x^0 = \sigma, \quad \sigma_y^0 = \sigma_z^0 = \tau_{xy}^0 = \tau_{yz}^0 = \tau_{zx}^0 = 0 \tag{3.41}$$

نعرف جيداً أن حالةَ إجهاد منتظمة كهذه لا يمكن أن توجد ضمن كامل المادة المركّبة، ومع ذلك سوف نبحث عن انعكاسات مثل هذا التقريب. من المعادلة 3.41، تبلغ طاقة الانفعال للإجهادات:

$$U^0 = \frac{1}{2}\int_V \frac{\left(\sigma_x^0\right)^2}{E} dV = \frac{\sigma^2}{2}\int_V \frac{dV}{E} \tag{3.42}$$

ولكن E ليس ثابتاً على مجمل الحجم لأن للمصفوفة معامِل هو E_m ضمن الحجم V_mV، بينما يكون للمادة المتبعثرة معامِل E_d ضمن الحجم V_dV حيث يرمز لإجمالي الحجم بـــ V. وهكذا يكون:

$$\int_V \frac{dV}{E} = \int_{V_mV} \frac{dV}{E_m} + \int_{V_dV} \frac{dV}{E_d} = \frac{V_mV}{E_m} + \frac{V_dV}{E_d} \tag{3.43}$$

وبالتالي:

$$U^0 = \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_d}{E_d}\right]V \tag{3.44}$$

لكن باستخدام المت $U \le U^0$ وتعريف U في المعادلة 36.3، يكون:

$$\frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{E}V \le \frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{V_m}{E_m} + \frac{V_d}{E_d}\right]V \tag{3.45}$$

$$\frac{1}{E} \le \frac{V_m}{E_m} + \frac{V_d}{E_d} \tag{3.46}$$

وأخيراً:

$$E \ge \frac{E_m E_d}{V_m E_d + V_d E_m} \tag{3.47}$$

ممّا يمثّل حداً أدنى على عامل يونغ الظاهري E للمادة المركّبة بدلالة المعاملات والنسب الحجمية للمواد المكوِّنة. لاحظ أن هذا الحدّ يتطابق مع قيمة المعامِل العرضاني بالنسبة إلى الألياف عبر مقاربة ميكانيك المواد.

الحد الأعلى على معامل يونغ الظاهري

يكمن الأساس في تحديد حدٍّ أعلى على معامل يونغ الظاهري في تطبيق مبدأ الطاقة الكامنة الأصغرية، الذي يمكن صياغته كما يلي: لنحدّد مقادير الانزياح فوق كامل سطح الجسم ما عدا الأماكن التي ينعدم فيها الشد الموافق. لتكن $\varepsilon_x^*, \varepsilon_y^*, \varepsilon_z^*, \gamma_{xy}^*, \gamma_{yz}^*, \gamma_{zx}^*$ أي حالةِ انفعال موافقة تحقِّق شروط الانزياح الحدّيّة الخاصّة، أي لمجال انفعال مسموح به. لتكن U^* طاقة الانفعال لحالة الانفعال ε_x^*، إلخ، باستعمال علاقات الإجهاد- الانفعال:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\upsilon E}{(1+\upsilon)(1-2\upsilon)}\left(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z\right) + \frac{E}{(1+\upsilon)}\varepsilon_x \\ &\vdots \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy} = \frac{E}{2(1+\upsilon)}\gamma_{xy} \end{aligned} \qquad (3.48)$$

وتصبح عبارة طاقة الانفعال:

$$U = \frac{1}{2}\int_V \left(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx}\right)dV \qquad (3.49)$$

ولكن طاقة الانفعال الفعلية U ضمن الجسم والناجمة عن الانزياحات المحددة لا يمكن أن تتجاوز U^*، أي:

$$U \le U^* \qquad (3.50)$$

من أجل الحصول على حدٍّ أعلى على معامل يونغ الظاهري E، أخضِعْ عيّنة الاختبار الأحادي المحور الأساسية إلى استطالة ϵL، حيث يمثّل ϵ الانفعال الوسطي و L طول العيّنة. يكون حقل الانفعال الداخلي الذي يوافق الانفعال الوسطيّ عند أطراف العيّنة:

$$\varepsilon_x^* = \varepsilon, \quad \varepsilon_y^* = \varepsilon_z^* = -\upsilon\varepsilon, \quad \gamma_{xy}^* = \gamma_{yz}^* = \gamma_{zx}^* = 0 \qquad (3.51)$$

حيث υ نسبة بواسون الظاهريّة للمادة المركّبة. نعرف جيداً أن حالةَ انفعال منتظمة كهذه لا يمكن أن توجد ضمن كامل المادة المركّبة، ومع ذلك سوف نبحث عن انعكاسات مثل هذا التقريب. باستعمال علاقات الإجهاد – الانفعال– (المعادلة 3.48)، تكون الإجهاداتُ في المصفوفة من أجل مجال انفعال محدد:

$$\begin{aligned} \sigma^*_{x_m} &= \frac{1-\upsilon_m - 2\upsilon_m \upsilon}{1-\upsilon_m - 2\upsilon_m^2} E_m \varepsilon \\ \sigma^*_{y_m} &= \sigma^*_{z_m} = \frac{\upsilon_m - \upsilon}{1-\upsilon_m - 2\upsilon_m^2} E_m \varepsilon \\ \tau^*_{xy_m} &= \tau^*_{yz_m} = \tau^*_{zx_m} = 0 \end{aligned} \quad (3.52)$$

والإجهاداتُ في المادة المتبعثرة هي:

$$\begin{aligned} \sigma^*_{x_d} &= \frac{1-\upsilon_d - 2\upsilon_d \upsilon}{1-\upsilon_d - 2\upsilon_d^2} E_d \varepsilon \\ \sigma^*_{y_d} &= \sigma^*_{z_d} = \frac{\upsilon_d - \upsilon}{1-\upsilon_d - 2\upsilon_d^2} E_d \varepsilon \\ \tau^*_{xy_d} &= \tau^*_{yz_d} = \tau^*_{zx_d} = 0 \end{aligned} \quad (3.53)$$

يتم الحصول على طاقة الانفعال في المادة المركّبة بعد تعويض الانفعالات (المعادلة 3.51) والإجهادات (المعادلتان 3.52 و3.53) في علاقة طاقة الانفعال (المعادلة 3.49)، فيكون:

$$U^* = \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{V_d} \frac{1-\upsilon_d - 4\upsilon_d \upsilon + 2\upsilon^2}{1-\upsilon_d - 2\upsilon_d^2} E_d dV + \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{V_m} \frac{1-\upsilon_m - 4\upsilon_m \upsilon + 2\upsilon^2}{1-\upsilon_m - 2\upsilon_m^2} E_m dV \quad (3.54)$$

أو:

$$U^* = \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\frac{1-\upsilon_d - 4\upsilon_d \upsilon + 2\upsilon^2}{1-\upsilon_d - 2\upsilon_d^2} E_d V_d + \frac{1-\upsilon_m - 4\upsilon_m \upsilon + 2\upsilon^2}{1-\upsilon_m - 2\upsilon_m^2} E_m V_m \right] V \quad (3.55)$$

ولكن باستخدام المت $U \le U^*$ وتعريف U في المعادلة 3.37 يكون:

$$\frac{1}{2} E \varepsilon^2 V \le \frac{\varepsilon^2}{2} \left[\frac{1-\upsilon_d - 4\upsilon_d \upsilon + 2\upsilon^2}{1-\upsilon_d - 2\upsilon_d^2} E_d V_d + \frac{1-\upsilon_m - 4\upsilon_m \upsilon + 2\upsilon^2}{1-\upsilon_m - 2\upsilon_m^2} E_m V_m \right] V \quad (3.56)$$

وبالتالي، يكون الحد الأعلى على E من خلال حذفٍ بسيط للحدود في المعادلة (3.56):

$$E \le \frac{1-\upsilon_d - 4\upsilon_d\upsilon + 2\upsilon^2}{1-\upsilon_d - 2\upsilon_d^2} E_d V_d + \frac{1-\upsilon_m - 4\upsilon_m\upsilon + 2\upsilon^2}{1-\upsilon_m - 2\upsilon_m^2} E_m V_m \quad (3.57)$$

إن قيمة نسبة بواسون υ للمادة المركّبة مجهولة عند هذه المرحلة من التحليل، وبالتالي يكون الحد الأعلى على E غير محدد. بموجب مبدأ الطاقة الكامنة الأصغرية، يجب البحث عن النهاية الحدّية الصغرى[2] لعبارة طاقة الانفعال U^* بالنسبة إلى الثابت υ غير المعين من أجل تحديد الحدّ على E. تكمن إجرائية التصغير (إيجاد النهاية الصغرى) في تحديد أين:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \upsilon} = 0 \quad (3.58)$$

وفي الوقت نفسه التأكد أن:

$$\left.\frac{\partial^2 U^*}{\partial \upsilon^2}\right|_{\frac{\partial U^*}{\partial \upsilon}=0} > 0 \quad (3.59)$$

أولاً:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \upsilon} = \frac{\varepsilon^2 V}{2}\left[\frac{4\upsilon_d + 4\upsilon}{1-\upsilon_d - 2\upsilon_d^2} E_d V_d + \frac{-4\upsilon_m + 4\upsilon}{1-\upsilon_m - 2\upsilon_m^2} E_m V_m\right] \quad (3.60)$$

وهذا ينعدم عندما:

$$\upsilon = \frac{\left(1-\upsilon_m - 2\upsilon_m^2\right)\upsilon_d E_d V_d + \left(1-\upsilon_d - 2\upsilon_d^2\right)\upsilon_m E_m V_m}{\left(1-\upsilon_m - 2\upsilon_m^2\right) E_d V_d + \left(1-\upsilon_d - 2\upsilon_d^2\right) E_m V_m} \quad (3.61)$$

ويكون المشتق الثاني لـــ U^*:

$$\frac{\partial^2 U^*}{\partial \upsilon^2} = \frac{\varepsilon^2 V}{2}\left[\frac{4E_d V}{1-\upsilon_d - 2\upsilon_{d\,d}^2} + \frac{4E_m V_m}{1-\upsilon_m - 2\upsilon_m^2}\right] \quad (3.62)$$

ولكن المصفوفة والمادة المتبعثرة متماثلتا المناحي، وبالتالي $\upsilon_d < 1/2$ و $\upsilon_m < 1/2$ (القيمةَ الحدّيّة المألوفة لنسبة بواسون من أجل مادة متماثلة المناحي، كما في الفقرة

---

[2] لاحظ عند هذه النقطة أن الطاقة الكامنة للقوى الخارجية مستقلّة عن خصائص المادة. وبالتالي فاشتقاقاتها بالنسبة إلى υ معدومة، ولا يؤثّر إلاّ المقدارُ U^* في عملية التصغير (إيجاد النهاية الصغرى).

4.12). وبهذا، بعد التعويض بهذه القيم لـــ υ_m وυ_d، يُلاحظ أن قيمة $\frac{\partial^2 U^*}{\partial \upsilon^2}$ دوماً موجبة (حتى من أجل قيم $\frac{\partial U^*}{\partial \upsilon}$ لا تساوي الصفر)، لأن الحد النمطيّ $\left(1-b-b^2\right)$ موجبٌ دوماً من أجل $b < ½$.

أخيراً، وبما أن $\frac{\partial^2 U^*}{\partial \upsilon^2}$ موجبٌ دوماً يكون قد أقيم البرهان على أن قيمة U^*، عند استعمال المعادلة 3.61، التي توافق نهاية حدّيّة صغرى أو عظمى أو نقطة انعطاف (Inflection) في منحنى U^* كدالة لـــ υ ،هي نهاية حديّة صغرى، وفي الحقيقة توافق نهايةً حديّة صغرى مطلقة.

تمّ بشكل صريح في المعادلة (3.61) اشتقاق قيمةَ نسبة بواسون من أجل المادة المركّبة. وهكذا يمكن الحصول على حد أعلى على E بعد تعويض عبارة υ من المعادلة 3.61 في عبارة الحدّ الأعلى على E بدلالة υ (المعادلة 3.57). مع ذلك، وحيث لا يخلو الجبر من الغموض، لم تُعط عبارةَ صريحةَ للحدّ الأعلى على E. في التطبيقات العملية يمكن حساب قيمة υ من المعادلة (3.61)، ثم تعويضها في المعادلة (3.57) للحصول على E. من أجل الحالة الخاصة $\upsilon_m = \upsilon_d$، تُختزل عبارة υ (المعادلة 3.61) إلى:

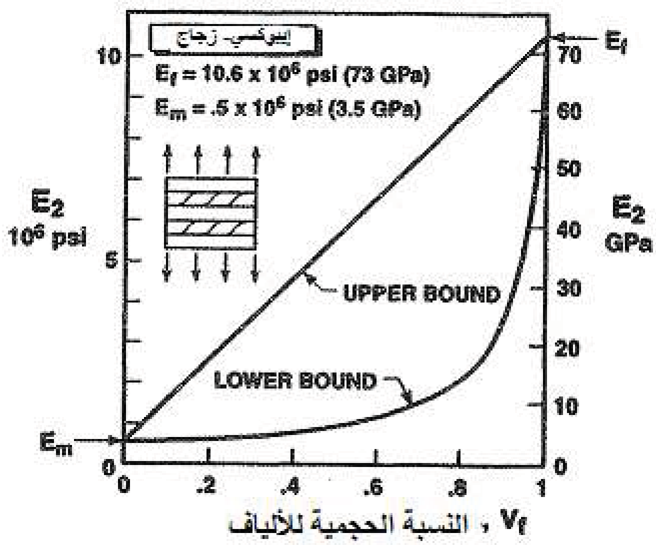
$$E \leq E_d V_d + E_m V_m \qquad (3.63)$$

وهي قيمة معامل يونغ الظاهري E_1 المشتق عبر مقاربة ميكانيك المواد في اتجاه الليف لمادة مركّبة مقوّاة بالألياف. وهكذا تمثّل عبارة E_1 حداً أعلى على قيمة E_1 الفعلية. بالإضافة إلى ذلك، يحتوي حلّ ميكانيك المواد بوضوح على مساواة ضمنية لنسب بواسون للمواد المكوّنة.

إن عمل بول [3–4] قابل للتطبيق أولاً على مواد مركّبة متماثلة المناحي، ولكن يمكن تأويله من أجل المواد المركّبة الليفية. على سبيل المثال، تمثّل المعادلة (3.63) حدّاً أعلى على المعامِل E_2 لمادة مركّبة مقوّاة بالألياف، بينما تمثّل المعادلة (3.47) الحدّ الأدنى. من الواضح أن قيمتَي هذين الحدَّين – المرسومتَين في الشكل 3-20 من أجل مادة مركّبة إيبوكسي– زجاج [$E_f = 10.6 \times 10^6$ psi أو (73 GPa)، و $E_m = 0.5$

10^6 psi × أو 3.5 Gpa]- بعيدتان عن بعضهما البعض. يمكن الحصول على حدودٍ موافقة لمعاملات أخرى بطريقةٍ مماثلة (انظر مجموعة المسائل 3.3).

حاول هاشين (Hashin) [3-6] وهاشين (Hashin) وشتريكمان(Shtrikman) [3-7] تضييق حدودَ بول للحصول على تقديرات أكثر فائدة لمعامِلات المواد غير المتجانسة ومتماثلة المناحي. اعتمدت مقارباتهما على استعمال نموذج كرات متّحدة المركز لمعالجة المادة غير المتجانسة ككرةٍ مرنة داخل جزءٍ كرويّ متّحد المركز من مادة مصفوفة مرنة بشكلٍ متناسبٍ مع حجم المحتبسات (inclusions) الكروية ضمن إجمالي حجم المادة المركّبة. لا تتلامس الكرات المضمَّنه على الإطلاق في هذا النموذج، على الرغم من أن احتمالَ تماس الحبيبات مع بعضها البعض يزداد بوضوح مع ازدياد النسبة الحجمية للحبيبات. علاوةً على ذلك، قد ينطوي غيابُ التلامس تباعداً مثالياً بين الجسيمات، وهذه حالةٌ بعيدة الاحتمال من وجهة النظر العملية.



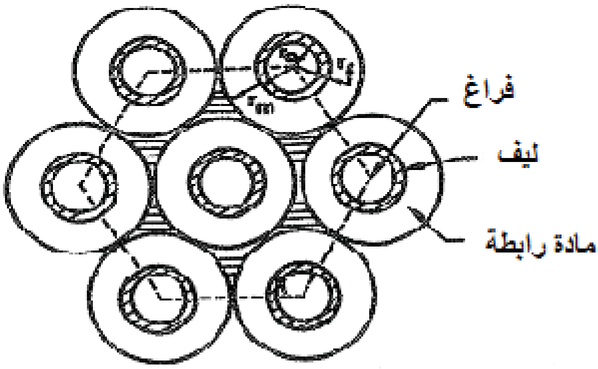
الشكل 3-20: حدود على E_2 من أجل مادة مركّبة إيبوكسي- زجاج

وسّع هاشين (Hashin) وروزن (Rosen) [3-8] عمل هاشين إلى المواد المركّبة المقوّاة بالألياف. تمتلك الألياف مقطعاً عرضانياً دائريّ الشكل، ويمكن لها أن تكون مجوّفة أو مصمتة (solid). تمّ معالجة حالتَين: (1) ألياف متطابقة ضمن شبكة

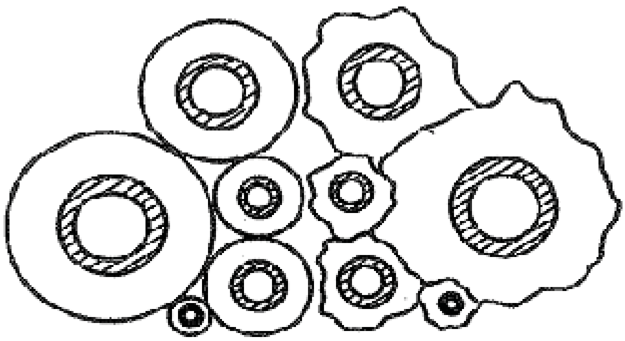
سداسيّة (hexagonal array)، و(2) ألياف ذات أقطار متنوّعة (ولكن بنفس قيمة نسبة القطر الداخلي إلى الخارجي – في حال كانت الألياف جوفاء) ضمن شبكة عشوائية. يبيّن الشكل 3-21 كلا نوعَي الشبكات. يكون عنصرُ التحليل الأساسي في كلتا الحالتَين عبارة عن اسطوانات متّحدة المركز مع محاورها موازية لاتجاه الليف.

يتألّف نموذج الاسطوانات متّحدة المركز في الشبكة العشوائية – بالتناظر مع نموذج هاشين للكريات متّحدة المركز– من الألياف تحيطها مادة المصفوفة بنسبةٍ مساوية للنسبة الحجمية للمصفوفة إلى إجمالي الحجم . يحتاج الأمر إلى حدّ إضافيّ متعلّق بحجم المصفوفة في حالة الشبكة السداسية من أجل تمثيل الحجم المتبقّي بعد رسم الدوائر ذوات نصف القطر r_m حول كلّ ليفٍ في الشكل 3–21 أ الذي يعرض نموذجَ الاسطوانات متّحدة المركز. في النهاية، يكون معامِل يونغ في اتجاه الألياف يتحول (turn's out) لأن يكون، من أجل جميع الأغراض العمليّة. هو ذاك الموافق لقاعدة المخاليط. تعتبر عبارات معامِل يونغ العرضاني لشبكةٍ عشوائية أو شبكةٍ سداسيّة لألياف مصمتة أو مجوَّفة أكثرُ تعقيداً مماّ تسمح به أهداف هذا الكتاب. سيتم رسم بعضٍ من هذه العبارات بيانياً لاحقاً عند مقارنة البيانات التجريبية بالتوقعات النظرية المتنوّعة. على أيّ حال، تكون الحدود على معاملات الألياف في الشبكة السداسية بعيدةً عن بعضها البعض من أجل قيم كبيرة لنسبة معامِل الليف إلى معامِل المصفوفة في المادة المركّبة، وهذا وضعٌ نمطيّ من أجل المواد المركّبة العمليّة.

من ناحية أخرى، لا يُعدّ نموذج الشبكة العشوائية هذا تمثيلاً دقيقاً لغالبية المواد العمليّة المركّبة المقوّاة بالألياف. مع ذلك، إذا تمّ تضمين ألياف بأحجامٍ مختلفة ومتنوّعة لملء التجاويف في المصفوفة بين الاسطوانات المتنوّعة متّحدة المركز، كما في الشكل 3–21 ب، فإن النموذج سيكون على الأرجح دقيقاً.



أ شبكة ألياف مجوفة سداسية منتظمة



ب شبكة ألياف مجوفة سداسية عشوائية

الشكل 3-21: هندسة التقوية بالألياف لـــهاشين (Hashin) وروزن (Rosen) ونموذج الأسطوانة المركَّبة (عن هاشين Hashin وروزن Rosen [3-8])

3.3.3 حلول مضبوطة وصحيحة

تُعتبر مسألة تعيين الحلول الصحيحة والمضبوطة (exact solutions) في الحالات المتنوّعة الموافقة لمحتبسات مرنة في مصفوفة مرنة مسألةً صعبةً جداً، وتتجاوز إطار هذا الكتاب. مع ذلك، من المناسب أن نشير إلى أنماط الحلول المتوفّرة ومقارنتها بنتائج ميكانيك المواد (في مقطعٍ لاحق). كما في كثيرٍ من مسائل المرونة الأخرى، تعتبر طريقةَ المقلوب النصفي (semi-inverse) لـــسانت- فونانت (Saint-Venant) الأشهر بين التقانيات المتوفّرة. وبإيجاز، تتألّف طريقة المقلوب النصفي من "تخيّل" أو افتراض

جزءٍ من الحلّ، أي بعضٍ من مركّبات الإجهاد والانفعال أو الانزياح، ثم رؤية فيما إذا كان الحلّ المفترَض يحقق المعادلات التفاضلية المتحكمة بالتوازن والشروط الحدّيّة. يجب على الحلّ المفترَض ألاّ يتحدّد بشكلٍ تامّ بحيث لا يمكن عندها تحقيق التوازن ومعادلات التوافق. وكمثال على هذا الأمر، إن فرضيةَ بقاءِ المقاطعِ المستويةِ مستويةً هي مقاربةٌ ضمن طريقة المقلوب النصفي. تغدو طريقةُ المقلوب النصفي عند دمجها بالنظرية التحديدية للمرونة فعّالةً جداً.

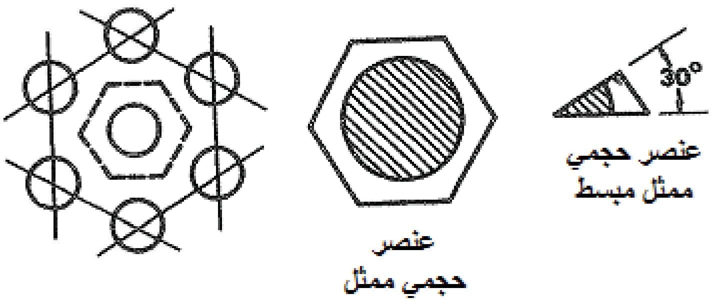
تم كذلك معالجةُ مسائل المحتبسات (inclussions) في الأجسام الصلبة عبر مقاربات المرونة الصحيحة والمضبوطة، مثل تقانيات Muskhelishvili للمطابقة بتابع ذي متغيّر (متحوّل) عقدي (complex-varible-mapping) [3–9]. بالإضافة إلى ذلك، استعمِلت أيضاً وبشكل كبير تقنياتُ الحلول العدديّة مثل طريقتَي العناصر المحدودة (finite) والفروقات المحدودة.

نحتاج إلى قاعدة قويّة في علم المرونة لحلّ مسائل المواد المركّبة ضمن الميكانيك الميكروي. يُعدّ الكثيرُ من الورقات العلمية المتوفّرة مجرّداً جداً وذات قابليةٍ صغيرة للتطبيق المباشر على التحليلات العملية عند هذه المرحلة من تطوير مقاربات المرونة في الميكانيك الميكروي؛ وحتى المقاربات التحديدية الأكثر تطوراً فإنها لا تزال غامضةً بعض الشيء.

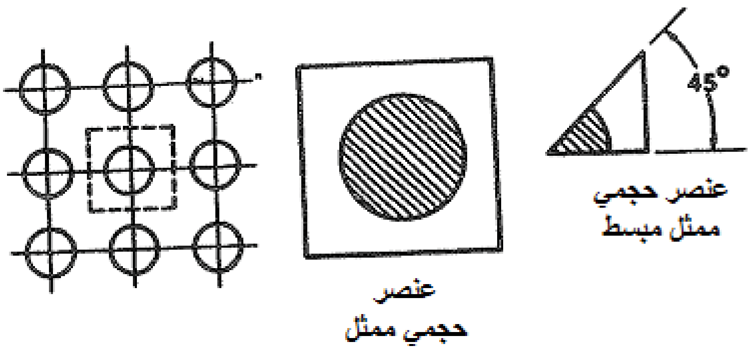
تعتمد مقاربات المرونة إلى حدٍ كبير على الهندسة الخاصة للمادة المركّبة، وكذلك مميزات الألياف والمصفوفة. يمكن للألياف أن تكون مجوّفةً أو مصمتةً، ولكنها عموماً ذات مقطع عرضاني دائري الشكل، بالرغم من أن الأليافَ ذوات المقاطع العرضانية المستطيلة الشكل ليست نادرة. علاوة على ذلك، تكون الألياف عادةً متماثلةَ المناحي، ولكنها يمكن أن تمتلك سلوكاً ماديّاً أكثر تعقيداً، كحال ألياف الغرافيت متماثلة المناحي عرضانياً.

يمكن وجود الألياف ضمن أنواع عديدة من شبكات (arrays) ذوات مقاطع عرضانية مختلفة. تبيّن الأشكالُ من 3-22 إلى 3-25 عدّةَ شبكاتٍ نموذجية مع أنواعٍ مختلفة من الألياف. تبيّن هذه الأشكال العنصرَ الحجمي الممثّلَ لكلّ شبكة مع عنصر

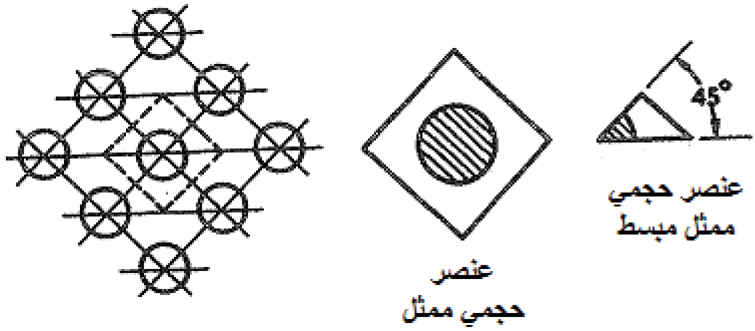
حجمي ممثِّل مبسَّط مكافئٍ في التمثيل، بفضل التناظر، للعنصر الحجمي الأصلي، ولكنه لا يحتوي على ليفٍ كامل (كما أنه لا يحتاج لذلك). لاحظ في الشكل 3-24 أنه إذا كانت الصفوفُ (roios) في الشبكة المترنّحة ذات الألياف الدائرية الشكل منزاحةً (offset) (معدَّلةً) بمقدار نصف تباعد الألياف، فإن العنصر الحجمي الممثِّل يكون نفسه في حالة الشبكة المربّعة، ولكن بعد تدوير اتجاهات الحمولة الرئيسية بمقدار °45. تُدعى كذلك في بعض الأحيان الشبكةُ المترنّحةُ (staggered) للألياف ذوات المقاطع العرضانية المستطيلة الشكل، في الشكل 3-25، شبكةً ألماسية. كان هيرمان (Hermann) وبيستر (Pister) [3−10] على ما يبدو، أولَ من استعمل مفهومَ العنصر الحجمي الممثِّل وتعرّف على تناظره (Symmetry) المتأصّل.



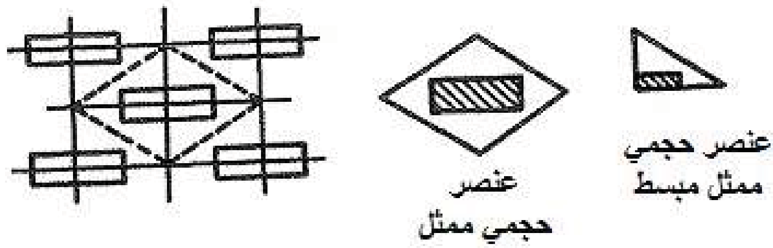
الشكل 3−22: شبكة سداسيّة وعناصر حجمية ممثّلة



الشكل 3−23: شبكة مربّعة وعناصر حجمية ممثِّلة



الشكل 3–24: شبكة مربّعة مترنّحة لألياف دائرية الشكل، مع عناصر حجمية ممثّلة

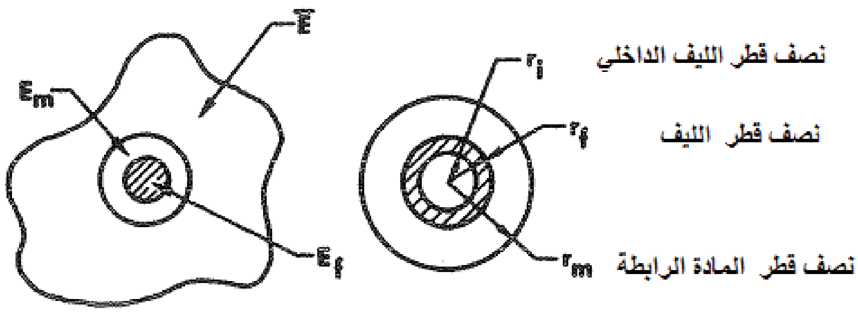


الشكل 3–25: شبكة مربّعة مترنّحة لألياف مستطيلة الشكل، مع عناصر حجمية ممثّلة

درس آدامز (Adams) وتساي (Tsai) [3–11] شبكاتٍ عشوائيةً من نمطَين: (1) شبكات عشوائية مربّعة و(2) شبكات عشوائية سداسيّة. يمتلك كلا نوعَي هذه الشبكات عناصرَ متكرّرةً، وبالتالي فهي ليست شبكات عشوائية بحقّ. مع ذلك، تتفّق نتائجُ تحليل الشبكة العشوائية السداسيّة مع التجربة بشكلٍ أفضل من نتائج تحليل الشبكة العشوائية المربّعة. تُعدّ هذه الملاحظة مُرضيةً أكثر من نتيجةٍ سابقة في أن تحليلات الشبكة المربّعة (غير العشوائية) اتفقت مع النتائج التجريبيّة بشكلٍ أفضل من تحليلات الشبكة السداسيّة الأكثر واقعيةً فيزيائياً.

هناك تنويعٌ مشتقّ من الحلول الصحيحة والمضبوطة يُعرَف باسم النموذج المتّسق داخلياً الذي شرحه ويتني (Whitney) ورايلي (Riley) بأبسط مفردات هندسية [3–12]. يحتوي نموذجهما على ليفٍ منفرد أجوف مغلف ضمن اسطوانة متّحدة المركز مصفوفة كما في الشكل 3-26. يعني ذلك أننا لا نعتبر إلاّ محتبساً واحداً فقط، وتكون النسبةُ الحجمية للمحتبس ضمن الاسطوانة المركّبة مساويةً لتلك الموافقة لإجماليّ الألياف

ضمن المادة المركّبة. ليست هذه الفرضية صالحةً تماماً، لأن المصفوفة قد تميل إلى تغليف الألياف بشكل غير مثاليّ، وبالتالي إلى تركِ فراغاتٍ. لاحظْ أنه لا توجد علاقةٌ بين هذا النموذج وأيّ نوعٍ خاصّ من شبكات الألياف. أدركْ أيضاً التشابهَ بين هذا النموذج ونموذج الاسطوانة متّحدة المركز لـــهاشين وروزن [3–8]. هناك نماذج اتّساقٍ داخليٍّ أخرى أكثر تعقيداً مثل نموذج هيل (Hill) [3–13]، ونموذج هيرمانس (Hermans) [3–14]، اللذين ناقشهما شاميس (Chamis) وسينديكيج (Sendeckyj) [3–5]. وسّع ويتني نموذجه إلى حالة ألياف متماثلة المناحي عرضانياً [3–15]، وألياف مفتولة [3–16].

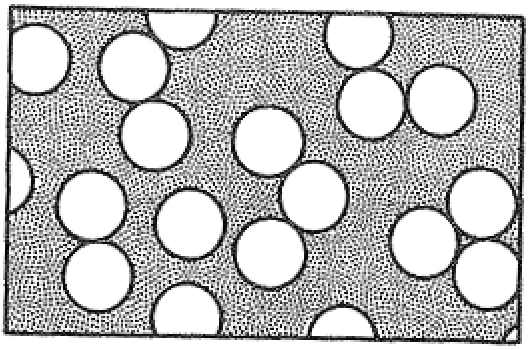


الشكل 3–26: نموذج الاسطوانة المركَّبة المتّسق داخلياً

4.3.3 حلول المرونة مع الجوار

لدى تصنيع المواد المركّبة الليفيّة، توضع الألياف غالباً بشكلٍ عشوائي نوعاً ما، بدلاً من تنضيدها ضمن شبكةٍ منتظمة (انظر الشكل 3-27). (تُعتبَر هذه الطبيعة العشوائية أكثرَ نمطيةً في حالة المواد المركّبة إيبوكسي– غرافيت مع أليافٍ ذات قطر صغير منها في حالة المواد المركّبة إيبوكسي– بورون مع أليافٍ ذات قطر كبير). وهكذا، يجب تعديل تحليلاتِ معامِلات المواد المركَبة ذوات الشبكات المنتظمة من أجل أخذ حقيقةِ كونِ الألياف متجاورةً بعين الاعتبار، أي أن الألياف تلامس بعضها البعض بدلاً من أن تكون محاطةً تماماً بالمصفوفة. ولكن الأليافَ لا تتلامس في كثير من الظروف، بل بالأحرى يكون بعضها متجاوراً وبعضها الآخر غيرَ متجاور. من وجهة نظر تحليلية، يزوّدنا التركيبُ الخطّيُّ لـــ (1) حلّ تكون فيه جميع الألياف منعزلةً عن

بعضها البعض و(2) حلّ تكون فيه جميع الألياف متلامسةً مع بعضها البعض، بالقيمة الصحيحة للمعامِل. إذا رمزنا بـــ C لدرجة التجاور، فإن C = 0 توافق غيابَ التجاور (ألياف منعزلة) و C = 1 توافق تجاوراً تامّاً (جميع الألياف متلامسة)، كما في الشكل 3-28. من أجل نسبةٍ حجميةٍ عاليةٍ للألياف، يجب أن تقتربَ C طبيعياً من القيمة C = 1. تُعتبَر هذه المقاربة مثالاً عمّا يدعوه شاميس وسينديكيج [3−5] طريقةً نصف تجريبية، ولكن يمكن تصنيفها كذلك كتقانة تحديد.



الشكل 3−27: مخطط ترسيمي لترتيبٍ فعليّ للألياف

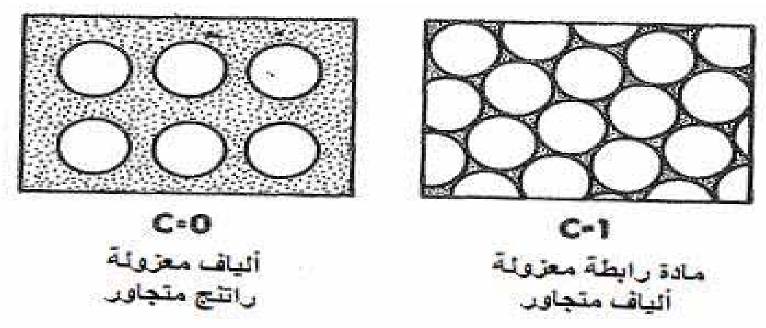
من أجل مقاربةِ المرونة التي تأخذ التجاورَ بعين الاعتبار، حصل تساي [3−1] للمعامل العرضاني بالنسبة إلى الألياف على:

$$E_2 = 2[1-\nu_f+(\nu_f-\nu_m)V_m][(1-C)\frac{K_f(2K_m+G_m)-G_m(K_f-K_m)V_m}{(2K_m+G_m)+2(K_f-K_m)V_m}+$$
$$C\frac{K_f(2K_m+G_f)+G_f(K_m-K_f)V_m}{(2K_m+G_f)-2(K_m-K_f)V_m}](3.64)$$

حيث:

$$K_f=\frac{E_f}{2(1-\upsilon_f)},\quad G_f=\frac{E_f}{2(1+\upsilon_f)},\quad K_m=\frac{E_m}{2(1-\upsilon_m)},\quad G_m=\frac{E_m}{2(1+\upsilon_m)}\quad (3.65)$$

وتتراوح قيم C بين 0 و1 من وجهة نظر عملية، تتحدّد C من خلال مقارنة المنحنيات النظرية لــ E_2 بدلالة V_f (أو V_m)، من أجل قيم متعددة لــ C− مع النتائج التجريبية. تُعتبَر قيمةُ C المرافقة للتوقع الذي يوافق التجربةَ بأفضل شكل قيمةَ التصميم المناسبة للمادة المعطاة. بما أن C=0 توافق حالةَ كونِ كلّ ليفٍ منعزلاً، و C=1 توافق الحالة الأقلَّ احتمالاً بكثير لتماس جميع الألياف، فمن المنتظر قيماً منخفضةً لــ C.



الشكل 3−28: الوضعان المتطرّفان لتجاور الألياف (عن تساي Tsai [3−1])

حصل تساي كذلك على:

$$\upsilon_{12}=(1-C)\frac{K_f\upsilon_f(2K_m+G_m)V_f+K_m\upsilon_m(2K_f+G_m)V_m}{K_f(2K_m+G_m)-2G_m(K_f-K_m)V_m}+C\frac{K_m\upsilon_m(2K_f+G_f)V_m+K_f\upsilon_f(2K_m+G_f)V_f}{K_f(2K_m+G_m)+G_f(K_m-K_f)V_m} \qquad (3.66)$$

و:

$$G_{12}=(1-C)G_m\frac{2G_f-(G_f-G_m)V_m}{2G_m+(G_f-G_m)V_m}+CG_f\frac{(G_f+G_m)-(G_f-G_m)V_m}{(G_f+G_m)+(G_f-G_m)V_m} \qquad (3.67)$$

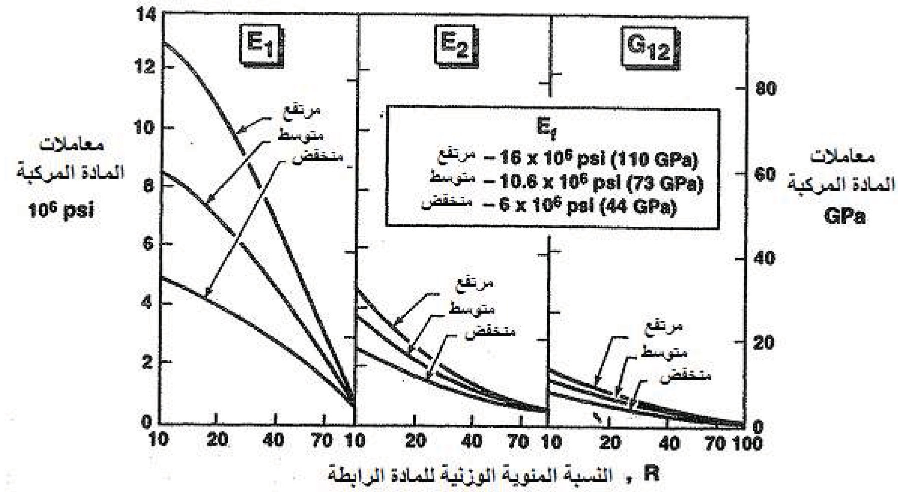
حيث تُطبق نفسَ التعاريف الواردة في المعادلة (3.65)، وتأخذ C نفس القيمة المستخدَمة في المعادلة (3.64).

من أجل تفسير العيوب في اصطفاف الليف، غيّر تساي قاعدةَ المخاليط للمعامِل في اتجاه الألياف كما يلي:

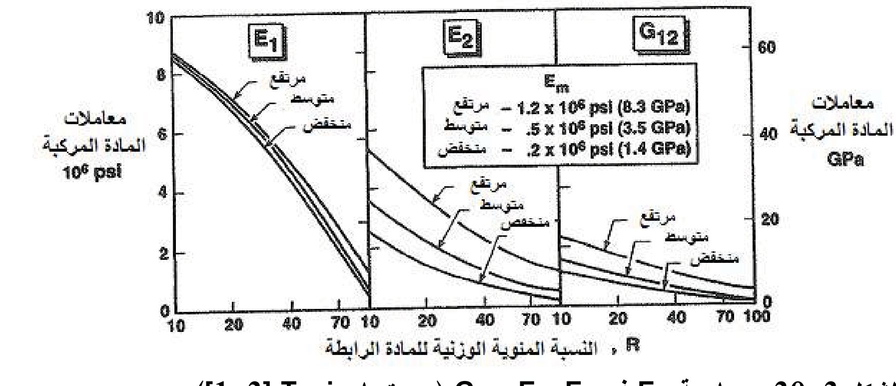
$$E_1 = k\left(V_f E_f + V_m E_m\right) \qquad (3.68)$$

تتغيّر قيمة عامِل عدم اصطفاف الليف k عادةً من 0.9 إلى 1، وبالتالي لا تمثّل المعادلةُ (3.68) ابتعاداً محسوساً جداً عن قاعدة المخاليط. وبالتأكيد تمثل k ثابتاً يتمّ تحديده تجريبياً، ويعتمد بشكلٍ كبير على عملية التصنيع.

أنجز تساي [3−1] بعض الدراسات الوسيطيّة (البراميترية) المثيرة للاهتمام لقيم E_1, E_2, υ_{12} و G_{12} من أجل مواد مركّبة راتنج−إيبوكسي− ألياف زجاجية. تمتلك المكوّنات القاعديّة (baseline) قيمَ خصائص: $E_f = 10.6\times10^6$ psi (73 Gpa)، $\upsilon_f = 0.22$، $E_m = 0.5\times10^6$ psi (3.5 Gpa) و $\upsilon_m = 0.35$. باستعمال المعادلات (3.68)، (3.64)، (3.66) و(3.67) تمّ رسم المقادير E_1, E_2, υ_{12} و G_{12} في الأشكال من 29.3 إلى 31.3، وذلك من أجل المادة المركّبة القاعدية. علاوةً على ذلك، يمكن تقييم تأثير معامِل الليف بتعويض $E_f = 16\times10^6$ psi (110 Gpa)، و $E_f = 6\times10^6$ psi (41 Gpa) في المعادلات الحاكمة (governing)، ويوضّح الشكل 3-29 هذا الأمرَ بيانياً. بشكلٍ مماثل، يبيّن الشكل 3-30 تأثيرَ معامِل المصفوفة، بينما يوضّح الشكل 3-31 تأثير نسبتَي بواسون للألياف وللمصفوفة. في جميع هذه الأشكال، تبلغ قيمةُ عامِلِ عدمِ الاصطفاف k الواحدَ، بينما يبلغ عامِل تجاور الألياف C القيمةَ 0.2. ولقد تبيّن من خلال المقارنة بالقيم التجريبية أن كلتا القيمتَين معقولتان (انظر الفقرة 4.3، مقاربات الجساءة)



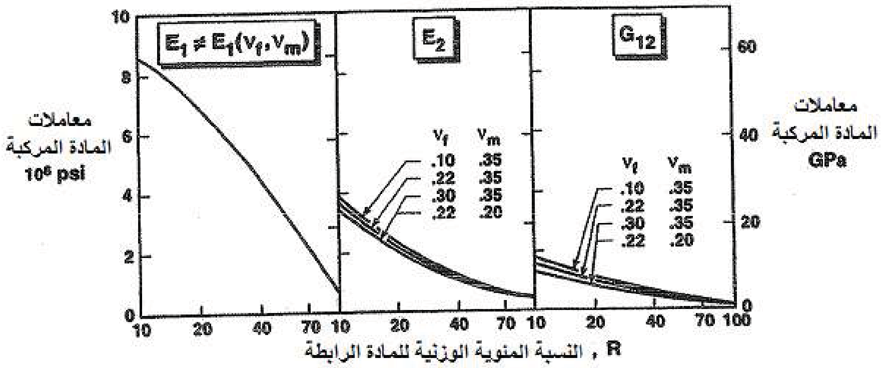
الشكل 3−29: مساهمة E_f في E_1، E_2 وG_{12} (عن تساي Tsai [3−1])



الشكل 3−30: مساهمة E_m في E_1، E_2 وG_{12} (عن تساي Tsai [3−1])

يتجلّى تأثير معامِل الليف بأوضح أشكاله في قيم معامِل المادة المركّبة في اتجاه الليف E_1، كما يبيّن الشكل 3-29. يتأثر معامِل المادة المركّبة العرضاني بالنسبة إلى اتجاه الليف E_2 أكثرَ ما يمكن بمعامِل المصفوفة، كما يبيّن الشكل 3-30، حيث تأخذ E_m القيم 1.2×10^6 psi (8.3 Gpa) و 0.2×10^6 psi (1.4 Gpa) بالإضافة إلى القيمة القاعديّة (Baseline). وعند مقارنة الشكلَين 3-29 و3-30، يبدو أن معامِل القصّ G_{12} يتأثّر بمعامِل المصفوفة بشكل أكبر من تأثّره بمعامِل الليف. يتضحّ من الشكل 3-31 أن

تأثيرَ نسب بواسون للألياف وللمصفوفة في معامِلات المادة المركّبة صغيرٌ جداً في حالة قيم عملية لنسب بواسون. في الحقيقة، لا تؤثّر هذه النسب في معامِل المادة المركّبة في اتجاه الليف E_1 لأنها لا تظهر في عبارة (expression) هذا المعامِل. لا توجد دراسةٌ مماثلةٌ لتلك المُوضَّحة في الأشكال من 3-29 إلى 3-31 من أجل نسبةَ بواسون υ_{12} العظمى (major) للمادة المركّبة.



الشكل 3-31: مساهمة υ_f و υ_m في E_1، E_2 وG_{12} (عن تساي Tsai [3-1])

يُدعى عامِلَ التجاور C في الحقيقة بـــ"عامِل خداع" (fudge factor) يستعمل لإضفاء معنى انطلاقاً من مقارنة النتائج التجريبية بالتوقعات النظرية. ويستخدم عامِلَ الارتباط هذا فقط عندما تقع البيانات التجريبية ضمن الحدود النظرية. يتضح بسهولة أن مفهومَ عامِل التجاور، أي المتمثّل بعلاقةٍ ما تعبّر عن استمرارِ طورٍ واحد من المادة المركّبة بالنسبة إلى طور آخر، يؤثّر في خصائص الشدّ لرقاقة بشكلٍ أكبر منه على خصائص الضغط. من الممكن وجودُ علاقةٍ مثيرة للاهتمام بين مفهوم التجاور ومعاملات جساءات الليف والحبيبة في الشدّ والضغط.

5.3.3 معادلات هالبين- تساي

تتمثَّل جميع نتائج الميكانيك الميكروي السابقة عبر معادلاتٍ و/أو منحنيات معقّدة. تكون المعادلات عادةً صعبةَ الاستعمال، بينما يقتصر مجالُ استخدام المنحنيات عموماً على جزءٍ صغيرٍ نسبياً من النظام الكامن للتصميم. وهكذا، نحتاج بشكل واضح إلى نتائج بسيطة لاستعمالها عند تصميم المواد المركّبة.

طوّر هالبين (Halpin) وتساي (Tsai) [3−17] إجرائيةً استيفائيةً تُعدّ تمثيلاً تقريبيّاً لنتائج أكثر تعقيداً للميكانيك الميكروي. تتمتع هذه الإجرائية بجمالية مزدوجة. أولاً، إنها سهلة، وبالتالي يمكن استخدامها فوراً في عملية التصميم. ثانياً، إنها تمكِّن من تعميم نتائج الميكانيك الميكروي التي تكون عادةً محدودةً، وإن كانت أكثر صحّة ودقّة. علاوةً على ذلك، يبدو أن الإجرائية صحيحةٌ ومضبوطةٌ تماماً إذا لم تقترب قيمةُ النسبة الحجمية للألياف من الواحد.

يكمن جوهر الإجرائية في أن هالبين وتساي [3−17] بيّنا أن حلَّ هيرمان (Herman) [3−14] المعمَّمَ لنموذج هيل (Hill) المتّسق داخلياً [3−13] يمكن اختزاله إلى الشكل التقريبي:

$$E_1 \cong E_f V_f + E_m V_m \tag{3.69}$$

$$\upsilon_{12} = \upsilon_f V_f + \upsilon_m V_m \tag{3.70}$$

و:

$$\frac{M}{M_m} = \frac{1+\xi\eta V_f}{1-\eta V_f} \tag{3.71}$$

حيث:

$$\eta = \frac{\left(M_f / M_m\right)-1}{\left(M_f / M_m\right)+\xi} \tag{3.72}$$

حيث:

M = معامِل المادة المركّبة E_2, G_{12} أو υ_{23}

M_f = معامِل الليف الموافق E_f, G_f أو υ_f

M_m = معامِل المصفوفة الموافق E_m, G_m أو υ_m

ويكون ξ مقياسُ التقوية بالألياف للمادة المركّبة الذي يعتمد على هندسة الليف وعلى هندسة التنضيد وعلى شروط التحميل. يمكن الحصول على قيم ξ من خلال مقارنة المعادلة (3.72) وتقريبٍ آخر ممثَّل بالمعادلة (3.73) بالحلول الصحيحة والمضبوطة للمرونة، ثم تقدير قيمةٍ أو تابع لـــ ξ بواسطة تقنيات مطابقة المنحنى.

لاحظ أن عبارتَي E_1 وυ_{12} تمثّلان النتائجَ المقبولة عموماً لقاعدة المخاليط. إن معادلات هالبين− تساي قابلةٌ للتطبيق كذلك من أجل المواد المركّبة الليفية أو الشريطيّة

أو الحبيبيّة. على سبيل المثال، طبّق توماس Thomas [3−18] بنجاح المعادلتَين (3.72) و(3.73) على تحليل جساءة المواد المركّبة المقوّاة بشرائط زجاجية.

تبدو الصعوبةُ الأحادية لاستعمال معادلات هالبين− تساي في تحديد قيمةٍ مناسبة لـــ ξ. حصل هالبين وتساي على توافق ممتاز مع نتائج آدامز (Adams) ودونر (Doner) [3−19] و[3−20] في حالة أليافٍ دائرية الشكل ضمن شبكة مربّعة في حساب E_2 عندما ξ = 2 ، وفي حساب G_{12} عندما ξ = 1 ، وذلك كلّه عند نسبةٍ حجمية للألياف تساوي 0.55 (انظر الشكلَين 3-32 و3-33). تمّ أيضاً الحصول على التوافق الممتاز − من أجل القيم ذاتها لـــ ξ− مع نتائج فوي Foye [3−21] و [3−22] من أجل ألياف بمقاطع عرضانية مربّعة الشكل ضمن شبكة ألماسيّة، وذلك عندما تصل قيمة النسبة الحجمية للألياف إلى 0.9، كما يوضّح الشكلان 3-34 و3-35. عندما تعرّض هالبين وتساي لألياف فوي ذات المقاطع العرضانية المستطيلة، وجدا أن الترابطَ مع معادلاتهما يقتضي أن تكونَ قيمةُ ξ من أجل حسابات المعامِل العرضاني مساويةً لـــ:

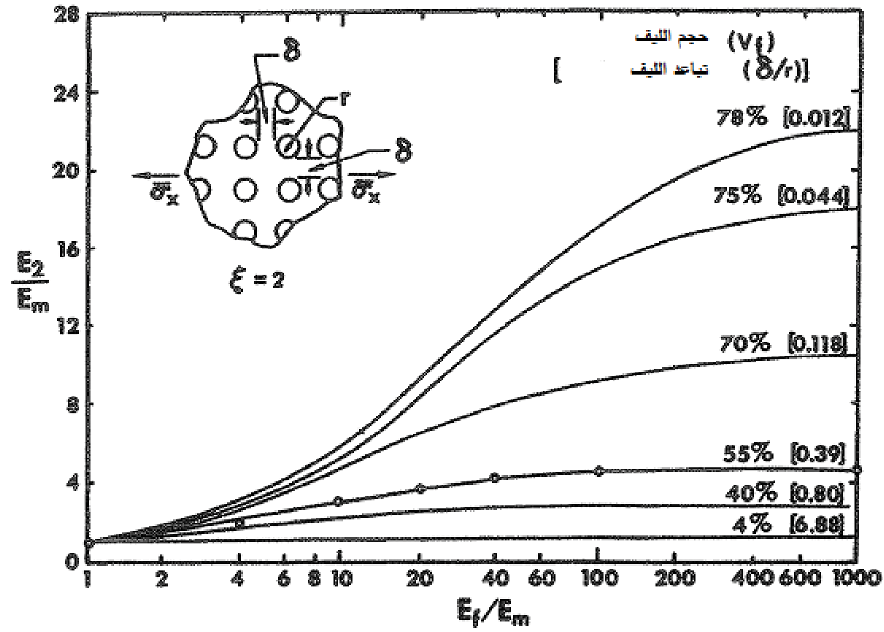
$$\xi_{E_2} = 2\frac{a}{b} \tag{3.73}$$

حيث a/b النسبة الباعية للمقطع العرضاني المستطيل. كذلك، كان لابد أن تحقق قيمة ξ في حسابات معامِل القصّ

$$\log \xi_{G_{12}} = 1.73 \log \frac{a}{b} \tag{3.74}$$

من أجل الحصول على توافقٍ مع نتائج فوي المبيَّنة في الشكلَين 3-34 و3-35.

يبيّن الشكلان 3-36 و3-37 توقعات معادلات هالبين− تساي من أجل المواد المركّبة إيبوكسي− زجاج والمواد المركّبة إيبوكسي− بورون. تمّ هنا رسمُ حلولِ فوي من أجل شبكات مربّعة وسداسيّة، بالإضافة إلى حل هيرمان (الذي تتعلّق به بالطبع معادلاتُ هالبين−تساي). لاحظ أن توقعات هالبين− تساي مع ξ=2 تقع عموماً، بدون نتائج الشبكات المربّعة، ولكن فوق من نتائج الشبكات السداسيّة، من أجل $V_f > 0.65$. في حالة قيمٍ أصغر للنسبة الحجمية للألياف، تكون نتائج هالبين− تساي متقاربةً جداً من نتائج فوي للشبكات المربّعة.



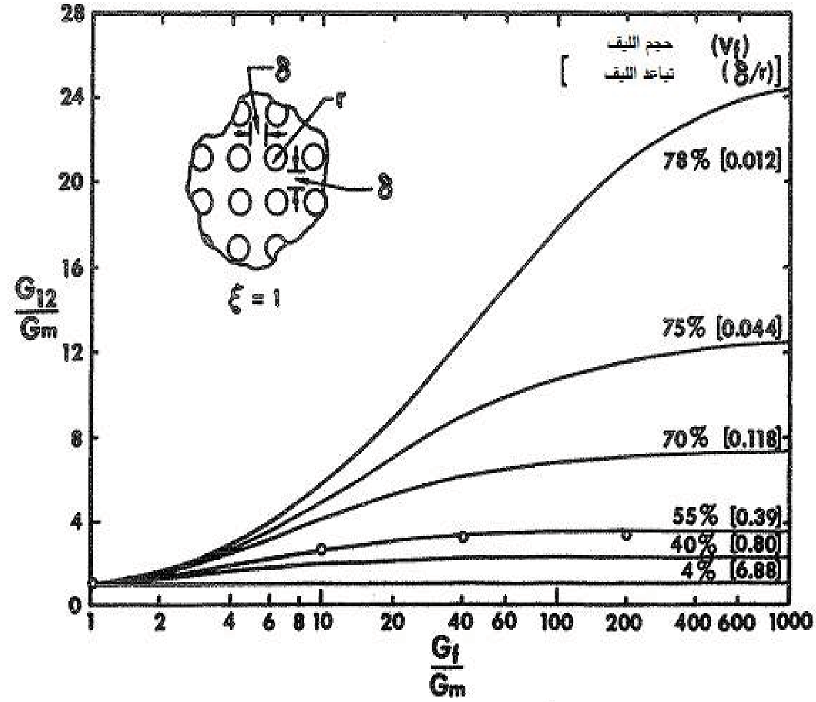
الشكل 3-32: حسابات هالبين- تساي Halpin-Tsai (دوائر) إزاء حسابات آدامز Adams ودونر Doner من أجل E_2 لألياف دائرية الشكل ضمن شبكة مربّعة (عن هالبين Halpin وتساي Tsai [3-17])

مع ذلك، أشار هيوويت (Hewitt) ودي ماليربي (de Malherbe) [3-23] إلى أن معادلات هالبين- تساي تؤدي إلى قيمةً منخفضة التقدير لمعامِل القصّ G_{12} في المواد المركّبة ذات الألياف الدائرية الشكل ضمن شبكة مربّعة، وذلك من أجل نسب حجمية للألياف أكبر من 0.5. وبشكلٍ خاصّ، تقل القيمة التقديريّة عن الحقيقة بحوالى 30% عند $V_f=0.75$ من أجل $G_f/G_m=20$، وهذه قيمة واقعيّة لكلتا المادّتَين المركّبتَين إيبوكسي- زجاج وإيبوكسي- غرافيت. واقترحا من أجل ξ، بدلاً من قيمة الواحد لهالبين وتساي، أن القيمةَ المستنتجة من:

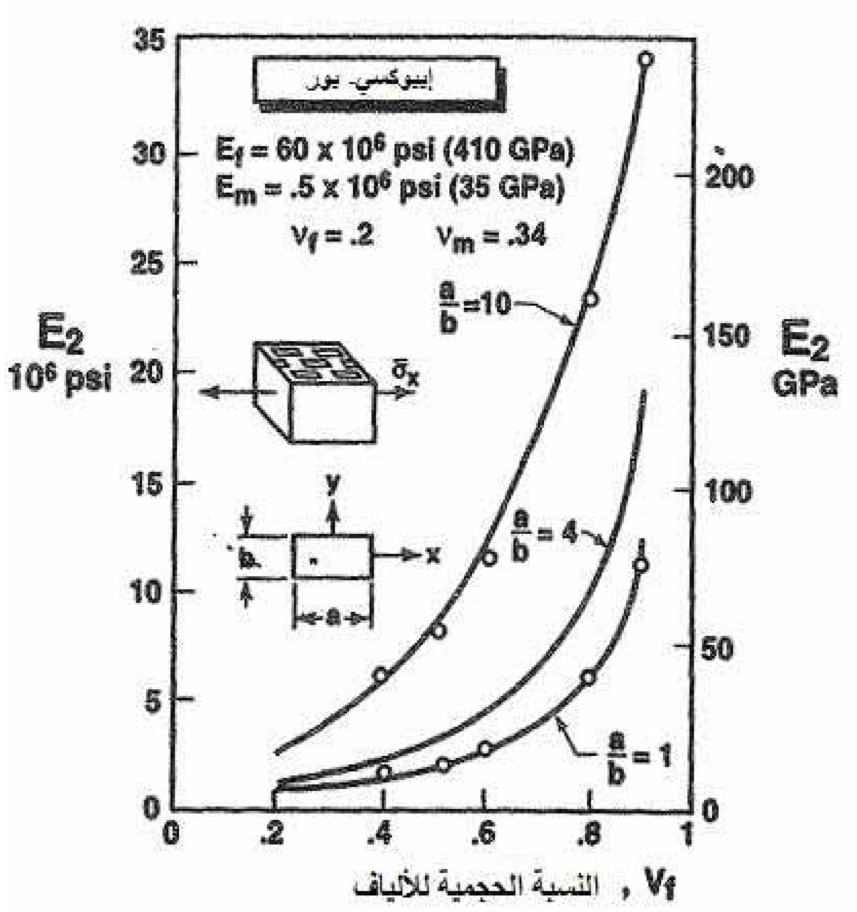
$$\xi = 1 + 40V_f^{10} \qquad (3.75)$$

تترابط في معادلات هالبين- تساي مع الحلّ العددي لآدامز ودونر بشكلٍ أفضل، كما يوضّح الشكل 3-38. إن هذه العلاقة لـــ ξ، وكغيرها من العلاقات، تتحدّد تجريبياً.

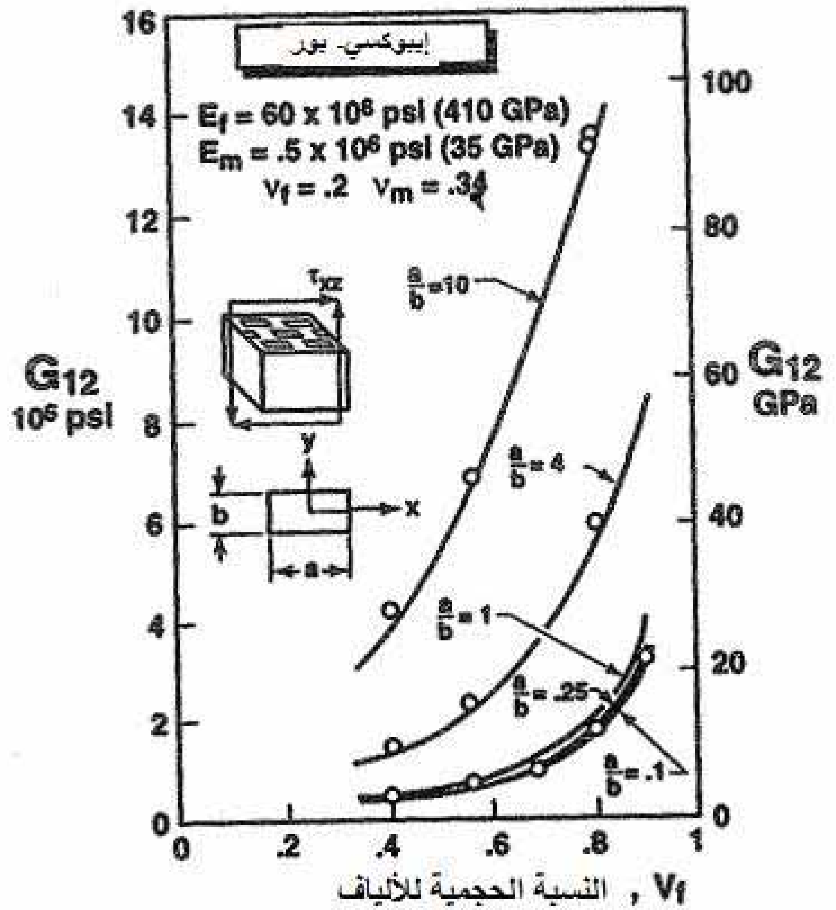
ويمكن الحصولُ على تقديراتٍ أخرى لـــ ξ أكثر جودةً، ولكن علينا الانتباه هنا ألاّ نقع في حفرة اشتقاق علاقةٍ تتجاوز متطلبّاتِ الدقّة الضرورية وتُبطِل الرغبة الأصلية في أداة تصميميّة بسيطة وسهلة الاستعمال.



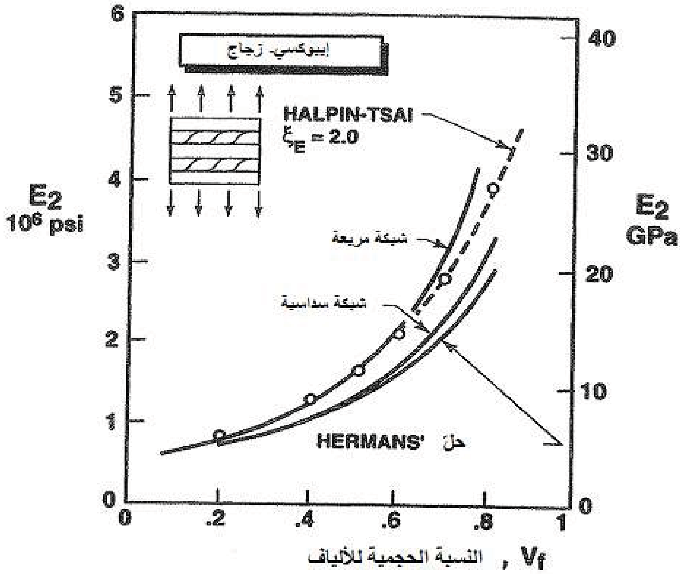
الشكل 3-33: حسابات هالبين- تساي (Halpin–Tsai) (دوائر) إزاء حسابات آدامز (Adams) ودونر (Doner) من أجل G_{12} لألياف دائرية الشكل ضمن شبكة مربّعة (عن هالبين (Halpin) وتساي Tsai [3-17])



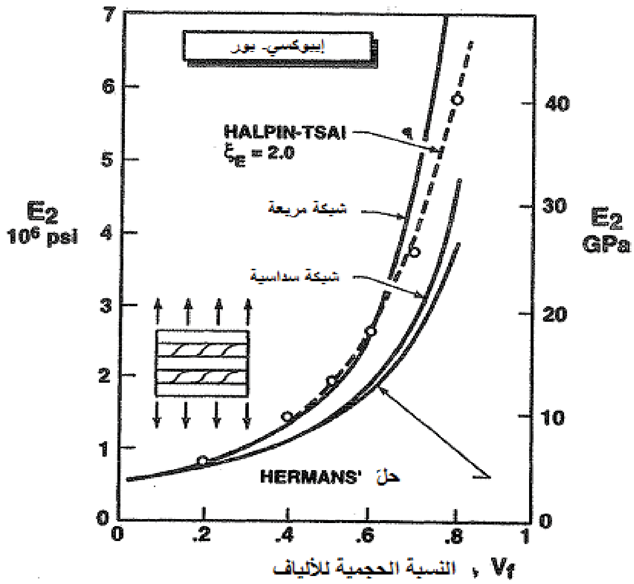
الشكل 3-34: حسابات هالبين-تساي (Halpin-Tsai) (دوائر) إزاء حسابات فوي (Foye) من أجل E_2 لألياف ذات مقاطع عرضانية مستطيلة الشكل ضمن شبكة ألماسيّة (عن هالبين (Halpin) وتساي (Tsai) [3-17])



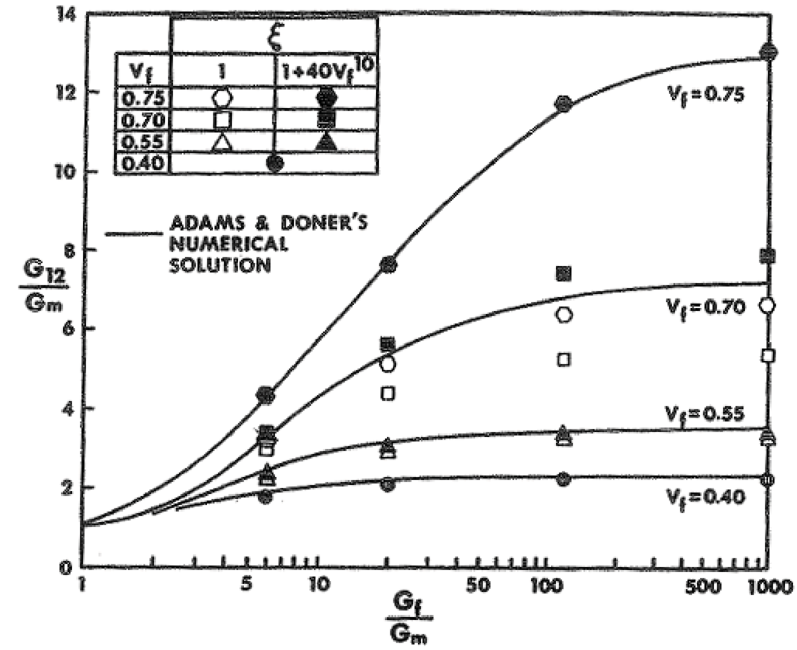
الشكل 3-35: حسابات هالبين-تساي (Halpin–Tsai) (دوائر) إزاء حسابات فوي Foye من أجل G_{12} لألياف ذات مقاطع عرضانية مستطيلة الشكل ضمن شبكة ألماسيّة (عن هالبين (Halpin) وتساي Tsai [3-17])



الشكل 3-36: حسابات E_2 من أجل مادة مركّبة إيبوكسي- زجاج (عن هالبين Halpin وتساي Tsai [3-17])



الشكل 3-37: حسابات E_2 من أجل مادة مركّبة إيبوكسي- بورون (عن هالبين (Halpin) وتساي (Tsai) [3-17])



الشكل 3-38: حسابات هالبين-تساي (Halpin-Tsai) المعدَّلة إزاء حسابات آدامز (Adams) ودونر (Donner) من أجل G_{12} لألياف دائرية الشكل ضمن شبكة مربّعة (عن هيوويت (Hewitt) ودي ماليربي (de Malherbe) [3-23])

إن مجرّد وجود قيمٍ جساءاتٍ مختلفة متوقعة من أجل شبكات (arrays) مختلفة يقود إلى ملاحظةٍ فيزيائية مهمة: تؤدّي التغيرات في تصنيع المادة المركّبة دوماً إلى تغيّرات في هندسة الشبكة، وبالتالي في قيم معامِلات المادة المركّبة. وهكذا، لا يمكن أن يحدونا الأمل بالقدرة على التوقع الدقيق بقيم المعامِلات، وليس هناك أي حاجة إلى ذلك! ويجب أن تُحقّق التقريباتُ (approximations) مثل معادلات هالبين- تساي جميعَ الحاجات العمليّة.

يمكن اكتساب بعض التبصُّر الفيزيائي عن معادلات هالبين- تساي من خلال تفحّص سلوكها عبر مجالاتِ قيمِ ξ وυ. أولاً، وبالرغم من عدم وضوح الأمر، يمكن لـ ξ أن يأخذ قيماً تمتدّ من 0 إلى ∞. عندما ξ=0، يكون:

$$\frac{1}{M}=\frac{V_f}{M_f}+\frac{V_m}{M_m} \tag{3.76}$$

وهي علاقةُ نموذج الارتباط على التسلسل المقترن عادةً مع حدٍّ أدنى لمعامِل المادة المركّبة. عندما ξ=∞ ، يكون:

$$M = V_f M_f + V_m M_m \qquad (3.77)$$

وهي علاقةُ نموذج الارتباط على التوازي، المعروفة بقاعدة المخاليط، المقترن عادةً بإيجاد حدٍّ أعلى لمعامِل المادة المركّبة. وهكذا يعبّر ξ عن قياسٍ لمدى تقوية المادة المركّبة بالألياف، من أجل قيمٍ صغيرة لـــ ξ، تكون الألياف غير فعالة جداً، بينما من أجل قيمٍ كبيرة لـــ ξ، تكون الألياف فعّالةً جداً في زيادة جساءة المادة المركّبة لتتجاوز مادة المصفوفة. بعد ذلك، يمكن تبيانِ أن القيمِ الحدّيّة لـــ η تكون من أجل محتبساتٍ صلبة:

$$\eta = 1 \qquad (3.78)$$

بينما تساوي من أجل المواد المتجانسة:

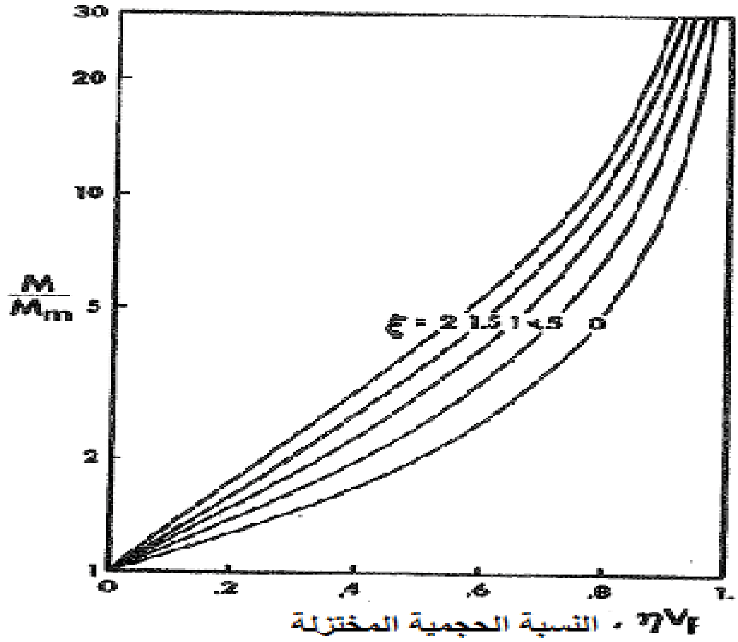
$$\eta = 0 \qquad (3.79)$$

ومن أجل الفراغات:

$$\eta = -\frac{1}{\xi} \qquad (3.80)$$

يمكن تفسير الحدّ ηV_f في المعادلة (3.71) كنسبةٍ حجميةٍ مختزَلة للألياف، حيث يُستعمل وصفَ "المقلّلة" لأن $\eta \le 1$. علاوةً على ذلك، يتضح من المعادلة (3.72) أن η تتأثّر بخصائص المواد المكوِّنة، بالإضافة إلى تأثير العامِل الهندسي للتقوية ξ عليها. من أجل المساعدة أكثر في اكتساب تقديرٍ لمعادلات هالبين– تساي، يتم في الشكل 3-39 رسم المعادلة الأساسية والمعادلة (3.71) كدالة لـــ ηV_f. يمكن بسرعةٍ توليدُ منحنيات من أجل قيمٍ متوسّطة لـــ ξ. لاحظ أن جميع المنحنيات تسعى إلى اللانهاية عندما تقترب ηV_f من الواحد. من الواضح أن القيمَ العملية لـــ ηV_f تكون أصغر من 0.6، ولكن جميعَ المنحنيات في الشكل 3-39 مرسومةٌ من أجل قيمٍ لـــ ηV_f تصل إلى القيمة 0.9. يمكن

استخدامُ مثل هذه المنحنيات الرئيسية من أجل قيم متنوّعة لـــ ξ عند تصميم المواد المركّبة.



الشكل 3-39: منحنيات M/M_m الرئيسية من أجل قيم متنوّعة لـــ ξ

6.3.3 ملاحظات تلخيصية

يوجد كثيرٌ من الجدال حول تحليلات الميكانيك الميكروي وتوقعاته، ويتعلّق قسمٌ كبير من هذا الجدال بالتقريبات التي يجب استخدامها. يبدو أن معادلات هالبين- تساي تمثّل مقاربةً مقبولةً عموماً.

تُعدّ إمكانيةُ عدم وجود التجانس الماكروي في المواد المركّبة من أهم استنتاجات بعض أعمال البنية الميكروية (انظر شاميس وسينديكيج [3-5])، ويعني ذلك ضرورةَ الحاجة إلى اعتبارات بنيوية ميكروية.

مجموعة المسائل 3.3

1.3.3 بيّن كيف يمكن اشتقاق المعادلتَين (3.52) و(3.53)، واستعمالهما للحصول على المعادلة (3.54).

2.3.3 لنعتبر مادةً مركَّبة مقوّاة بالتبعثر. حدّد تأثيرَ نسب بواسون المختلفة في المصفوفة، وفي المادة المتبعثرة على الحدّ الأعلى لمعامِل يونغ الظاهري. اعتبر التركيباتِ الثلاثةَ التالية فيما يتعلّق بخصائص المادة للمواد المكوِّنة:

الحالة	E_m	υ_m	E_d	υ_d
1	(34.5 Gpa) 5×10^6 psi	0	(345 Gpa) 50×10^6 psi	0.3
2	(34.5 Gpa) 5×10^6 psi	0.3	(345 Gpa) 50×10^6 psi	0.3
3	(34.5 Gpa) 5×10^6 psi	0.3	(345 Gpa) 50×10^6 psi	0

احسب قيم E الموافقة للقيم التالية: $\upsilon_d = 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1.0$ (وأي قيمٍ أخرى تقع بين القيم المذكورة – ضرورية لرسم المنحنيات التمثيليّة)، وضَعْها في جدولٍ، ثم ارسم بيانياً E بدلالة V_d، بحيث يمكن تفحص الفوارق الخاصّة، سواء أكانت عددية أم مرئيّة.

3.3.3 استخدم التقنيات التحديدية للمرونة من أجل تحديد الحدود العليا والدنيا المتعلّقة بمعامِل القصّ G الموافق لمادة مركّبة مقوّاة بالتبعثر. عبّر عن النتائج بدلالة معامِلات القصّ للمكوّنات (G_m للمصفوفة وG_d للحبيبات المبعثَرة) ونسبها الحجمية الموافقة (V_m وV_d). يتوجّب على العنصر الحجمي الممثِّل للمادة المركَّبة أن يكون خاضعاً لإجهادِ قصٍّ منتظم τ ينتج منه انفعال قصّ نسبي منتظم وماكروي γ.

4.3.3 عيّن الحدود على E من أجل مادة مركّبة مقوّاة بالتبعثر تحتوي على أكثر من مكوِّنَين، أي أن هناك أكثر من نوعٍ واحد من الحبيبات يتبعثر ضمن المصفوفة.

5.3.3 استنتج المعادلة (3.76)

6.3.3 استنتج المعادلة (3.77)

7.3.3 بيّن أن القيم الحدّيّة لـــ η تُعطى بشكل صحيح من خلال المعادلات (3.78)–(3.80).

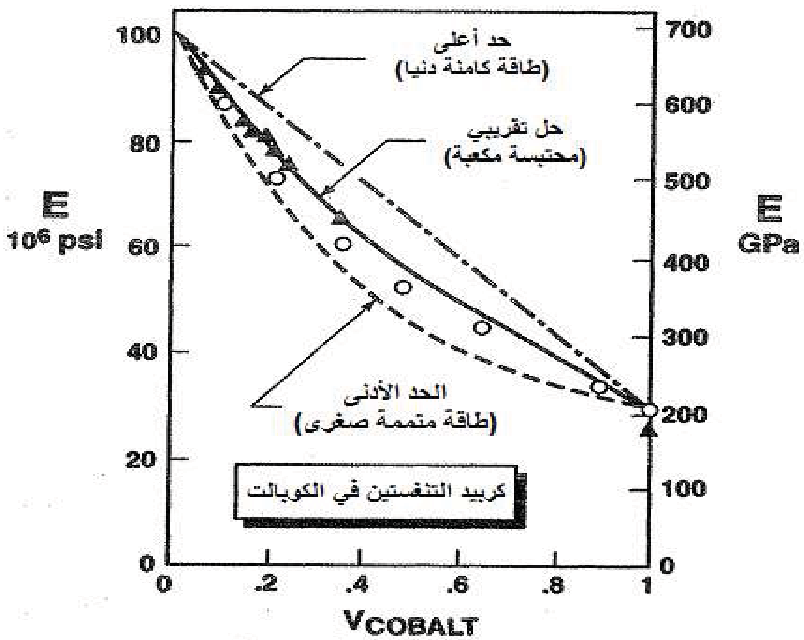
4.3 مقارنة مقاربات الجساءة

1.4.3 المواد المركَّبة الحبيبيّة

تبيّن أن مقاربة ميكانيك المواد لتقدير جساءة مادةٍ مركّبة تشكل حداً أعلى على القيمة الفعلية للجساءة. قارن بول Paul [3–4] الحدَّ الأعلى والحدَّ الأدنى اللذين يتم توقعهما مع البيانات التجريبية [3–24 و3–25] من أجل سبيكة كربيد التنغستين في الكوبالت. تبلغ قيمةُ معامِل يونغ في كربيد التنغستين (WC) 102×10^6 psi (703 Gpa)، بينما تساوي نسبة بواسون 0.22؛ أمّا بالنسبة إلى الكوبالت (Co)، فتبلغ قيمة معامِل يونغ 30×10^6 psi (207 Gpa) وقيمة نسبة بواسون 0.3.

يتمّ تعويضُ خصائص المادة للمكوّنات في المعادلتَين (3.61) و(3.57) للحصول على حدّ أعلى على قيمة E للمادة المركّبة، وفي المعادلة (3.47) للحصول على حدّ أدنى عليه. بالإضافة إلى ذلك، تُقارَن توقعات مقاربة ميكانيك المواد – التي عالجتها المسائل من 1.2.3 إلى 4.2.3 – أيضاً بالبيانات التجريبية. وبشكل خاص، تستعمل عبارةَ معامِل المادة المركَّبة المقوّاة بتبعثرِ حبيباتٍ مكعّبة الشكل، أي:

$$\frac{E}{E_m}=\frac{E_m+\left(E_d-E_m\right)V_d^{2/3}}{E_m+\left(E_d-E_m\right)V_d^{2/3}\left(1-V_d^{1/3}\right)} \qquad (3.81)$$



الشكل 3-40: القيم الحدّيّة المتوقعة للمعاملات والبيانات التجريبية من أجل كربيد التنغستين في الكوبالت (عن بول Paul [3-4])

تُرسم بيانياً توقعات المقاربات المختلفة، بالإضافة إلى البيانات التجريبيّة في الشكل 3-40. لاحظ أن قيم الحدّ الأعلى على معامِل يونغ لا يمكن تمييزها من خطّ مستقيم. وبالتالي، يكون تأثيرُ نسبةِ بواسون υ في المعادلة (3.61) في نتيجة المعادلة (3.57) مهمَلاً من أجل نسب بواسون ومعامِلات يونغ للكوبالت وكربيد التنغستين. من أجل الأغراض العملية، يُعطى الحدّ الأعلى بالعبارة البسيطة التالية لميكانيك المواد والمعروفة باسم قاعدة المخاليط:

$$E = E_m V_m + E_d V_d \qquad (3.82)$$

حيث $\upsilon_m = \upsilon_d$. تقع البيانات التجريبية لــ E بين قيم الحدود العليا والدنيا المتعلّقة بــ E، وهذا ما يتوجّب لكي تكون هذه الحدود حدوداً حقيقية. فوق ذلك، يبدو التوقع التقريبي لميكانيك المواد (المعادلة 3.81) متّفقاً بشكلٍ جيّد مع البيانات التجريبية المُشار لها

بمثلثات. لا تترابط البيانات المُشار لها بدوائر فارغة بشكلٍ جيّد مع التوقع التقريبي للمعادلة (3.81). مع ذلك، لا توجد معلومات متوفّرة فيما يتعلّق بشكل الحبيبات المبعثَرة. بالإضافة إلى ذلك، يمكن للمواد المكوِّنة ألاّ تكون نفسها تماماً في كلتا مجموعتَي البيانات التجريبية. حصل هاشين (Hashin) وشتريكمان (Shtrikman) [3–7] على قيمٍ حدّيّة أكثر قرباً من أجل البيانات التجريبية نفسها.

2.4.3 المواد المركَّبة المقوّاة ليفيّاً

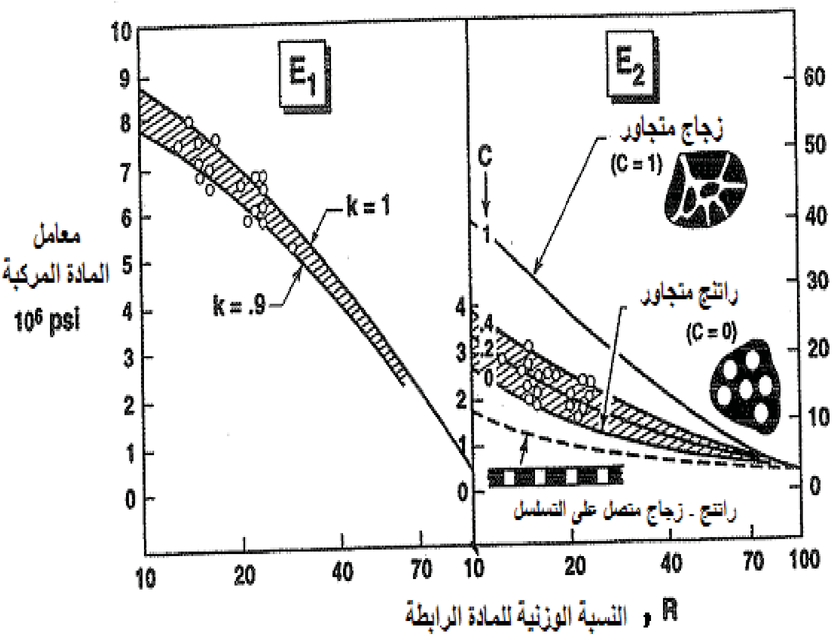
أجرى تساي Tsai تجاربَ لقياس المعامِلات المتنوّعة للمواد المركّبة راتنج–إيبوكسي ذات الألياف الزجاجية [3–1]. تبلغ قيمُ معامِل يونغ ونسبة بواسون للألياف الزجاجية وللراتنج–إيبوكسي 10.6×10^6 psi (73 Gpa)، 0.22 و 0.5×10^6 psi (3.5 Gpa)، 0.35 على التوالي.

تُقارَن البيانات التجريبية، من أجل قيمٍ مختلفة للنسبة الحجمية للألياف– بالنتائج النظرية للمعادلات 3.68، 3.64، 3.66 و3.67 الموافقة على التوالي لــ υ_{12}, E_2, E_1 و G_{12}. تعتمد النتائجُ النظرية على k، عامِل عدم اصطفاف الليف، وC، عامل التجاور، بحيث يمكن رسم المنحنيات البيانية النظريّة من أجل مجالٍ واسع لقيم k وC. يكمن هدفُ مقارنة النتائج النظرية والتجريبية في البرهان على وجود توافقٍ وصفيٍّ وكميٍّ معاً من أجل تبيان صلاحية توقع نظريّ ما. إذا توافقت النتائج النظرية في الشكل مع النتائج التجريبية يوصف التوافقَ بأنه وصفي. علاوةً على ذلك، إذا ما توافقت كذلك في القيمة مجموعتا النتائج عبر ضبطٍ متّسق لقيم الوسيطَين k وC، يوصف التوافقَ حينئذٍ بأنه كمّيّ. وهكذا لأبدَّ هنا من تقصّي مفهومَي عامِل عدم الاصطفاف وعامِل التجاور.

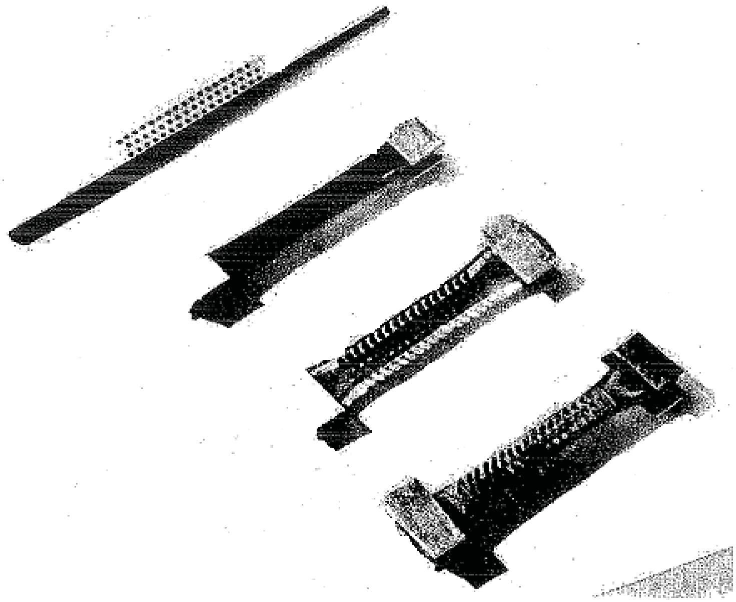
يبيّن الشكل 3-41 النتائج التجريبية والنظرية لــ E_1 من أجل محتوىً راتنجي وزني يمتدّ من 10% إلى 100%. بما أن E_1 ليس بدالة لــ C، لذا يتم تغيير قيم k وحدها، وقد تم اختيار قيمتَين $k = 1$ و $k = 0.9$. تقع بعض البيانات التجريبية في الشكل 3-41 فوق المنحنى الموافق لــ $k = 1$ (أي فوق الحدّ الأعلى!)؛ بينما تقع بعض البيانات تحت المنحنى الموافق لــ $k = 0.9$. مع ذلك، تقع أغلبية النتائج بين المنحنيين الموافقَين

لـــ k = 0.9 و k=1، مع اعتبار k = 0.9 تقديراً محافظاً للسلوك. بما أن العيّنات الفعلية قد تمّ صنعها يدوياً، فإن المحتوى الراتنجي يمكن ألاّ يكون دقيقاً، كما يمكن ألاّ يكون عدمُ اصطفاف الألياف أمراً مستبعداً. وبذلك، لا تكون النتائجُ الواقعةُ فوق الحدّ الأعلى – ولا الحقيقة الأساسيّة لتغيّر E_1– غيرَ مألوفة.

يبيّن الشكل 3-41 النتائج النظرية والمقاسة لـــ E_2 كدالة للنسبة الوزنية للمحتوى الراتنجي. تُعرض النتائج النظرية والممثِّلة للمعادلة 3.64 من أجل $C = 0, 0.2, 0.4, 1$، ويحدّ المنحنيات الموافقان لـــ $C = 0$ و $C = 0.4$ البيانات التجريبية. يمثّل المنحنى النظري الموسوم بعبارة "راتنج – زجاج موصول على التسلسل" حداً أدنى، حداً أدنى من المنحنى المرافق لـــ $C = 0$، وبالتالي يمثّل تقديراً مفرطاً للجساءة.



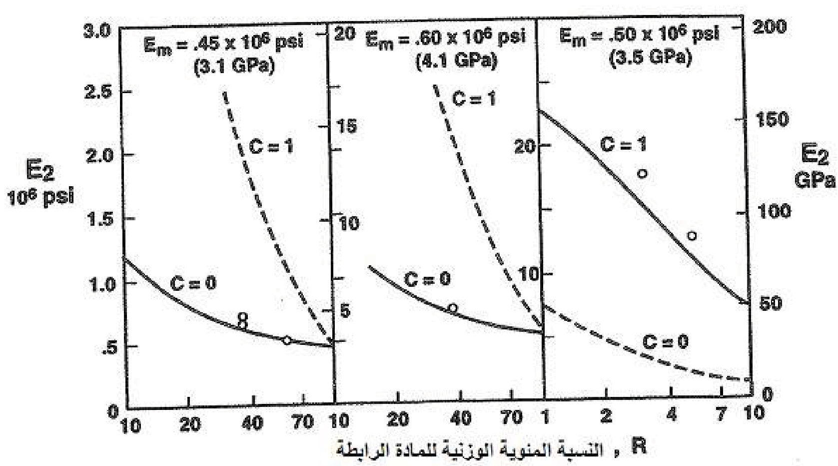
الشكل 3-41: E_1 و E_2 إزاء المحتوى الراتنجي (عن تساي Tsai [3-1])



الشكل 3–42: عيّنات إيبوكسي–فولاذ (عن تساي Tsai [3–1])

مع أن نتائج الشكل 3-41 تبيّن وبشكلٍ معقول وجودَ عامِل التجاور C، فإنه لا بدّ من تفحّصٍ نقديّ لمفهوم عامل التجاور. من أجل هذا الغرض، تمّ إجراء بعض التجارب التي تستخدم مواد مركّبة إيبوكسي– فولاذ. من أجل الحصول على مواد مركّبة ذات C = 0 (ألياف غير متجاورة، أي ألياف بلا تلامس)، أُدخلت قضبان فولاذيّة في ثقوبٍ ضمن قضيب إيبوكسي. من أجل الحصول على مواد مركّبة ذات C = 1 (ألياف تامّة التجاور، أي جميع الألياف متلامسة) وُضع راتنج إيبوكسي في الثقوب ضمن القضيب الفولاذي. في كلتا الحالتَين، كان هناك 54 ثقباً عرضانياً بالنسبة إلى المحور الطولاني للقضيب. وهكذا، عندما يتمّ شد القضبان في الشكل 42.3 وفق الاتجاه الطولاني فإنه يمكن قياس المعامِل E_2. يُنظَر للفولاذ دوماً على أنه الليف، وبذلك يكون $E_f = 30\times10^6$ psi (207 Gpa) و $\upsilon_f = 0.3$، أمّا مادة الإيبوكسي فهي تتمتع بالقيم $E_m = .45x10^6,.60x10^6$ و $.50x10^6 psi$ (3.5 Mpa)، 4.1، 3.1 من أجل حالاتٍ متعاقبة ثلاث، بالإضافة إلى القيمة $\upsilon_f = 0.35$.

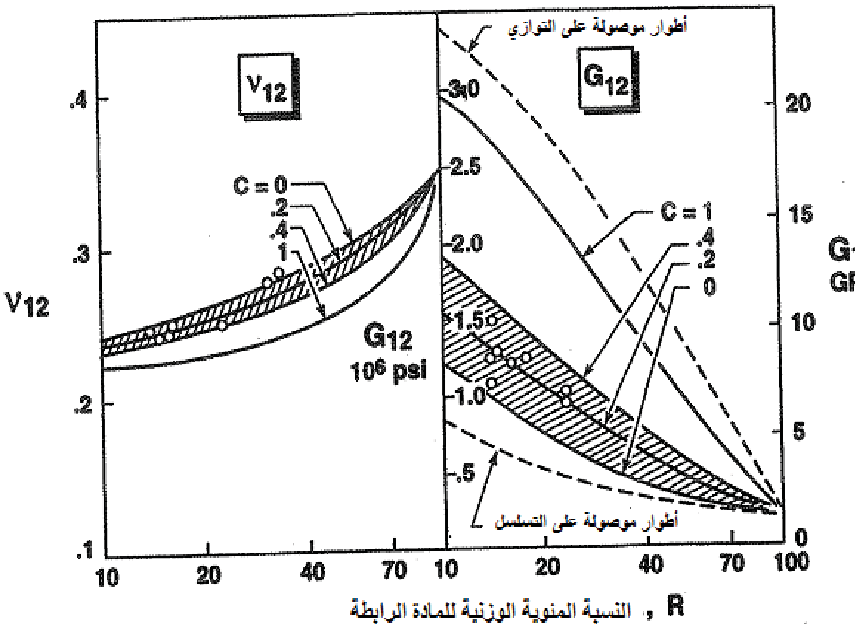
يلخّص الشكلُ 3–43 نتائجَ E_2 من أجل الحالات الثلاث المتعاقبة. لاحظ أن مدى محتوى المصفوفة في القسم اليميني للشكل 3-43 أصغر بعشر مرّات من المدى في كلٍّ من القسمَين اليساري والمركزي من الشكل. علاوة على ذلك، يكون السلم الرأسي في القسم اليميني عشر مرات مثيله في القسمَين اليساري والمركزي. يتبين بوضوح أن البيانات التجريبية تتّفق بشكلٍ جيّد جداً مع نتائج المعادلة 3.64 من أجل $C = 0$ و $C = 1$. تقترب البيانات في حالة $C = 1$ كثيراً من النتائج النظرية، ولكن لا بُدّ من الاعتراف هنا أن النسب الوزنية المعنية للمصفوفة تكون صغيرةً جداً ممّا يجعل المقارنةَ صعبة. من ناحية أخرى، تتّفق البيانات في حالة $C = 0$ بدرجةٍ غير مفاجئة. وهكذا يكون قد أُقيم الدليل على الأهمية الفيزيائية لعامِل التجاور.



الشكل 3–43: E_2 لمواد مركّبة إيبوكسي–فولاذ مع C=0، و C=1 (عن تساي Tsai [3–1])

يبيّن الشكل 3-44 النتائجَ التجريبية لــ υ_{12} لمادة مركّبة إيبوكسي– زجاج بالإضافة إلى التوقعات النظرية الناجمة عن المعادلة 3.66 كدالة على النسبة الوزنية للمحتوى الراتنجي. يعرض الشكلُ النتائجَ النظرية من أجل عوامل تجاور $C = 0, 0.2, 0.4, 1$. يظهر أن القيمة $C = 0$ توافق حدوداً عليا على قيم البيانات، بينما توافق القيمةُ

$C = 0.4$ حدوداً دنيا قاصرةً عنها. وبذلك يكون قد ترسّخ – بشكلٍ أكبر– مفهوم عامِل التجاور.



الشكل 3–44: υ_{12} وG_{12} لمادة مركّبة إيبوكسي–زجاج (عن تساي Tsai [3–1])

يبيّن الشكلُ 3-44 أيضاً النتائجَ التجريبية لــ G_{12} مع النتائج النظرية الناجمة عن المعادلة 3.67 من أجل $C = 0, 0.2, 0.4, 1$. كما في حالة المعامِلات السابقة، نجد أن البيانات التجريبية محدودة بالمنحنيين الموافقَين لــ $C = 0$ و$C = 0.4$. يتبيّن كذلك أن الحدودَ العليا (أطوار موصولة على التوازي) والحدودَ الدنيا (أطوار موصولة على التسلسل) التي تعزى إلى بول (Paul) (انظر الفقرة 3.3) تبرهن دقة الحدود في الحالة الراهنة حيث E_f أكبر بكثير من E_m. توافق نتائجُ الحدود القاصرة الدنيا لــهاشين (Hashin) وروزن (Rosen) [3–8] حالةَ $C = 0$، ولكن حدهما الأعلى يكون أدنى من بعض البيانات التجريبية في الشكل 3-44.

3.4.3 ملاحظات تلخيصية

اشتقّ بول (Paul) – من أجل المواد المركّبة المقوّاة حبيبيّاً- حدوداً عليا وحدوداً دنيا موافقة لمعامِل المادة المركّبة [3–4]. يتّفق حلّه الميكانيكي التقريبي للمواد بشكلٍ جيّد مع البيانات التجريبية من أجل حبيبات كربيد التنغستين في الكوبالت.

يعطي تساي (Tsai) من أجل المواد المركّبة المقوّاة بالألياف عباراتٍ لـــ E_1, E_2, υ_{12} وG_{12} تتّفق جيداً مع البيانات التجريبية من أجل مادة مركّبة راتنج- إيبوكسي مقّواة بألياف زجاجية [3–1]. إن عامِل التجاور C هو المفتاح لهذا التوافق. وهكذا، تمتلك خصائص المواد المكوّنة الآثارَ التالية على خصائص المادة المركّبة:

(1) يوفر E_f مساهمةً كبيرة في E_1

(2) يوفر E_m مساهمةً مهمة في E_2 وG_{12}

(3) يظهر υ_f وυ_m التأثيرات قليلاً على E_2 وG_{12}، ولا تأثير البتّة على E_1

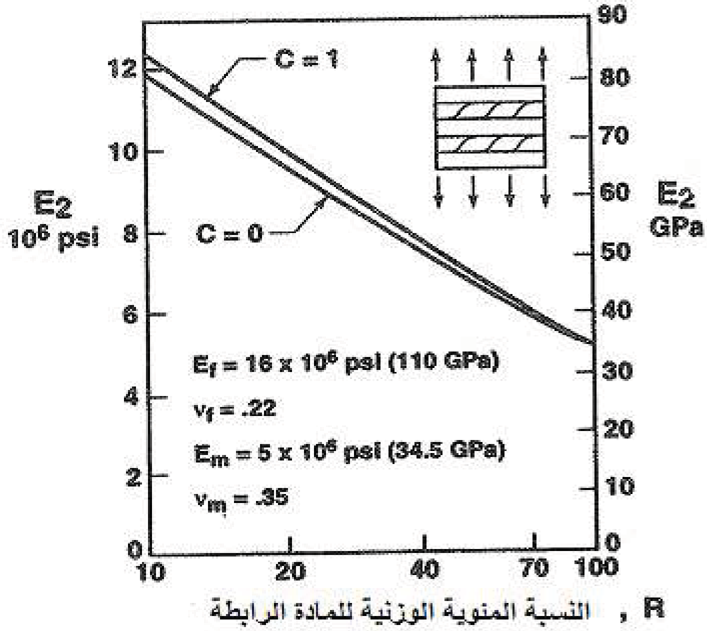
إن عامِلَ التجاور مهمٌ جداً في المواد المركّبة المقوّاة بأليافٍ زجاجيّة، التي يكون من أجلها $E_f/E_m = 20$. مع ذلك، من الممكن ألاّ يكون التجاورُ مهماً من أجل المواد المركّبة التي يكون فيها E_f/E_m قريباً من الواحد. يستدلّ على هذا الاستنتاج الأخير من النتائج في الشكل 45.3 الموافقة لــ $C = 0$ و $C = 1$، حيث تكون المادة المركّبة التخيّليّة المعتبَرة من إيبوكسي–زجاج. تندمج هنا مصفوفة خيالية بـــ $E_m = 5\times10^6$ psi (34.5 Gpa) في ليفٍ زجاجي ذي معامِل عالي القيمة $E_f = 16\times10^6$ psi (110 Gpa) لإعطاء نسبة $E_f/E_m=3.2$. لاحظ في الشكل 45.3 أن المقدار E_2، كما هو محسوبٌ من المعادلة 3.64– يتغيّر بمقدارٍ طفيفٍ جداً بين $C = 0$ و $C = 1$.

5.3 مقاربة ميكانيك المواد إلى المتانة

1.5.3 مقدّمة

لم تبلغ توقعات قياسِ المتانة للمواد المركّبة المقوّاة بالألياف المستوياتِ القريبةَ من التعمق في توقعات الجساءة المتطرق إليها في المقاطع السابقة. مع ذلك، هناك الكثير من النماذج الفيزيائية المثيرة للاهتمام عن مميِّزات المتانة لمصفوفة مقوّاة بالألياف. تمثِّل

أغلبية النماذج درجةً عاليةً جداً من تكامل الملاحظة الفيزيائية مع الوصف الميكانيكي للظاهرة.



الشكل 3−45: E_2 لمادة مركّبة تخيّليّة من إيبوكسي− زجاج (وفقاً لــتساي Tsai [3−1])

سيعالج في هذا الفقرة موضوعَين مهمَّين: متانة الشدّ ومتانة الضغط لرقاقة مقوّاة باتجاه واحد موافقٍ لاتجاه الليف. سيتم تفحّص متانة الشدّ في الفقرة 2.5.3 من خلال استخدام نموذجٍ تملك جميعُ الأليافُ فيه المتانة نفسها، بالإضافة إلى نموذج تمتلك الألياف فيه توزيعاً إحصائياً للمتانة. سوف يتم تفحّص متانة الضغط في الفقرة 3.5.3 من خلال استخدام نموذج لانبعاج الألياف المحاطة بمصفوفة. شغل هذان الموضوعان اهتمامَ كثيرٍ من الباحثين رفيعي المستوى خلال حوالى عشر سنين. مع ذلك، ولغاية اليوم، لم يتم إنجازُ إلاّ عملٍ قليل عن مواضيع أخرى ذات أهمية كبيرة مثل التوقع بقيمة متانة القصّ.

2.5.3 متانة الشدّ في اتجاه الليف

تنفعل المادة المركّبة المقوّاة بالألياف الأحادية الاتجاه عندما تزداد قيمة الحمولة وذلك عبر المراحل الأربع التالية بشكلٍ يعتمد نوعاً ما على القصافة (brittleress) النسبية أو قابلية الطرق المطاوعة النسبية للألياف والمصفوفة:

(1) تنفعل كلتا المصفوفة والألياف بشكلٍ مرن

(2) تستمرّ الألياف في الانفعال المرن، أماّ المصفوفة فتنفعل بشكلٍ لدن

(3) يتشّوه كلٌّ من المصفوفة والألياف بشكل لدن

(4) تتكسر الألياف، ويلي ذلك انكسار المادة المركبة

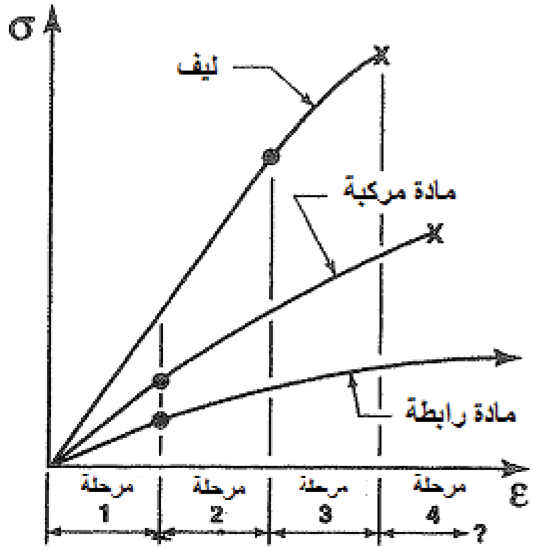
تتوضّح هذه المراحل في الشكل 3-46 من أجل منحنيات شاملة إجهاد – انفعال للألياف والمصفوفة والمادة المركّبة. لاحظ أن الألياف هي عموماً المكوِّن، من بين المكوِّنَين الاثنَين للمادة المركّبة، الأكثرُ جساءةً ومتانة والأقلُّ تطريقاً، كما يتبيّن في الشكل 3-46. بالتأكيد، قد لا تصل الألياف القصفة إلى المرحلة 3. بشكلٍ مشابه، قد لا تصل مصفوفة قصفة إلى أيٍ من المرحلتَين 2 أو 3. وسواء حصل انكسارِ المادة المركّبة بفعل إخفاق الليف أو بفعل إخفاق المصفوفة، فإن ذلك يعتمد على قابلية الطرق النسبية للألياف إزاء المصفوفة، وكذلك على النسبة الحجمية للألياف.

ألياف متساوية المتانة

لنعتبرْ أليافاً قصفةً نسبياً مقارنة بالمصفوفة، ولنفترض أن لها جميعاً المتانة نفسها، على النحو الذي درسه كيلي (Kelly) وديفيس (Davies) [3–26]. علاوة على ذلك، لنعتبر أن كلاًّ من الألياف والمصفوفة فعّالٌ فقط في المدى المرن الخطيّ (المرحلة 1 في الشكل 3-46). إذا كانت المادة المركّبة تمتلك أكثرُ من قيمةٍ أصغريّةٍ معيّنة للنسبة الحجمية للألياف V_f فإنه يتمّ بلوغُ المتانة القصوى النهائية عندما تُجهَد الألياف حتى قيمة إجهادها الأعظمي (الأقصى). يعني ذلك بدلالة الانفعالات:

$$\varepsilon_{c_{\max}} = \varepsilon_{f_{\max}} \tag{3.83}$$

بما أن الأليافَ أكثرُ قصافةً من المصفوفة، فإنها لا يمكن أن تستطيل بمقدار استطالة المصفوفة. وهكذا، تشكّل الأليافُ الوصلة الضعيفة – من وجهة نظر الانفعال، في سلسلة المتانة التي تتضمّنها المادة المركّبة.



الشكل 3–46: مراحل انفعال مادة مركّبة مقوّاة بالألياف

تعتبر منحنيات الإجهاد– الانفعال التخطيطية للألياف والمصفوفة في الشكل 47-3 (مرةً أخرى، المرحلة 1 فقط من الشكل 3-46) مفيدةً في تفسير سببية الحصول على متانة المادة المركّبة. وهكذا، إذا افترضنا أن الانفعال للّيف مساوٍ لذلك في المصفوفة وذلك في اتجاه الألياف (كما في حالة التوقع الميكانيكي الميكروي لقيم E_1)، عندها، تكون متانة المادة المركّبة:

$$\sigma_{c_{\max}} = \sigma_{f_{\max}} V_f + \left(\sigma_m\right)_{\varepsilon_{f_{\max}}} \left(1 - V_f\right) \qquad (3.84)$$

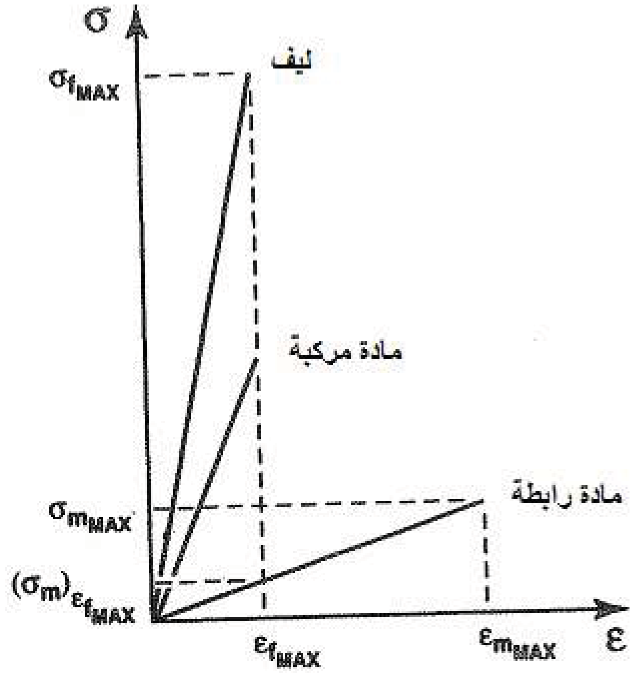
حيث:

$\sigma_{f_{\max}}$ = إجهاد الشدّ الأعظمي لليف

$\left(\sigma_m\right)_{\varepsilon_{f_{\max}}}$= إجهاد المصفوفة عند انفعال في المصفوفة مساوٍ لانفعال الشدّ الأعظمي في الألياف.

من الواضح أنه إذا أدّت التقوية بالألياف إلى متانة أكبر ممّا يمكن الحصول عليه مع المصفوفة وحدها، عندها:

$$\sigma_{c_{\max}} > \sigma_{m_{\max}} \qquad (3.85)$$



الشكل 3-47: منحنيات الإجهاد- الانفعال التخطيطية للألياف وللمصفوفة

يمكن حلّ المعادلتَين 3.84 و3.85 للحصول على قيمة V_f الحرجة (critical) التي يجب تجاوزها للحصول على تقوية بالألياف للمادة المركّبة:

$$V_{f_{critical}} = \frac{\sigma_{m_{\max}} - (\sigma_m)_{\varepsilon_{f_{\max}}}}{\sigma_{f_{\max}} - (\sigma_m)_{\varepsilon_{f_{\max}}}} \qquad (3.86)$$

يمكن لسلوك المادة المركّبة ،من أجل قيم صغيرة لـ V_f، ألاّ يتبع المعادلة 3.84، لأنه قد لا توجد كفايةٌ من الألياف للتحّكم بمدى استطالة المصفوفة. يعني ذلك أن المصفوفة تهيمن على المادة المركّبة و"تَحمِل معها الأليافَ خلال الترحال". وهكذا سوف تتعرض الألياف لانفعالات عالية مع حمولات صغيرة فقط، وبالتالي سوف تتكسر. إذا تكسرت الألياف جميعها عند نفس قيمة الانفعال (وهذا أمرٌ بعيد الاحتمال جداً من وجهة

نظر إحصائية)، فإن المادة المركّبة سوف تتكسر ما لم تستطع المصفوفة (التي تشغل V_m فقط من العنصر الحجمي الممثِّل) تحمُّلَ مجملَ الحمولة المفروضة على المادة المركّبة، أي يكون:

$$\sigma_{c_{\max}} < \sigma_{m_{\max}} V_m \qquad (3.87)$$

وبذلك تكون المصفوفة، في هذه الحالة، المساهِمَ الوحيدَ في متانة المادة المركّبة. في الحقيقة، تتصرّف المادة المركّبة، كما لو كانت مصفوفة بحجم V_m وثقوباً – وليس أليافاً– بحجم V_f! في النهاية ينهار مجملَ المادة المركّبة بعد تكسر الألياف إذا كان:

$$\sigma_{c_{\max}} = \sigma_{f_{\max}} V_f + \left(\sigma_m\right)_{\varepsilon_{f_{\max}}} \left(1 - V_f\right) \geq \sigma_{m_{\max}} \left(1 - V_f\right) \qquad (3.88)$$

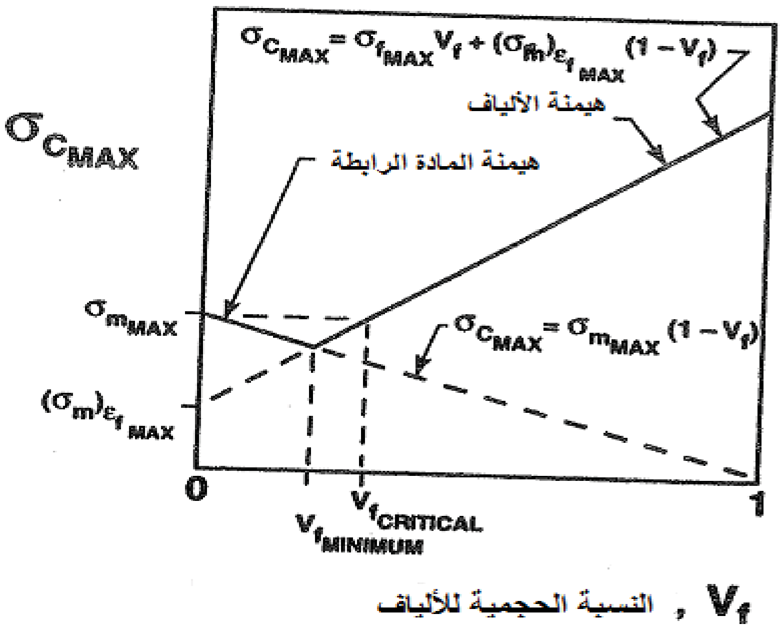
ومنه يمكن استنتاج القيمة الصغرى لـــ V_f من أجل صلاحية المعادلة (3.88)

$$V_{f_{\text{minimum}}} = \frac{\sigma_{m_{\max}} - \left(\sigma_m\right)_{\varepsilon_{f_{\max}}}}{\sigma_{f_{\max}} + \sigma_{m_{\max}} - \left(\sigma_m\right)_{\varepsilon_{f_{\max}}}} \qquad (3.89)$$

يمكن فهم العلاقات السابقة ،المعادلات من (3.84) ولغاية (3.89)– بسهولةٍ أكبر عندما تُرسم بيانياً، كما في الشكل 48.3. تُرسم هنا متانة المادة المركّبة (أي الإجهاد الأعظمي للمادة المركّبة) كدالة للنسبة الحجمية للألياف. عندما يكون V_f أصغر من $V_{f_{\text{minimum}}}$، يتحكّم انفعال المصفوفة بمتانة المادة المركّبة، وتكون فعلياً أصغرَ من متانة المصفوفة. عندما يكون V_f أكبر من $V_{f_{\text{minimum}}}$ ولكن أصغر من $V_{f_{\text{critcal}}}$، يتمّ التحكّم بمتانة المادة المركّبة عبر انفعال الألياف، ولكن هذه المتانة تبقى أقلّ من المتانة المتأصّلة للمصفوفة. لا تكتسب المادةُ المركّبةُ متانة بفضل التقوية بالألياف إلاّ عندما يتجاوز V_f القيمةَ $V_{f_{\text{critcal}}}$. عندها، تتحكّم انفعالات الألياف بمتانة المادة المركّبة لأن V_f أكبر من $V_{f_{\text{minimum}}}$. لاحظ أن مظهر الشكل 48.3 سوف يتغيّر عندما يتغيّر $V_{f_{\text{critcal}}}$. لاحظْ – من المعادلة 48.3– أن المقدارَ $V_{f_{\text{critcal}}}$ صغيرٌ عندما:

$$\sigma_{m_{\max}} \cong \left(\sigma_m\right)_{\varepsilon_{f_{\max}}} \qquad (3.90)$$

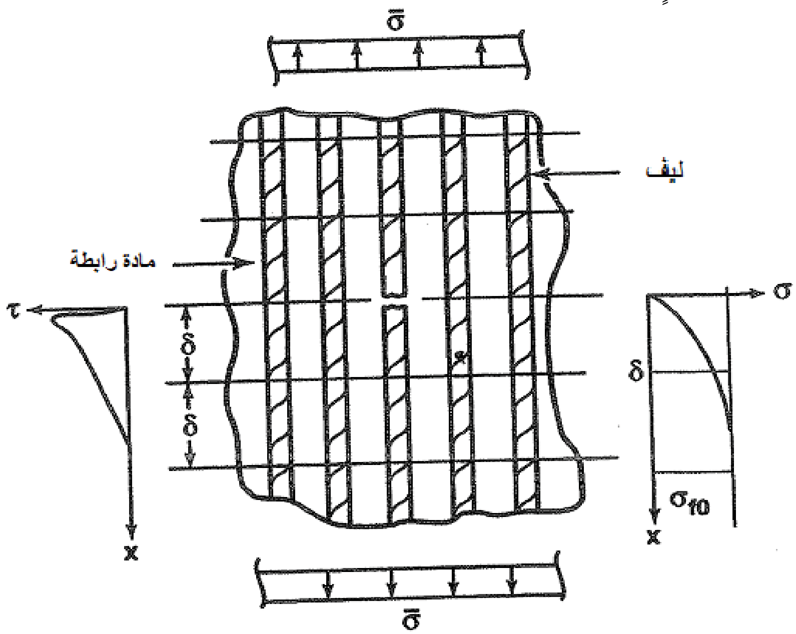
وهذا هو حال الألياف الزجاجية التي تقوي مصفوفة راتنجية. في الحالة الأخيرة، تتحكّم الألياف دوماً في متانة المادة المركّبة لأن $V_{f_{\text{critcal}}}$ يتجاوز دوماً $V_{f_{\text{minimum}}}$.



الشكل 3–48: متانة الشدّ للمادة المركّبة إزاء النسبة الحجمية للألياف (عن كيلي Kelly وديفيس Davies [3–26])

يرتكز التحليل السابق على وجود أليافٍ مستمرّة ذات متانة واحدة تتكسر كلّها عند نفس الموضع الطولاني. مع ذلك، لا تمتلك الألياف تحت الشدّ متانة الكسر نفسها، كما أنها لا تتكسر في المكان نفسه. بدلاً من ذلك، ولأن العيوب السطحية تختلف من ليف إلى آخر، يكون للألياف المنفردة متانات كسرٍ مختلفة، ومنه الحاجة إلى تحليل إحصائي من أجل تعريفِ منطقي لمتانة المادة المركّبة.

ألياف ذات توزيعٍ إحصائي للمتانة



الشكل 3–49: نموذج إخفاق الشدّ لروزن Rosen (عن روزن Rosen [3–27])

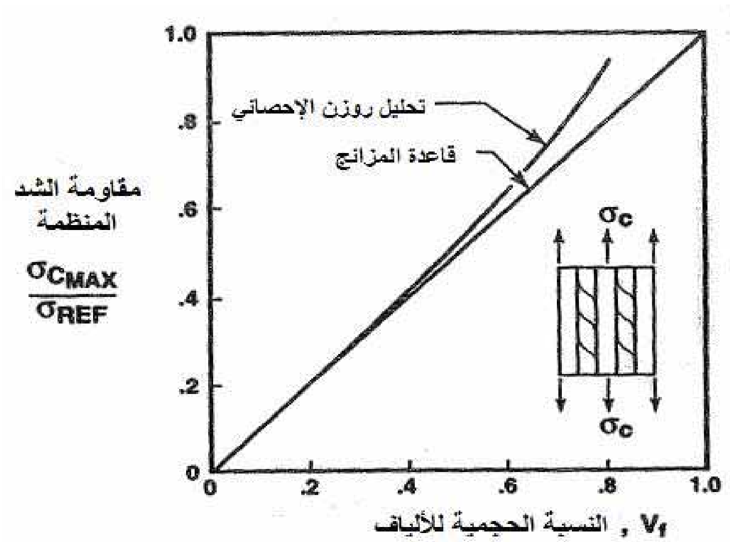
حلّل روزن (Rosen) متانة المواد المركّبة المقوّاة بألياف ذات توزيع إحصائي للمتانة عبر استخدام النموذج الموضَّح في الشكل 3-49 [3–27]. يحتوي العنصرُ الحجمي الممثِّل هنا على عدة ألياف غير منكسرة وعلى ليفٍ واحد منكسر. من الواضح أنه إمّا أن يغيّرَ العنصرُ الحجمي الممثِّل حجمه أثناء التحميل وما يليها من كسر الألياف، أو أن عددَ انكسارات الألياف يزداد في عنصرٍ حجميّ ثابت الحجم. من المفترَض أن يكون الليفُ المكسور قد تعرض لإجهادٍ عالٍ كفايةً ليبتدئَ الكسرُ عند عيبٍ سطحي. يسبّب الليفُ المكسور إعادةَ توزيعٍ للإجهادات حول موضع الكسر، ولا بدّ للإجهاد عندها أن يمرّ انطلاقاً من أحد طرفَي الليف المكسور ليجتاز الكسر ويصل إلى الطرف الآخر. تكمن آليةُ تحقيقِ نقل الإجهاد هذا في نشوء إجهادات قصّ عالية في المصفوفة عبر مسافةٍ قصيرة من كسر الليف، كما هو موضَّح في الشكل 3-49. يزداد عند ذلك إجهادُ الليف الطولاني من القيمة صفر عند الكسر إلى مستوى الإجهاد σ_{f_0} الموافق لأيّ ليفٍ آخر في المادة المركّبة بعيداً عن الكسر. وهكذا تكون مسألة شدِّ الليف قد تحوّلت إلى مسألة سحب الليف بعد حدوث كسر الليف.

يمكن بعد ذلك أن يحصلَ إخفاق المادة المركّبة بطريقتَين. أولاً، يمكن لإجهاد القصّ في المصفوفة حول الليف أن يتجاوز قيمةَ إجهاد القصّ المسموح به في المصفوفة. وبشكل أكثر دقّة، يمكن لرابطة الالتصاق بين الليف والمصفوفة أن تتكسر بسبب القيم العالية لإجهاد القصّ ضمن الآلية المذكورة أعلاه لنقل الإجهاد بين الألياف المكسورة. ثانياً، يمكن لكسر الليف أن ينتشر فعلاً عبر المصفوفة من خلال ألياف أخرى مسبِّباً بذلك إخفاقاً إجمالياً للمادة المركبة. إذا كانت الرابطةُ بين الليف والمصفوفة قويةً بشكلٍ جيّد، وإذا كانت متانةُ (toughness) كسر المصفوفة عاليةَ القيمة، عندها يمكن لانكسارات الألياف أن تستمر حتى يغدو التراكم الإحصائي لها كافياً للتسبب بتمزق عامّ للمادة المركّبة.

عبر استعمال تحليلٍ إحصائيّ، حصل دو (Dow) وروزن (Rosen) [3−28] على:

$$\sigma_{c_{\max}} = \sigma_{ref} V_f \left[\frac{1 - V_f^{\ 1/2}}{V_f^{\ 1/2}} \right]^{-1/(2\beta)} \qquad (3.91)$$

حيث يعبّر σ_{ref} عن مستوى مرجعيّ للإجهاد كدالة لخصائص الليف والمصفوفة، أمّا β فهي وسيط (براميتر) إحصائي في توزيع وايبُل (Weibull distribution) لمتانة الليف.



الشكل 3−50: متانة الشدّ للمادة المركّبة إزاء النسبة الحجمية للألياف (عن دو (Dow) وروزن (Rosen) [3−28])

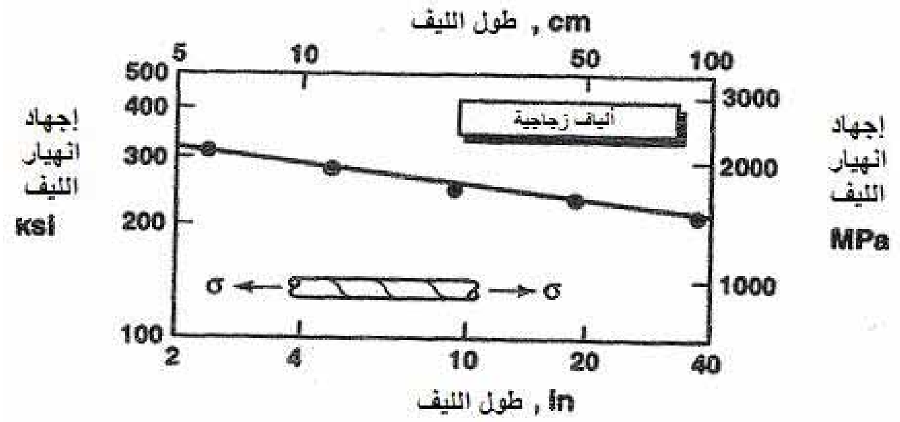
تمّ رسم نتائج روزن بيانياً في الشكل 3-50 من أجل $\beta = 7.7$ وهذه قيمة ممثلة للألياف التجارية من الزجاج E، كما تمّ أيضاً رسمُ، على الشكل نفسه، عبارة قاعدة المخاليط:

$$\sigma_{c_{\max}} = \sigma_{ref} V_f \tag{3.92}$$

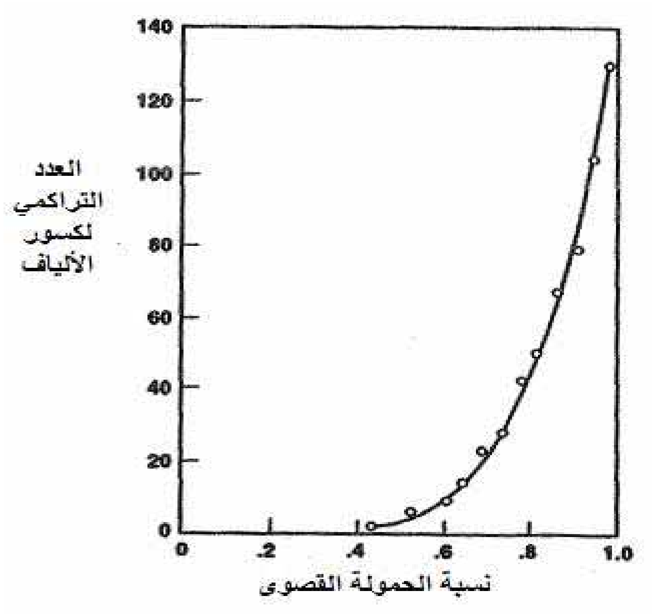
حيث أُهملت متانة الشدّ للمصفوفة لأنها أصغر بكثير من متانة الشد للألياف. وهكذا، يجب تفسير σ_{ref} فعلياً كمتانة شد لليف مع بعض الانعكاسات الإحصائية. لاحظْ في الشكل 3-50 أن نتائج روزن انطلاقاً من المعادلة (3.91) لا تسعى إلى الواحد عندما $V_f = 1$. يحدث هذا السلوك لأن الكثافةَ الأعظمية لتنضيد الألياف تحصل من أجل شبكة سداسيّة لألياف منتظمة القطر يكون من أجلها $V_f = 0.904$. لاحظْ أن نتائج روزن قريبةٌ جداً من عبارة قاعدة المخاليط. مع ذلك، تستند كلتا العبارتَين إلى مقاربتَين مختلفتَين بعيدتَين كلّ البعد إحداهما عن الأخرى، بحيث من الخطأ استنتاجُ أننا وجدنا النظرية الفيزيائية الصحيحة اعتماداً على مجرّد التوافق بين المقاربتَين وانسجامهما مع البيانات التجريبية.

يمكن الحصول على عدة استنتاجاتٍ مثيرة للاهتمام عبر ملاحظة الشكل 3-50. بشكلٍ أساسي، تتجاوز متانة الكسر للمادة المركّبة قيمتَها لليفٍ منفرد، لأن نتائج روزن تقع إلى الأعلى فوق عبارة قاعدة المخاليط. زيادة على ذلك، تتجاوز قدرة (قابلية) امتصاص الطاقة للمادة المركّبة قيمتَها في الألياف. تنجم هذه المميزات عبر ملاحظة الشكلَين 3-51 و3-52، حيث يتبيّن أولاً أن متانة الليف (الألياف من الزجاج E) متناسبة عكسياً مع طوله، ويبدو ثانياً أن عددَ كسور الألياف يزداد عندما نقترب من الحمولة القصوى للمادة المركّبة. لاحظْ في الشكل 3-52 أن الألياف تتكسر فعلاً عند منتصف الحمولة القصوى، وأن عددَ الكسور يتراكم سريعاً حتى يحدث الكسر الإجماليّ للمادة المركّبة.

يمكن التعليلُ المنطقي للشكل 3-51 حول تغيّر متانة الليف بدلالة طوله عبر مقارنة الليف بعيوب سطحية مع سلسلة؛ فكلّما طالت السلسلة (الليف) ازداد احتمالُ وجود وصلةٍ ضعيفة (العيب السطحي).



الشكل 3−51: متانة الشد لليف إزاء طول الليف (عن دو (Dow) وروزن (Rosen) [3−28])



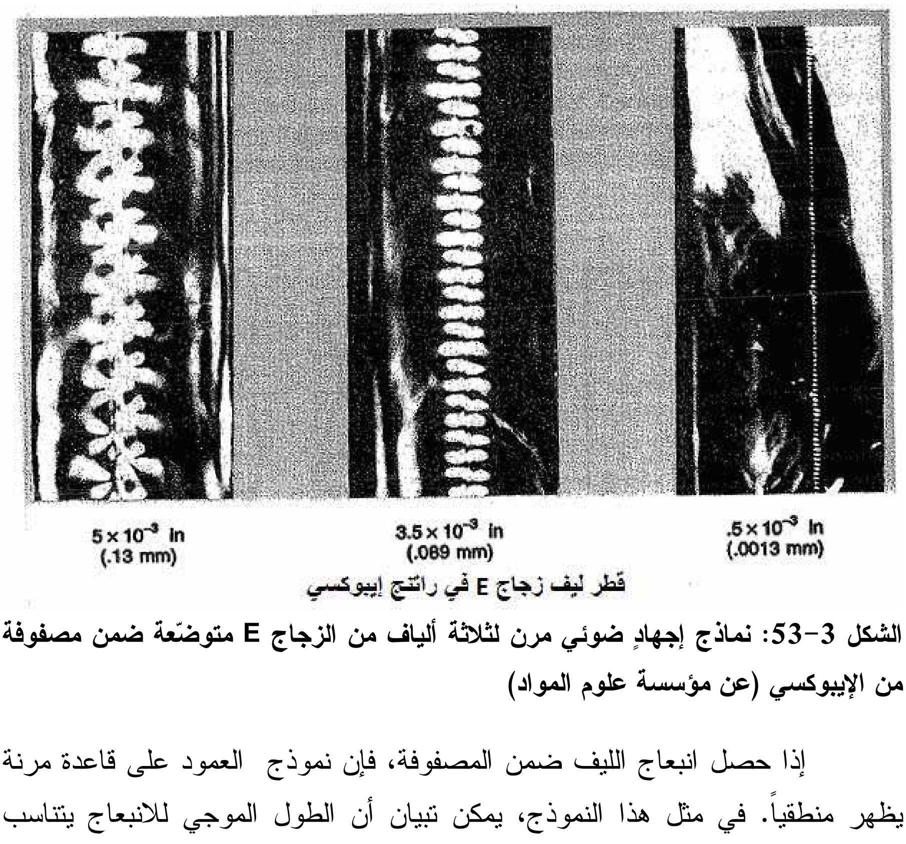
الشكل 3−52: العدد التراكمي لكسور الألياف إزاء النسبة المئوية للحمولة النهائية (ultimate) للمادة المركبة (عن روزن (Rosen) ودو (Dow) وهاشين (Hashin) [3−29])

ببساطة، لا توجد دراساتٌ حاسمة حول متانة الشدّ في المواد المركّبة من وجهة نظر ميكانيكيّة ميكروية. لا يزال عملٌ كثير في هذا المجال قبل التمكن من التصميم

الصحيح للمواد المركّبة، أي معرفةِ كيفية اختيار المكوِّنات وتحديد نسبها من أجل متانة إجهاد شدّ محدد.

3.5.3 متانة الضغط في اتجاه الليف

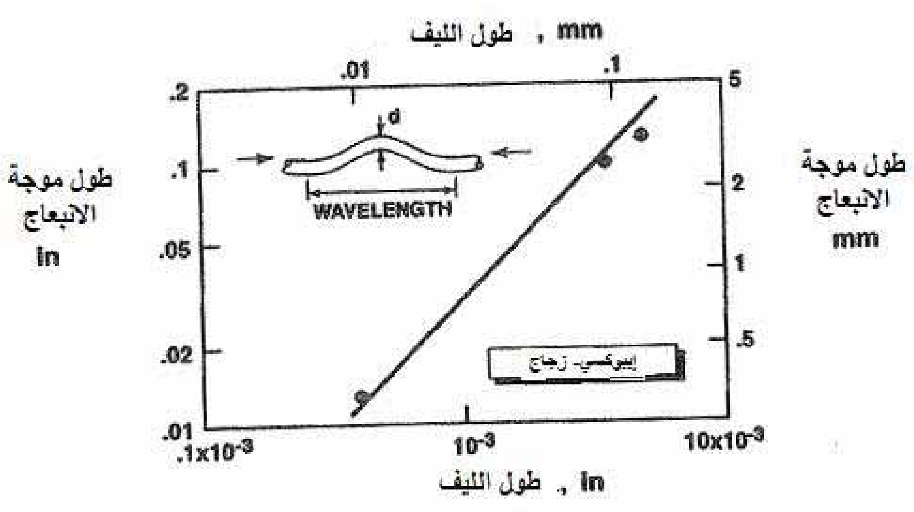
خمَّن كلٌّ من دو (Dow) وروزن (Rosen) أنه عندما تخضع المواد المركّبة المقوّاة بالألياف إلى حمولاتٍ ضغط، يبدو أن نمط الإخفاق يكون انبعاج الليف ضمن قيودِ مادة المصفوفة [3–28]. يكمن أحد المؤشّرات على هذا النمط من الإخفاقات في الطبيعة الدوريّة لنموذج الإجهاد الضوئي المرن (photoelstic stress) للألياف من الزجاج E مع ثلاثة أقطار مختلفة ضمن مصفوفة من الإيبوكسي، كما هو موضَّح في الشكل 3-53.



الشكل 3–53: نماذج إجهادٍ ضوئي مرن لثلاثة ألياف من الزجاج E متوضّعة ضمن مصفوفة من الإيبوكسي (عن مؤسسة علوم المواد)

إذا حصل انبعاج الليف ضمن المصفوفة، فإن نموذج العمود على قاعدة مرنة يظهر منطقياً. في مثل هذا النموذج، يمكن تبيان أن الطول الموجي للانبعاج يتناسب طردياً مع قطر الليف. يمكن التحقّق من هذه النتيجة النظرية عبر البيانات التجريبية

المبيَّنة في الشكل 3-54، حيث تم تمثيل علاقة خطيّة لأفضلِ مطابقة بمستقيمٍ ميلُه 45° في مخطط بيانيّ لوغاريتمي–لوغاريتمي. علاوة على ذلك، تعزّز هذه البيانات بشكلٍ كبير الفرضيةَ الإجماليةَ عن مسؤولية انبعاج الليف عن إخفاق الضغط. دعا غريسزوك (Greszczuk) [3–30] هذا النوع من الإخفاق بالانبعاج الميكروي (micro buckling). لاحظ أننا تجنّبنا لغاية الآن اعتمادَ فرضياتٍ اعتباطية، بل حاولنا – بدلاً من ذلك– تبنّي تقريباتٍ فعّالة توجِّهُها مشاهدات السلوك الفعليّ بعناية.

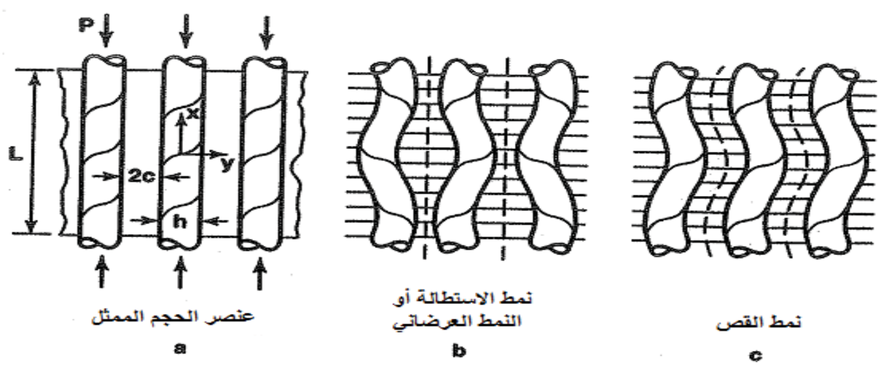


الشكل 3–54: النتائج التجريبية للطول الموجي للانبعاج إزاء قطر الليف (عن دو (Dow) وروزن (Rosen) [3–28])

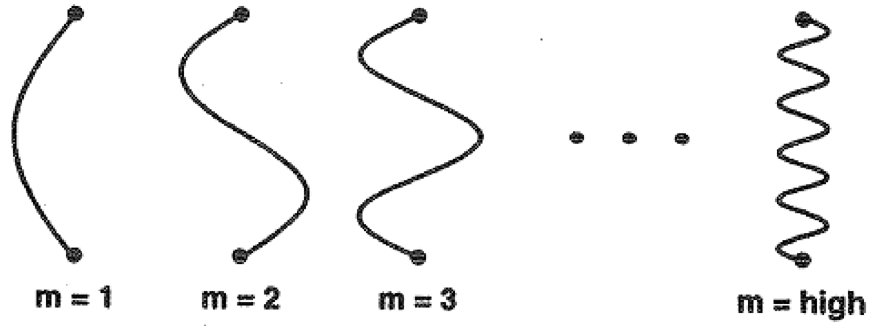
بالإضافة إلى إمكانية حدوث انبعاج الليف بسبب حمولات الضغط الميكانيكيّة، فإن إجهادات الانكماش التي تظهر خلال تسخين (شيّ) المادة المركّبة يمكن أن تتسبّب أيضاً بحصول الانبعاج. تنجم إجهاداتُ الانكماش عن امتلاك المصفوفة لمعاملِ تمدّد حراريٍّ أعلى منه في الألياف. في حقيقة الأمر، نجمت نماذج الإجهاد الضوئي المرن في الشكل 3-53 بفعل انكماش المصفوفة خلال تسخين (شيّ) ليفٍ زجاجيٍ منفرد مغلَّف ضمن مادة الإيبوكسي الرابطة.

هناك نوعان ممكنان لانبعاج الليف في العنصر الحجمي الممثِّل في الشكل 3-55 أ. أولاً، يمكن للألياف أن تنبعجَ خارج الطور بالنسبة إلى بعضها البعض (وبشكلٍ متناظرٍ

(symmetric) بالنسبة إلى خطٍ مستقيم يقع في منتصف المسافات بين الألياف)، ممّا يؤدّي إلى نمط الانبعاج "العرضاني" أو "التمددي" في الشكل 3-55 ب. في هذه الحالة، لا يتحرك خطٌ شاقولي أصلاً ضمن المصفوفة وفي منتصف المسافة بين أيّ ليفَين متجاورَين (الخطوط الشاقولية المتقطِّعة في الشكل 3-55 ب). تتغيّر جميعُ الخطوط الأخرى الشاقولية أصلاً لتغدوَ موجاتٍ جيبيّة ذات اتساع يزداد بازدياد المسافةِ عن نقطة المنتصف بين كلّ ليفَين متجاورَين حتى تصل إلى قيمتها العظمى عند الليف. علاوة على ذلك، تتمدّد الخطوط الأفقية ذات الطول الأصلي 2c أو تتقلّص كما في الشكل 3-55 ب. وهكذا، تستطيل المصفوفة أو تتقلّص في الاتجاه y العرضاني (العمودي على) بالنسبة إلى الاتجاه x. من أجل ذلك، يستعمل هنا تسميةَ النمط العرضاني أو نمط الاستطالة. أمّا النمط الثاني فهو نمط القصّ، وقد سُميّ كذلك لأن المصفوفة تتعرض أثناءَه لانفعالات قصّ بسبب انبعاج الألياف في الطور مع بعضها البعض (بشكلٍ متخالفٍ – لا متناظر– بالنسبة إلى الخط المستقيم الواقع في منتصف المسافة بين الألياف) كما يوضّح الشكل 3-55 ج. تنقصُّ هنا الخطوطُ الشاقوليّة أصلاً في المصفوفة إلى اليمين أولاً ثم إلى اليسار من وضعها الأصليّ المستقيم، وذلك على شكل موجة جيبيّة. أمّا الخطوطُ الأفقية أصلاً فهي لا تغيّر من توجيهها أو طولها أثناء الانبعاج، ولكنها تنزاح في الاتجاه y. وهكذا، تتعرّض المصفوفة للقصّ في المستوي x-y، حيث يُنسَب إجماليَّ القصّ إلى المحور x. وهذا هو سبب استعمال تسمية نمط القصّ.



الشكل 3–55: نمط الاستطالة ونمط القصّ لانبعاج الليف



الشكل 3−56: انبعاج عمود أولر المُدعَّم بشكل متقطّع

يُنظر إلى الألياف في نموذج كلا نمطَي الانبعاج السابقَين على أنها صفائح طول كلّ منها L وعرضها لا متناهٍ في الكبر وسماكتها h، وتفصل بينها مصفوفة عرضها 2c. وهكذا نكون قد جعلنا المسألةَ ثنائيةَ البعد، لأنه يتم تجاهل البعدَ العمودي على المستوي x-y في الشكل. يجب على نتيجةِ نموذجِ الانبعاج ثنائي البعد أن تمثِّلَ حدّاً علوياً بالنسبة إلى مسألةِ نموذجِ الانبعاج ثلاثي الأبعاد الحقيقية (حيث ينبعج الليف ليغدوَ حلزونيّ الشكل عند حمولةٍ أقل قيمةً من القيمة الموافقة لانبعاجٍ جيبيّ في المستوي). يخضع كلُّ ليفٍ إلى حمولة ضغط محورية P، ويُنظَر إلى الألياف أيضاً على أنها أكثرُ جساءةً من المصفوفة (أي $G_f >> G_m$)، بحيث يمكن إهمال انفعالات القصّ للألياف. وبالتأكيد، تفوق قيمةُ حمولة الانبعاج لليفٍ محاطٍ بمصفوفة داعمةٍ بكثير قيمتَها فيما لو كانت المصفوفة غائبةً. وبشكل رئيسي، إن الدعمَ الجانبيّ لمادة المصفوفة المستمرّة مماثلٌ لزيادة عدد الدعامات الجانبية المتقطّعة من أجل عمود أولر؛ يعني ذلك أن العلاقةَ:

$$P = m^2 \pi^2 \frac{El}{L^2} \tag{3.93}$$

تمتلك، من أجل نمط الانبعاج، نتائجَ تعتمد على عدد الدعامات الجانبية (m-1) في الشكل 3-56. من أجل قيمٍ كبيرة لــ m، تكون حمولةُ الانبعاج أكبرَ بكثير ممّا لو كانت m مساويةً فقط للواحد (عمود بدون دعامة جانبية). مع ذلك، لاحظ أن دعامةَ المصفوفة مرنةٌ، أي أنها دعامةٌ قابلة للتشوه مثل النابض، وليست الدعامةَ الصلبةَ لعمود أولر ذي الدعامات المتقطّعة (Discrete).

يستند التحليلُ في إيجاد حمولة انبعاج الليف في كلّ نمطٍ إلى طريقة الطاقة التي وصفها تيموشينكو (Timoshenko) وغير (Gere) [3−31]. يكمن معيارُ الانبعاج في أن تغيّرَ طاقة تشوه اللّيف ΔU_f، وللمصفوفة المرافقة ΔU_m، مساوٍ إلى الشغل المبذول من قبل قوة الليف ΔW خلال الانفعال إلى حالة الانبعاج، أي:

$$\Delta U_f + \Delta U_m = \Delta W \qquad (3.94)$$

في طريقة الطاقة، يتم تقريب تشكيلات انحناء الانبعاج من أجل مختلف أنماط الانبعاج. تُحسب حمولاتُ الانبعاج الموافقة باستعمال المعادلة 3.94. تكمن السمة الهامة لطريقة الطاقة في أن الحمولةَ المحسوبةَ تمثّل حدوداً عليا بالنسبة إلى حمولات الانبعاج الفعلية في المسألة المعتبَرة. وهكذا، إذا تم تمثيل انزياحَ (الانسحاب) الانبعاج المجهولَ، v، لليفٍ منفرد في الاتجاه y (العرضاني بالنسبة إلى الألياف في الشكل 3-55) بمتسلسلة فورييه الجيبية (furrier sine series):

$$v = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \qquad (3.95)$$

فإنه سوف يتم الحصول على حمولة انبعاج أعلى من حمولة الانبعاج الفعلية. إذا استُعملت المعادلة 3.95 في عبارات طاقة الانبعاج العرضاني وانبعاج القصّ من أجل مادة مركّبة مقوّاة بالألياف، فإن القيمةَ الأصغر من بين قيمتَي حمولتَي الانبعاج تتحكّم بانبعاج الليف للمادة المركّبة. من المتوقّع، من أجل نمط انبعاج ذي انفعالات متوسّطة مقارنةً بالنمط العرضاني ونمط القصّ (ويعني ذلك ألاّ تكون انفعالات الليف في نفس الطور، أو ولا تماماً خارج الطور)، أن تكون قيمةُ حمولة الانبعاج أعلى منها في أيّ من النمطَين البسيطَين.

النمط العرضاني أو نمط الاستطالة

من أجل نمط الانبعاج العرضاني في الشكل 3-55، تتمدّد مادة المصفوفة أو تتقلّص في الاتجاه y. مع ذلك، يُفترض أن الانفعال المصفوفة في الاتجاه y (العرضاني بالنسبة إلى الألياف) مستقلٌ عن y، أي مساوٍ ببساطة لضعفَي انزياحِ اللّيفَين المتجاورَين v مقسوماً على المسافة الأصلية بين الليفَين:

$$\varepsilon_y = \frac{\Delta L}{L} = \frac{2v}{2c} \qquad (3.96)$$

وبالتالي من علاقات الإجهاد– انفعال يكون إجهادُ المصفوفة:

$$\sigma_y = E_m \frac{v}{c} \qquad (3.97)$$

يتم تجاهل أيَّ تشوه لمادة المصفوفة في الاتجاه x؛ وهكذا يفترض أن طاقةَ الإجهادات العرضانية (الاستطاليّة) تهيمن على التغيّر في طاقة الانفعال. من أجل المصفوفة، يكون:

$$\Delta U_m = \frac{1}{2} \int_V \sigma_y \varepsilon_y dV \qquad (3.98)$$

نعوّض المعادلتَين 3.96 و3.97 أعلاه للحصول على:

$$\Delta U_m = \frac{E_m}{2c^2} \int_V v^2 dV \qquad (3.99)$$

نعوّض كذلك المعادلةَ 95.3 الموافقة للانحراف العرضاني أعلاه للحصول على:

$$\Delta U_m = \frac{E_m}{2c^2} \int_V \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} dx dy \qquad (3.100)$$

حيث مقاسُ العنصر الحجمي الممثّل في الاتجاه z هو الواحد. وبالتبديل الآن بين إشارتَي التكامل والمجموع يكون:

$$\Delta U_m = \frac{E_m}{2c^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{2c} \int_0^{L} a_m a_n \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} dx dy \qquad (3.101)$$

الدالة الجيبية متعامدة مع نفسها، أي:

$$\int_0^L \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} dx dy = \begin{cases} 0 & , m \neq n \\ \frac{L}{2} & , m = n \end{cases} \qquad (3.102)$$

وبالتالي نجد:

$$\Delta U_m = \frac{E_m L}{2c} \sum_n a_n^2 \qquad (3.103)$$

من أجل الألياف، يتعلّق التغيّرُ في طاقة الانفعال بتقوس الليف المنحنى v، المعتبر كعمود وفق طريقة تيموشينكو Timoshenko وغير Gere [3-31]

$$\Delta U_f = \frac{E_f l_f}{2} \int_0^L (v'')^2 \, dx \qquad (3.104)$$

ولكن $l_f = h^3/12$ من أجل ليفٍ سماكته h وعمقه واحد (لأن البعدَ العمودي على المستوي x-y في الشكل 3−55 هو لا متناهٍ في الكبر، وبذلك يمكن تجاهله). بتعويض قيمة متسلسلة الانحراف (بعد مفاضلتها)، يكون:

$$\Delta U_f = \frac{E_f h^3}{24} \int_0^L \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \left(\frac{m\pi}{L}\right)^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\frac{m\pi x}{L} \sin\frac{n\pi x}{L} dx dy \qquad (3.105)$$

باستبدال ترتيبَ إشارتَي التكامل والمجموع واستخدام نتيجةَ التعامد (orthogonality0 للمعادلة (3.102)، يكون:

$$\Delta U_f = \frac{\pi^4 E_f h^3}{48 L^3} \sum_n n^4 a_n^2 \qquad (3.106)$$

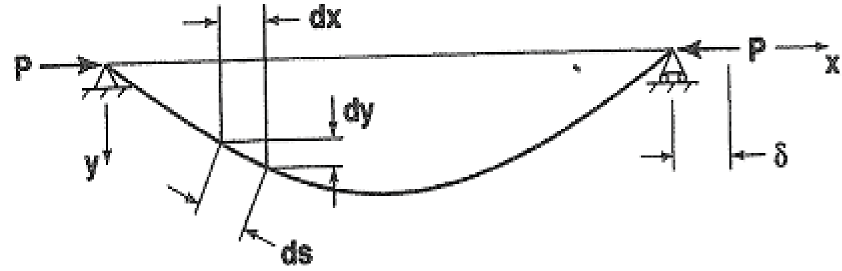
وأخيراً، يكون الشغل المُنجَز من قبل القوة الخارجية P خلال الانبعاج:

$$\Delta W = P\delta \qquad (3.107)$$

حيث δ المسافة التي تقطعها القوة P أثناء انبعاجِ ليفٍ ابتداءً من وضعه المستقيم الأصلي الموضَّح في الشكل 3-57. لاحظ أن العمودَ (الليف) لا يتغيّر طولُه أثناء عملية الانبعاج (لكنه يجب بالتأكيد أن يصغُر عندما تزداد قيمة P ابتداءً من الصفر ولغاية حمولة الانبعاج).

إن الحركةَ التفاضلية (المتناهية في الصغر) dδ للقوة P هي الفرق بين ds تفاضل طول قوس العمود، وdx ،تفاضل الطول في الاتجاه x. وهكذا يُستنتج من مثلّث المسافات العنصرية التفاضلية في الشكل 3-57 العلاقةَ:

$$\begin{aligned} d\delta &= ds - dx = \sqrt{dx^2 + dy^2} - dx = dx\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - dx \\ &= dx\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \cdots\right] \approx \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \end{aligned} \qquad (3.108)$$



الشكل 3-57: انفعال عمودٍ بسيط مدعم خلال الانبعاج

وبالتالي:

$$\delta = \frac{1}{2}\int_0^L \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \qquad (3.109)$$

بتعويض مشتق الانحراف العرضاني، v الموافق لـــ y من المعادلة (3.95) في عبارة الشغل (المعادلة 3.107)، يكون:

$$\Delta W = \frac{P}{2}\int_0^L \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_m a_n \frac{m\pi}{L}\frac{n\pi}{L}\cos\frac{m\pi x}{L}\cos\frac{n\pi x}{L} dx dy \qquad (3.110)$$

بمبادلة ترتيب التكامل مع المجموع واستعمال جيب التمام المشابه التجيبي لعلاقة التعامد الجيبية في المعادلة (3.102)، يكون:

$$\Delta W = \frac{P\pi^2}{4L}\sum_n n^2 a_n^2 \qquad (3.111)$$

حيث تكون حمولةُ الليف في واحدة العرض العمودي على مستوي الشكل 3−55 ،من أجل هذه المسألة ثنائية البعد، مساويةً لـــ:

$$P = \sigma_f h \qquad (3.112)$$

وهذا يعني أنها مساويةٌ لحاصل ضرب (الجداء) الإجهاد الأحادي المحور لليف بسماكته. بتعويض عبارات الطاقة السابقة في معيار الانبعاج (المعادلة 3.94)، تكون حمولةُ انبعاج الليف مساويةً لـــ:

$$P=\frac{\pi^2E_fh^3}{12L^2}\frac{\sum_n n^4a_n^2+\frac{24L^4E_m}{\pi^4ch^3E_f}\sum_n a_n^2}{\sum_n n^2a_n^2} \qquad (3.113)$$

لنفترض الآن أن P يبلغ قيمةً أصغريةً من أجل موجة جيبية معيّنة ما، ولنفترض أنها الموجة ذات المرتبة m، إذاً:

$$\sigma_{f_{cr}}=\frac{\pi^2E_fh^3}{12L^2}\left[m^2+\frac{24L^4E_m}{\pi^4ch^3E_f}\frac{1}{m^2}\right] \qquad (3.114)$$

حيث يعبّر m عن عدد أنصاف الموجة في شكل العمود المنبعج. تبيّن استقصاءاتُ المرونة الضوئية الآنفة الذكر [3−28] وبوضوح أن m هو عدد كبير جداً. وبذلك، يمكن معالجة $\sigma_{f_{cr}}$ كدالة مستمرة مستمراً لـــ m، ويتم الحصول على قيمته الأصغرية بواسطة شرط القيمة المستقرة:

$$\frac{\partial\sigma_{f_{cr}}}{\partial m}=0 \qquad (3.115)$$

شريطةَ تَحقُّق الشرطِ التالي الموافق لقيمةٍ أصغرية:

$$\left.\frac{\partial^2\sigma_{f_{cr}}}{\partial m^2}\right|_{\frac{\partial\sigma_{f_{cr}}}{\partial m}=0}>0 \qquad (3.116)$$

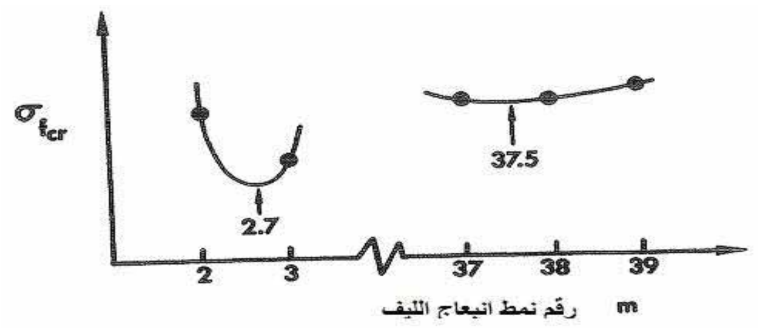
لو كانت m صغيرةً، وجبَ إيجاد القيمة الأصغرية لـــ $\sigma_{f_{cr}}$ من أجل قيم متقطّعة (صحيحة) لـــ m. يقدم التفكير التالي لدعم الجدال السابق. لنعتبرْ منحنياً بيانياً افتراضياً لـــ $\sigma_{f_{cr}}$ إزاء m حيث تأخذ $\sigma_{f_{cr}}$ قيماً فقط من أجل القيم الصحيحة لـــ m، كما في الشكل 3−58، بسبب وجوبِ وجودِ عددٍ صحيحٍ من أنصاف موجة الانبعاج من أجل تحقيقِ شروط نهاية العمود. إن حمولةَ الانبعاج الموافقةَ للقيمة الأصغرية الأقل المعيَّنة عند m = 2.7 غيرُ موجودةٍ فيزيائياً، وتنحرف قيمتُها بشكلٍ كبير عن القيمة الأصغرية الفيزيائية الموافقة لـــ m = 3، لأن رقمَ النمط يدخل بمربّعِه (number squared) في عبارة الانبعاج. مع ذلك، تُعتبر حمولةُ الانبعاج الموافقة للقيمة الأصغرية الثانية عند m = 37.5 – وبالرغم من عدم وجودها فيزيائياً– تقريباً جيّداً للقيمة الأصغرية الفعلية، لأن

النسبة المئوية للاختلاف في حمولة الانبعاج بين m = 37.5 وm = 37 أو m = 38 مهملة. تكون القيمة الأصغرية لـــ $\sigma_{f_{cr}}$ كدالة مستمرّ لـــ m:

$$\sigma_{f_{cr}} = 2\sqrt{\frac{V_f E_m E_f}{3(1-V_f)}} \qquad (3.117)$$

حيث يمكن التحقق من ذلك بسهولة (المسألة 4.5.3). لنقر أنه في الاشتقاق السابق:

$$V_f = \frac{h}{h+2c} \qquad (3.118)$$



الشكل 3–58: قيم أصغرية نسبية افتراضية لـــ $\sigma_{f_{cr}}$

يساوي إجهادُ الانبعاج في المادة المركّبة إذاً القيمةَ:

$$\sigma_{c_{max}} = V_f \sigma_{f_{cr}} = 2V_f \sqrt{\frac{V_f E_m E_f}{3(1-V_f)}} \qquad (3.119)$$

حيث يُفترض أن المصفوفة غيرَ خاضعةٍ – بشكل أساسيّ– للإجهاد في الاتجاه x مقارنةً بالألياف.

بدلاً من ذلك، يمكن حساب الانفعال في الاتجاه x عند الانبعاج من المعادلة (3.117) ومن علاقة الإجهاد– الانفعال أحادية المحور، فيكون:

$$\varepsilon_{f_{cr}} = 2\sqrt{\frac{V_f}{3(1-V_f)}}\sqrt{\frac{E_m}{E_f}} \qquad (3.120)$$

بافتراض أن المصفوفة تمتلك في اتجاه الليف نفس الانفعال لليف (التقريب الأساسي للانفعالات النسبية عند تعيين E_1 في الفقرة 1.2.3، وهو أمرٌ منطقي في حال عدم حدوث كسور) يكون:

$$\sigma_m = E_m \varepsilon_{f_{cr}} \qquad (3.121)$$

وبالتالي يكون الإجهاد الأعظمي للمادة المركّبة:

$$\sigma_{c_{\max}} = V_f \sigma_{f_{cr}} + V_m \sigma_m \qquad (3.122)$$

أو:

$$\sigma_{c_{\max}} = \left[V_f + (1-V)\frac{E_m}{E_f}\right]\sigma_{f_{cr}} \qquad (3.123)$$

وأخيراً:

$$\sigma_{c_{\max}} = 2\left[V_f + (1-V_f)\frac{E_m}{E_f}\right]\sqrt{\frac{V_f E_m E_f}{3(1-V_f)}} \qquad (3.124)$$

إن الاختلافَ بين المعادلتَين (3.119) و(3.124) طفيفٌ من أجل قيمٍ عاليةٍ لنسب E_f على E_m، كما هو حالُ المواد المركّبة العملية المقوّاة بالألياف.

نمط القصّ

من أجل نمط الانبعاج القص الشكل 3–55، تكون انزياحاتُ الليف متساويةً، وفي نفس الطور بالنسبة إلى بعضها البعض. تتعرّض المصفوفة بالتناوب إلى القصّ في اتجاه واحد ثم في الاتجاه الآخر وذلك على طول الاتجاه x. مع ذلك، يمكن إهمال التغيّرات في الانفعالات الموافقة للاتجاه y، وبالتالي يمكن افتراض كون انفعالات القص تابعةً لإحداثية اتجاه الليف فقط. تتعرّض المصفوفة للقصّ وفق:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \qquad (3.125)$$

حيث v الانزياح في الاتجاه y، و u الانزياح في الاتجاه x. بما أن الانزياحَ العرضاني مستقّلٌ عن الإحداثية العرضانية يكون:

$$\left.\frac{dv}{dx}\right|_{\text{مادة رابطة}} = \left.\frac{du}{dx}\right|_{\text{ليف}} \qquad (3.126)$$

بما أن انفعال القصّ النسبي مستقّل عن y ، يكون:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2c}\left[u(c) - u(-c)\right] \qquad (3.127)$$

حيث يمكن التحقّق من ذلك عبر تفحّص الشكل 3−59. بعد ذلك، بما أن تشوه القصّ للّيف تم تجاهله، يكون:

$$u(c) = \frac{h}{2c}\left.\frac{dv}{dx}\right|_{\text{ليف}} \qquad (3.128)$$

لكن، بتعويض المعادلة (3.128) في المعادلة (3.127):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{h}{2c}\left.\frac{dv}{dx}\right|_{\text{ليف}} \qquad (3.129)$$

لنعوّض الآن المعادلتَين (3.129) و(3.126) في المعادلة (3.125) للحصول على:

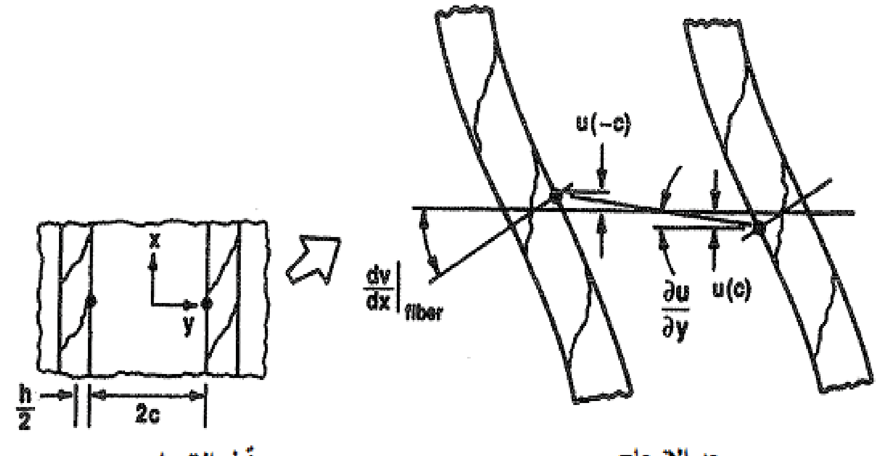
$$\gamma_{xy} = \left[1 + \frac{h}{2c}\right]\left.\frac{dv}{dx}\right|_{\text{ليف}} \qquad (3.130)$$

لنذكّرْ بعلاقة الإجهاد− الانفعال الأساسية:

$$\tau_{xy} = G_m \gamma_{xy} \qquad (3.131)$$

ينجم التغيّرَ في طاقة الانفعال للمصفوفة فقط عن القصّ:

$$\Delta U_m = \frac{1}{2}\int_V \tau_{xy}\gamma_{xy}\, dV \qquad (3.132)$$



الشكل 3-59: انفعالات الألياف خلال نمط انبعاج القصّ

لنعوض دالة الانحراف (المعادلة 3.59) وعبارة انفعال القصّ، (المعادلة 3.130)، وعلاقة الإجهاد- الانفعال، المعادلة 3.131 في المعادلة 3.132 للحصول على:

$$\Delta U_m = G_m c\left[1+\frac{h}{2c}\right]^2 \frac{\pi^2}{2L}\sum_n n^2 a_n^2 \qquad (3.133)$$

لا تزال عبارتا التغيّر في طاقة الانفعال لليف والشغل المبذول تُعطيان بالمعادلتَين (3.106) و(3.111)، وبالتالي بتطبيق معيار الانبعاج (المعادلة 3.94)، يكون:

$$\sigma_{f_{cr}} = \frac{G_m}{V_f\left(1-V_f\right)} + \frac{\pi^2 E_f}{12}\left(\frac{mh}{L}\right)^2 \qquad (3.134)$$

بما أن الطول الموجي للانبعاج مساوٍ لـــ L/m، فإن الحدّ الثاني في المعادلة (3.134) صغيرٌ عندما يكون الطول الموجي للانبعاج L كبيراً بالنسبة إلى القطر الليف h. وهكذا يكون إجهاد الانبعاج في الليف مساوياً تقريباً لـــ:

$$\sigma_{f_{cr}} = \frac{G_m}{V_f\left(1-V_f\right)} \qquad (3.135)$$

ويكون عندئذ الإجهاد الأعظمي للمصفوفة (أي المتانة):

$$\sigma_{f_{cr}} = \frac{G_m}{1-V_f} \quad (3.136)$$

ويكون الانفعال عند الانبعاج مساوياً لـــ:

$$\varepsilon_{cr} = \frac{1}{V_f\left(1-V_f\right)}\left[\frac{G_m}{E_f}\right] \quad (3.137)$$

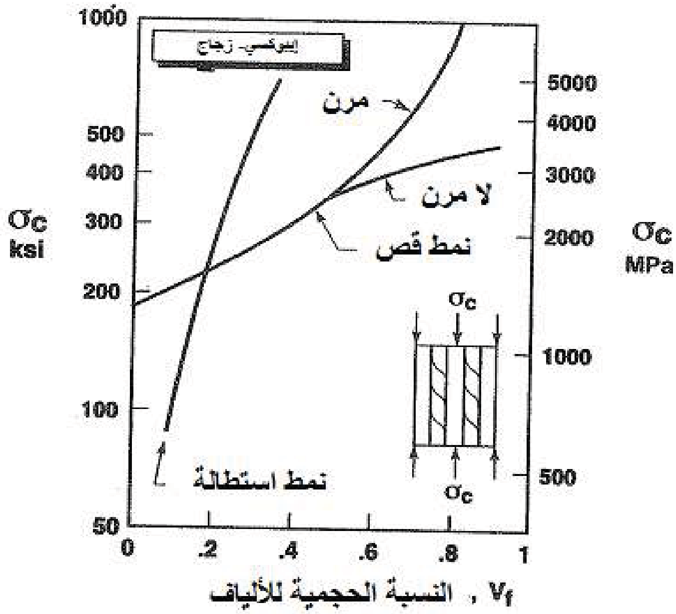
المتانة المتوقَّعة مقابل المقاسة

تمّ تمثيل، عبارتي الإجهاد الأعظمي بيانياً، (المعادلتان 3.119 و3.136) لمادة مركّبة إيبوكسي- زجاج، كما في الشكل 3-60. لاحظ أن نمط القصّ يوافق متانة أصغريةّ للمادة المركّبة وذلك من أجل مدى عريضٍ من قيمِ النسب الحجمية للألياف. مع ذلك، يتحّكم النمط العرضاني أو الاستطاليّ بمتانة المادة المركّبة من أجل قيمٍ منخفضة للنسبة الحجمية للألياف.

من أجل نسبٍ حجمية للألياف بين 0.6 و0.7، تكون متانة الضغط المتوقَّعة بين 450 ksi (3100 MPa) و600 ksi (4100 MPa). لم يتمّ الحصول على هذه القيم العالية في مواد الإيبوكسي- زجاج المركّبة. لو كانت قيمةُ متانة مثلِ هذه المادة المركّبة 500 ksi (3400 MPa) لزادت قيمة الانفعال بمقدار 5%، ولانفعلت المصفوفة بشكلٍ لدنٍ تحت هذه الشروط. وهكذا، يجب على قيم المتانة المتوقعة أن تكون أدنى من المنحنى الموسوم بعبارة "نمط القصّ المرن" كما في الشكل 3-60. وكتقريبٍ للسلوك اللامرن، استبدل دوو (Dow) وروزن (Rosen) [3-28] معاملَ قصّ المصفوفة في المعادلة (3.136) بمعاملِ قصٍّ يتغيّر بشكلٍ خطي ابتداءً من القيمة المرنة عند انفعال موافقٍ لـــ 1% إلى القيمة صفر عند انفعال موافقٍ لـــ 5%، كما في الشكل 3-61.

يُسمّى منحنى المتانة الناتج بـــ "نمط القصّ اللامرن" في الشكل 3-60. تبدو قيمُ متانة الضغط المتوقعة واقعيةً أكثر من أجل المواد المركّبة إيبوكسي- زجاج، ولكنها ما تزال ليست منخفضة مثل القيم الفعلية. ويجب ألاّ يعتبر مفاجئاً كونُ هذه القيم المتوقعة

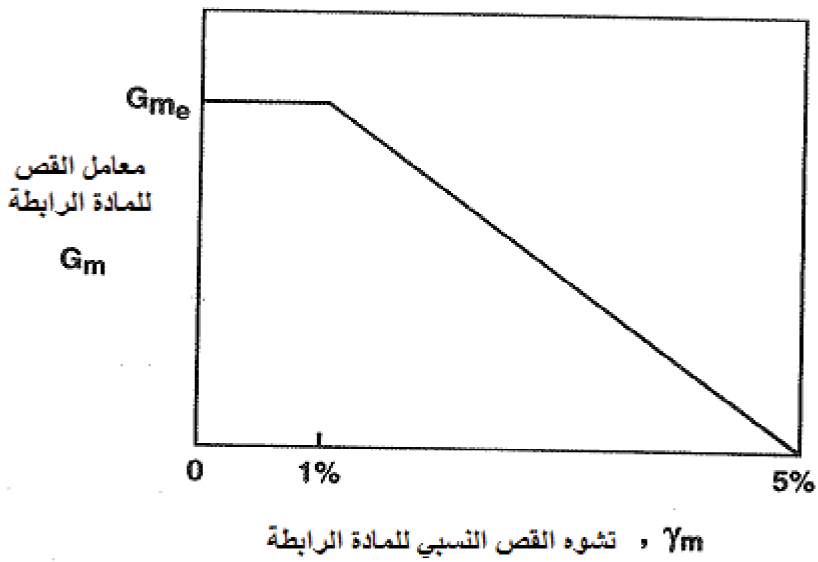
عاليةً جداً بسبب حقيقة كونِ التحليلِ النظريّ للمسألة ثنائيَّ البعد فقط، بدلاً من مسألةَ انبعاج الليف الحقيقيةَ ثلاثية البعد.



الشكل 3-60: متانة الضغط للمواد المركّبة إيبوكسي- زجاج (عن دوو (Dow) وروزن (Rosen) [3-28])

تمّ، كما في الشكل 3-62 تمثيل نتائجَ دوو وروزن، بيانياً، بشكلٍ آخر موافقٍ لقيم الانفعال للمادة المركّبة عند الانبعاج بدلالة النسبة الحجمية للألياف. تمثّل هذه النتائج توقعات المعادلة (3.137) من أجل قيمتَين اثنتَين لنسبة معامِل يونغ لليف إلى معامِل القصّ للمصفوفة (E_f/G_m) عند قيمةٍ لنسبة بواسون في المصفوفة مساوية لــ 0.25. وكما في حالة الشكل السابق لنتائج دوو وروزن، يتحكّم نمط القصّ بسلوك المادة المركّبة من أجل مجالٍ واسعٍ لقيمِ النسبة الحجمية للألياف. علاوة على ذلك، لاحظْ أن تغيّراً بمقدارِ عامل ضرب مساوٍ لــ 2 في النسبة E_f/G_m يسبّب تغيّراً بمقدارِ عامل ضرب

مساوٍ لـــ 2 في القيمة الأعظمية لانفعال الضغط النسبي للمادة المركّبة. وهكذا، يبدو جلياً أهمية تخفيضِ قيمة معامِل القصّ في المصفوفة الناجم عن التشوه اللامرن.



الشكل 3-61: تغيّر معامل القصّ للمصفوفة مع انفعال القصّ النسبيّ (عن دوو (Dow) وروزن (Rosen) [3-28])

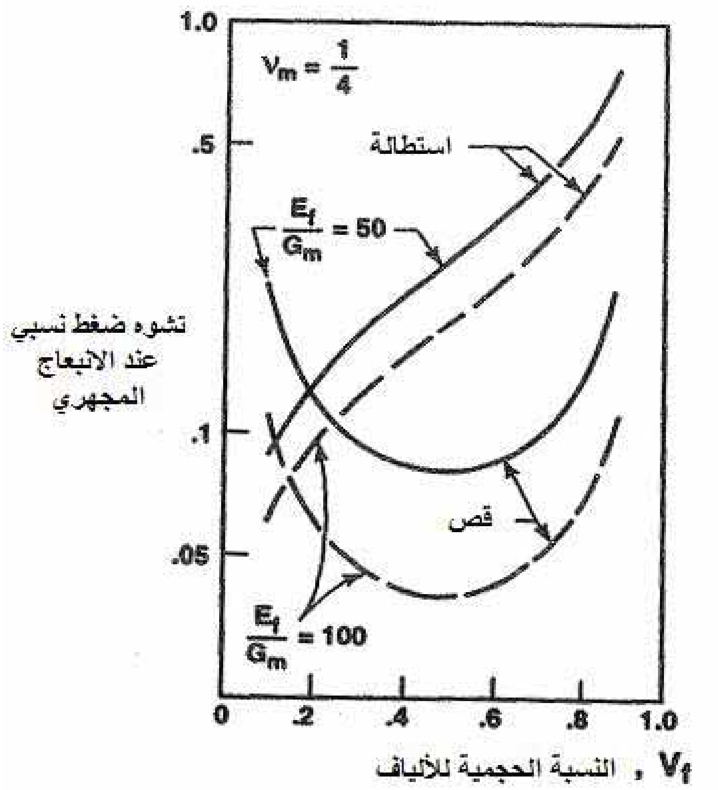
اختبر شويرك (Schuerch) الموادَ المركّبة المؤلّفةَ من مصفوفة معدنية وألياف من البورون بشكلٍ بارامتري وقارنها بمعادلات روزن، فوجد أن ذلك يحتاج إلى تحليل نمط الانبعاج اللدن [3-32]. علاوة على ذلك، وجد شويرك الظاهرةَ نفسها من أجل المواد المركّبة إيبوكسي- زجاج S، بينما بدا له أن المواد المركّبة إيبوكسي- بورون تنبعج بشكلٍ مرن. درس غريتشوك (Greszczuk) نمط القصّ للانبعاج الميكروي، وبيّن أنه طالما ازدادت قيمة معامِل القصّ للمصفوفة فإن نمط الإخفاق يتغيّر من انبعاج الألياف الميكروي إلى إخفاق ضغط إجماليٍّ لها [3-30].

قارن لاغر (Lager) وجون (June) التوقعات النظرية لـــدوو وروزن بالنتائج التجريبية من أجل مواد مركّبة إيبوكسي- بورون تحتوي على نوعَين مختلفَين من

المصفوفة [3−33]. يبدو أن عامَل ترابط النظرية بالبيانات جيّد، إذا ما ضُرب معامَل المصفوفة في المعادلتَين (3.119) و(3.136) بـــ 0.63، أي:

$$\left(\sigma_{c_{\max}}\right)_{\text{استطالة}} = 2V_f\sqrt{\frac{V_f\left(0.63E_m\right)E_f}{3\left(1-V_f\right)}} \tag{3.138}$$

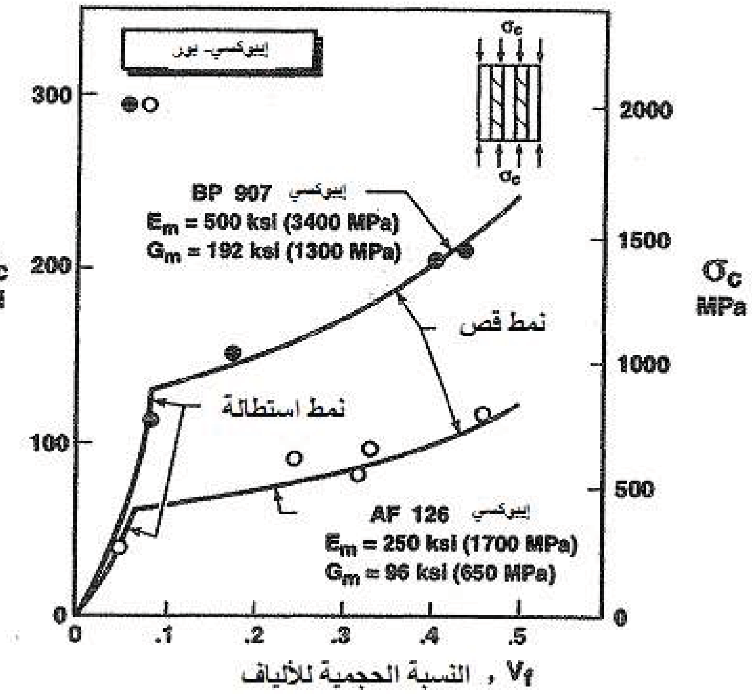
$$\left(\sigma_{c_{\max}}\right)_{\text{قص}} = \frac{0.63G_m}{1-V_f} \tag{3.139}$$



الشكل 3−62: انفعال الضغط النسبي عند الانبعاج الميكروي من أجل مواد مركّبة مقوّاة بالألياف (عن دوو Dow وروزن Rosen [3−28])

تمّ توضع الألياف ضمن شبكة قريبةٍ جداً من الشكل المربّع المثالي حيث يمكن التحقّق من ذلك عبر تفحّص الصور المُكبَّرة لمقاطع عرضية محضرة بالتشغيل، ويبيّن الشكل 3-63 النتائج النظرية للمعادلتَين (3.138) و(3.139) بالإضافة إلى البيانات

التجريبية. لاحظ أن القيمةَ المستخدَمة للمعامِل الابتدائي (المرن) قد تمّ إنقاصها بمقدار 63%. إن معامِل "التأثير" 0.63 هذا ناجمٌ، على ما يبدو، عن كون المصفوفة لا تصبح لدنةً بالدرجة نفسها في جميع الاتجاهات. (يعني ذلك أن لاغر وجون يخالفان رأيَ شويرك عن انبعاج المادة المركّبة إيبوكسي– بورون بشكلٍ مرن). يُعتقد بأن معامِل التأثير دالة تعتمد بشدة على معامِل المصفوفة؛ فإذا أضفنا، على سبيل المثال، قماشاً مُقوّياً ،كأن يكون قماشاً مصنوعاً من ألياف زجاجية، إلى المصفوفة، ازدادت قيمة معامِل التأثير إلى 0.97.



الشكل 3–63: متانة الضغط لمواد مركّبة إيبوكسي– بورون (عن لاغر (Lager) وجون (June) [3–33])

استخدم تجانغ (Zhang) ولاتور (Latour) [3–34] نموذجاً لميكانيك المواد أكثر غنىً من نموذج روزن، وذلك من أجل إثبات وجوبِ تطابق نمط القصّ مع نمط الاستطالة في الانبعاج الميكروي عند نسبةٍ حجمية للألياف معدومة، بخلاف نتائج روزن

التي تتباعد عندما تقترب V_f من الصفر في الشكل 3-60. تُملي قلة الألياف عند القيم المنخفضة لـــ V_f عدمَ قدرتها على التفاعل فيما بينها خلال الانبعاج، وبذلك لا يمكن وجودُ اختلافٍ عند حمولة الانبعاج بين نمط القصّ ونمط الاستطالة. علاوة على ذلك، يفسّر تجانغ ولاتور النتائجَ النظرية عند القيم العالية لـــ V_f بأنها موافقة لأطوال موجية انبعاج كبيرة، بينما من الواضح أن النتائج التجريبية توافقف أطوالَ موجية انبعاج قصيرة. يصف كذلك هذان الباحثان عوامِلَ أخرى يمكن أن تؤدّي إلى انبعاج ليف ذي أطوال موجية قصيرة.

مجموعة المسائل 5.3

1.5.3 اشتق المعادلة (3.86)

2.5.3 اشتق المعادلة (3.89)

3.5.3 اشتق المعادلة (3.113)

4.5.3 اشتق المعادلة (3.117)، وتحقّق أنها توافق نهاية أصغرية

5.5.3 اشتق المعادلة (3.133)

6.5.3 اشتق المعادلة (3.134)

6.3 ملاحظات تلخيصية عن الميكانيك الميكروي

تُعتبر مقاربات الميكانيك الميكروي التي عُرضت في هذا الكتاب محاولةً للـــتوقع بالخصائص الميكانيكية للمادة المركّبة استناداً إلى الخصائص الميكانيكية لمكوّناتها الماديّة. يوجد في حوالى جميع المواد المركّبة المقوّاة بالألياف اختلافٌ كبير بين الواقع والتوقُّعات. وهكذا، يجب أن نسأل أنفسنا السؤال التالي: ما هي فائدة التحليل الميكانيكي الميكروي عدا عن إكسابنا نوعاً من الشعور عن سبب سلوك المواد المركّبة السلوكَ الذي لها؟ بشكلٍ أساسي، هناك إجابتان عن هذا السؤال: تتعلّق الأولى بتصميم المادة، بينما تتعلّق الثانية بتصميم البنية.

أولاً، إذا كنّا نقوم بتصميم مادة مركّبة لتحقيق خصائص معيّنة فإنه علينا امتلاك منطقٍ تصميمي لا يمكن أن يكون إلاّ ميكانيكياً مجهرياً. من الواضح ،مع ذلك، أنه لا بدّ من اعتماد بعض عمليات الضبط (وغالباً ما تكون تجريبيّة) على الحجج المنطقية بهدف الحصول على توافقٍ بين الخصائص المتوقعة والخصائص الفعلية من أجل خصائص معيّنة ونسبٍ حجمية معيّنة للمكوِّنات. يعني ذلك أنه لابد من إجراء أمرٍ ما لتعويض نقاط الضعف الكميّة لنظريات الميكانيك الميكروي المستعملة في تصميم موادّ ذات خصائص معيّنة. تنجم الخصائص الفعلية للمواد المركّبة عن متحوّلاتٍ متعلّقةٍ بالعمليات التصنيعية التي يصعب على الغالب تقييمها، ولو وصفياً، مثل:

- معالجة حرارية (شيّ) غير منتظمة
- تضرر الليف
- إجهادات متبقّية
- تنضيد اعتباطي للألياف
- فجوات
- ألياف متجاورة
- تشققات وتصدّعات
- ألياف مصطفة بشكلٍ خاطئ

وهكذا، يبدو أنه لا مفرّ من أن تبقى توقعات الميكانيك الميكروي للخصائص دوماً غيرَ دقيقة.

ثانياً، إذا كنّا نقوم بتصميم بنيةٍ مؤلّفة من مواد مركّبة، فإنه من الممكن مثالياً أن نرغب بامتلاك الحريّة في تصميم مادةِ البنية بالإضافة إلى البنية نفسها. في مثل هذا الوضع، سوف نحتاج إلى الميكانيك الميكروي ضمن المعنى الموافق للإجابة الأولى (تصميم المادة)، ولكن من الممكن جداً أن نكون مجبَرين على معيَرة المادةِ (استعمال شريطٍ معيّن من الإيبوكسي–غرافيت) وأن ينحصرَ تركيزنا في كيفية استعمال هذه المادة المعياريّة لتحقيق أفضل الفوائد. بشكلٍ خاص، ما يشكّل القوةَ الدافعة لمجهوداتنا هو معرفةُ كيفيةِ توجيهِ رقاقاتٍ ذات خصائص معروفة (مُقاسة وليست متوقَّعة) من أجل تحقيق أهداف التصميم. وهكذا، تكمنُ الإجابةُ الثانية الممكنة عن السؤال عن فائدة الميكانيك الميكروي في أنه لا حاجةَ في كثير من الحالات فعلياً للميكانيك الميكروي.

يعني ذلك أن المصمِّم الإنشائي سوف يعتمد على الأرجح – حصرياً– على نتائج الاختبارات الميكانيكية لبيانات خصائص مادته، فهو لا يستطيع المخاطرة باستعمال توقعات الميكانيك الميكروي غير المُثبتة، التي كثيراً ما تكون خاطئةٍ بشكلٍ كبير.

يجب على القارئ أن يتعرّض لكلتا مقاربتَي الميكانيك ،الماكروية والميكروية، من أجل لعب دورٍ فعّال سواء في تصميم المواد أم في تصميم البنية. تنسجم القوةُ الدافعة والرئيسية لهذا الكتاب مع متطلّبات التصميم الإنشائي. وهكذا، تكمن الفائدة من معالجتنا للميكانيك الميكروي في محاولةِ فهمٍ أعمق لكيفية سلوك المواد المركّبة وأسبابه.

المراجع

3-1 Stephen W. Tsai, *Structural Behavior of Composite Materials*, NASA CR-71, July 1964.

3-2 J. C. Ekvall, "Structural Behavior of Monofilament Composites." Paper presented at: Proceedings of the AIAA 6th Structures and Materials Conference, Palm Springs- Callfomia, 5-7 April 1965. AIAA, New York, April 1965.

3-3 J. C. Ekvall, Elastic Properities of Orthotropic Monofilament laminates. ASME Paper 61-AV-56, Aviation Conference, Los Angeles, California, 12-16 March 1961.

3-4 B. Paul, Prediction of Elastic Constants of Multiphase Materials, Transactions of the Metallurgical Society of AIME, February 1960, pp. 36-41.

3-5 C. C. Chamis and G. P. Sendeckyj, "Critique on Theories Predicting Thermoelastic Properties of Fibrous Composites." *Journal of Composite Materials*: July 1958, pp. 332-358.

3-6 Zvi Hashin, "The Elastic Moduli of Heterogeneous Materials." *Journal of Applied Mechanics*: March 1962, pp. 143-150.

3-7 Zvi Hashin and S. Shtrikman, "A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*: March-April 1963, pp. 121-140.

3-8 Zvi Hashin and B. Walter Rosen, "The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials." *Journal of Applied Mechanics:* June 1964 pp. 223-232, and "Errata." March 1965, p.219.

3-9 N. I. Muskhelishvili, *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*. Groningen, The Netherlands: P. Noordhoff, 1953.

3-10 L. R. Herrmann and K. S. Pister, "Composlte Properties of Filament-Resin Systems." ASME Paper 63-WA-239. ASME Winter Annual Meeting, Philadelphia, Pennsylvania, 17-22 November 1963.

3-11 Donald F. Adams and Stephen W. Tsai, "The Influence of Random Filament Packing on the Elastic Properties of Composite Materials." *Journal of Composite Materials*: July 1969, pp. 368-381.

3-12 J. M. Whitney and M. B. Riley, "Elastic Properties of Fiber Reinforced Composite Materials." *AIAA Journal*: September 1966. Pp. 1537-1642.

3-13 R. Hill, "Theory of Mechanical Properties of Fibre-Strengthened Materials – III: Self-Consistent Model." *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*: August 1965, pp, 189-198.

3-14 J. J. Hermans. "The Elastic Properties of Fiber Reinforced Materials when the Fibers are Aligned." Paper presented at: *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen*, Amsterdam, Series B, Volume 70, Number 1, 1967, pp. 1-9.

3-15 J. M. Whitney, "Elastic Moduli of Unidirectional Composites with Anisotropic Filaments." *Journal of Composite Materials:* April 1967, pp. 188-193.

3-16 James M. Whitney, "Geometrical Effects of Filament Twist on the Modulus and Strength of Graphite Fiber-Reinforced Composites." *Textile Research Journal*: September 1966, pp. 765-770.

3-17 J. C. Halpin and S. W. Tsai, *Effects of Environmental Factors on Composite Materials*. AFML-TR-67-423, June 1969.

3-18 J. C. Halpin and R. L. Thomas, "Ribbon Reinforcement of Composites." *Journal of Composite Materials*: October 1968, pp. 488-497.

3-19 D. F. Adams and D. R. Doner. "Transverse Normal Loading of a Unidirectional Composite." *Journal of Composite Materials*: April 1967, pp. 152-164.

3-20 D.F. Adams and D. R. Doner. "Longitudinal Shear Loading of a Unidirectional Composite." *Journal of Composite Materials*: January 1967, pp. 4-17.

3-21 R. L. Foye, "An Evaluation of Various Engineering Estimates of the Transverse Properties of Unidirectional Composites." Paper presented at: Proceedings of the 10th National Symposium of the Society of Aerospace Materials and Process Engineers, San Diego, California, 9- 11 November 1966. pp, G-31-42.

3-22 R. L. Foye, *Structural Composites,* Quarterly Progress Report Numbers 1 and 2, AFML Contract Number AF 33(615)-5150. 1966.

3-23 R. L Hewitt and M. C. de Malherbe, "An Approximation for the Longitudinal Shear Modulus of Continuous Fibre Composites." *Journal of Composite Materials*: April 1970, pp. 280-282.

3-24 C. Nishlmatsu and J. Gurland, *Experimental Survey of the Deformation of a Hard-Ductile Two-Phase Alloy System, WC-Co*, Brown University Division of Engineering Technical Report Number 2, September 1958.

3-25 R. Kieffer and P. Schwartzkopf, *Hartstoffe und Hartrnetalle.* Vienna: Springer, 1953.

3-26 A. Kelly and G. J. Davies, "The Principles of the Fibre Reinforcement of Metals." *Metallurgical Reviews*: vol. 10, no. 37, 1965, pp. 1-77.

3-27 B. Walter Rosen, "Tensile Failure of Fibrous Composites." *AIAA Journal*: November 1964, pp. 1985-1991.

3-28 Norris F. Dow and B. Walter Rosen, *Evaluations of Filament-Reinforced Composites for Aerospace Structural Applications*, NASA CR-207, April 1965.

3-29 B. Walter Rosen, Norris F. Dow, and Zvi Hashin, *Mechanical Properties of Fibrous Composites*, NASA CR-31, April 1964.

3-30 L. B. Greszczuk, "Microbuckling Failure of Circular Fiber-Reinforced Composites." *AIAA Journal*: October 1975, pp. 1311-1318.

3-31 S. P. Timoshenko and J. M. Gere, *Theory of Elastic Stability*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1961.

3-32 H. Schuerch, *Compressive Strength of Boron-Metal Composites*, NASA CR-202, April 1965.

3-33 John R. Lager and Reid R. June, "Compressive Strength of Boron-Epoxy Composmites." *Journal of Composite Materials*: January 1969, pp. 48-56.

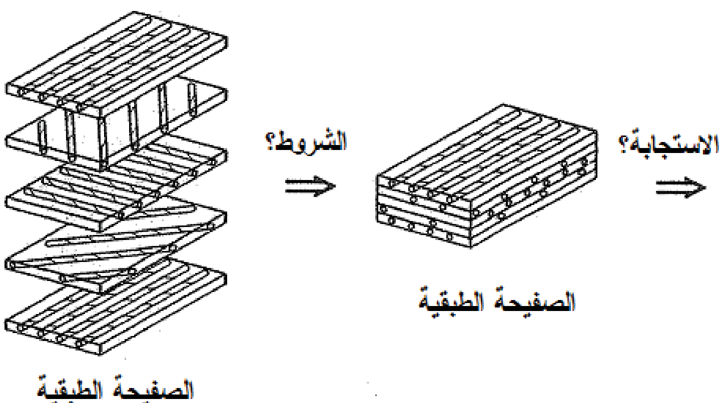
3-34 Guigen Zhang and Robert A. Latour (Jr.), "An Analytical and Numerical Study of Fiber Microbuckling." *Composites Science and Technology:* vol. 51, no. 1, 1994, pp. 95-109.

الفصل الرابع

السلوك الميكانيكي العام لصفيحة طبقية

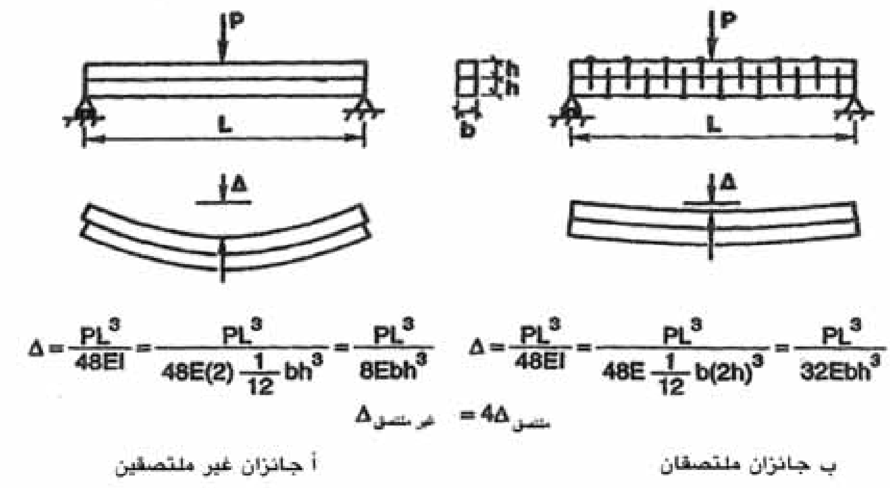
1.4 مقدمة

تتألف الصفيحة الطبقية من رقاقتين أو أكثر ملتصقتين معاً لتشكيل عنصر إنشائي متكامل (الشكل 4-1). ويرتبط تحليل الصفيحة الطبقية بسؤالين أساسيين: (1) ما هي الشروط التي يجب أن تحققها الرقاقات كي تصبح صفيحة طبقية؟ و(2) كيف تستجيب صفيحة طبقية للتحميل أي للقوى والعزوم المطبقة؟ يتم توجيه الرقاقات حيث تشكل الاتجاهات الرئيسية (الموضعية) للمادة زوايا مختلفة بالنسبة إلى المحاور الإجمالية للصفيحة الطبقية للحصول على عنصر إنشائي قادر على متانة الحمل في اتجاهات متعددة. يتم الحصول على معاملات الجساءة والمتانات لمثل هذا التشكيل الإنشائي لمادة مركبة من خصائص الرقاقات المكونة وفق إجرائيات تشتق في هذا الفصل. وتسمح هذه الاجرائيات بتحليل الصفائح الطبقية التي تمتلك رقاقات افرادية تشكل اتجاهات مادتها الرئيسية زوايا اعتباطية بالنسبة إلى المحاور الطبيعية المختارة للصفيحة الطبقية. ونتيجة التوجيهات الكيفية للرقاقات، يمكن أن لا تمتلك الصفيحة الطبقية اتجاهات رئيسية محددة.



الشكل 4-1: الأسئلة الأساسية في تحليل الصفيحة الطبقية

يكمن سبب تجميع الرقاقات للحصول على صفيحة طبقية في تحقيق أكبر جساءة انحناء للمواد المستعملة. تذكر مسألة "العارضتين المزدوجتين" من أساسيات ميكانيك المواد. اعتبر أولاً العارضتين غير ملتصقتين أو مثبتتين معاً ومحمّلتين في منتصف المسافة بين نقطتي استنادهما بواسطة قوة مركزة، كما في الشكل 4–2 أ. بالمقابل، يمكن تثبيت العارضتين معاً بواسطة مسامير وبراغي أو بالإقران، كما في الشكل 4–2 ب. يكون الانحناء في حالة العارضتين الملتصقتين أقل بمعامل أربعة منه في حالة العارضتين غير الملتصقتين. بهذا، يؤدي ترابط الرقاقات معاً، لا محالة، إلى زيادة كبيرة في متانة الانحناء.

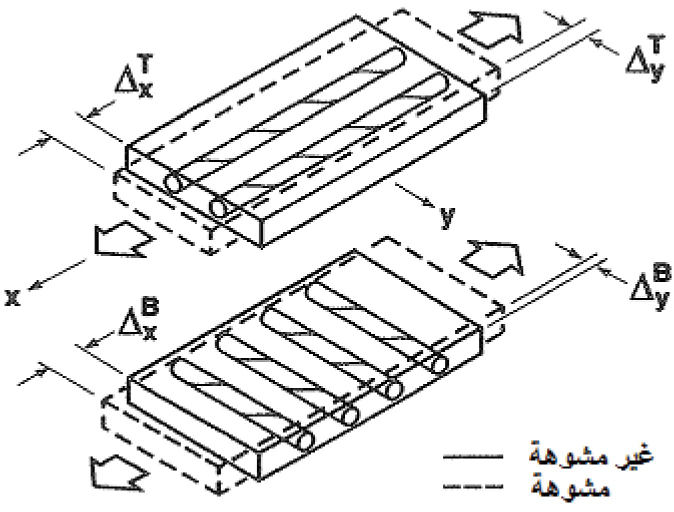


الشكل 4–2: مبرر التصفيح: مسألة العارضتين

من حيث المبدأ، يمكن شرح التحليل الأساسي للصفيحة الطبقية باستعمال صفيحة طبقية بسيطة ذات طبقتين متصالبتين (طبقة ذات ألياف تشكل زاوية $0°$ بالنسبة إلى الاتجاه x فوق طبقة مساوية في السماكة ذات ألياف تشكل $90°$ بالنسبة إلى الاتجاه x. سنقوم بتحليل هذه الصفيحة الطبقية تقريباً باعتبار الشروط التي ينبغي أن تحققها الطبقتان غير الملتصقتان في الشكل 4–3 من أجل ترابطهما لتشكيل الصفيحة الطبقية. تخيل أن الطبقات منفصلة، لكنها تتعرض لحملٍ N_x في الاتجاه x. تنقسم القوة N_x بين الطبقتين بحيث يكون الانفعال وفق الاتجاه x متماثل في كل طبقة. هذا يعني أن الرقاقات في الصفيحة الطبقية تنفعل بشكلٍ متشابه عند السطح البيني بين الطبقات وإلا فإن الكسر يجب أن يحصل. بناءً على ذلك، يعتبر توافق انفعال الطبقات شرطاً للصفيحة الطبقية. وبسبب تساوي الانفعال لكل

رقاقة وفق الاتجاه x، تمتلك الطبقة العليا (ذات الزاوية °90) معظم الإجهاد لأنها أكثر جساءة من الطبقة السفلية (ذات الزاوية °0) وفق الاتجاه x. ويمكن بيان أن الإجهادات وفق الاتجاه x في الطبقتين العلوية والسفلية تُعطى بالعلاقة:

$$\sigma_x^T = \frac{E_1}{E_2}\sigma_x^B \qquad (4.1)$$



الشكل 4-3: تحليل صفيحة طبقية من طبقتين

اعتبر الآن الانزياحات الجانبية (وفق الاتجاه y) لكلٍ من الطبقتين كما في الشكل 4-3. في غياب ترابط الرقاقتين، وباستعمال علاقات الإجهاد- انفعال، وعلاقة الانفعال مع الانزياح، يمكن بيان أن الانزياحات الجانبية تعطى بالعلاقة:

$$\Delta_y^T = \frac{E_1}{E_2}\Delta_y^B \qquad (4.2)$$

على الرغم من أننا تطلّبنا تساوي الانزياحات وفق الاتجاه x في الطبقتين (تم ضبط نسبة N_x في كل طبقة لإيجاد شرط تساوي الانزياح هذا)، فإن الانزياحات الجانبية مختلفة تماماً. وتعتبر الانزياحات المختلفة خرقاً للتوافق المطلوب لانفعال الرقاقات في الصفيحة الطبقية. ولمعالجة هذا الخرق، ينبغي أن تصبح الطبقة العلوية أكبر عرضاً عبر تطبيق

إجهاد شد جانبي σ_y ، وأن تصبح الطبقة السفلية أضيق عبر تطبيق إجهاد ضغط σ_y^B، وينبغي أن يؤدي الانفعالان إلى تساوي عرض الرقاقات لتحقيق توافق الانفعال. علاوة على ذلك، ينبغي أن تحقق الإجهادات الجانبية في كل طبقة توازن القوة في الاتجاه y، أي:

$$\sigma_y^T Lt + \sigma_y^B Lt = 0 \qquad (4.3)$$

حيث يمثل L الطول و t سماكة الرقاقة. لهذا، ينبغي أن تتوازن القوى الموافقة للإجهادات الجانبية σ_y^T و σ_y^B – وأن تكون في هذه الحالة متساوية ومتعاكسة– وذلك لأنه ليس هناك حملٌ N_y مطبق وفق الاتجاه y.

بعد ذلك، لاحظ أن انزياحات كل طبقة وفق الاتجاه x تتأثر بالإجهادات الجانبية σ_y^T و σ_y^B، من هنا، لم تعد Δ_x^T و Δ_x^B متساوية بعد. وبناءً على ذلك، يجب تعديل الإجهادات σ_x^T و σ_x^B وفق الاتجاه x من أجل إعادة فرض توافق انفعال الطبقتين وفق الاتجاه x.

يبدو أن هذا الفرض خطوة – خطوة لشروط:

- توافق الانفعال
- علاقات الإجهاد– انفعال
- التوازن

يبدو أن النتائج تؤدي إلى تعاقبٍ لا ينتهي من تعديلات الإجهادات في الاتجاهين x وy حتى تتحقق كافة الشروط بشكلٍ متزامن. لقد كشفت مقاربة تحليل الصفيحة الطبقية السمة الجوهرية والمبادئ المستعملة في تحليل الصفيحة الطبقية. يعتبر مثال الصفيحة الطبقية ثنائية الطبقة قابلاً للفهم، لكن، تبدو هذه الطريقة عديمة الأمل في حالة الصفيحة الطبقية متعددة الطبقات، وخاصة عند اعتبار رقاقات ذات زاوية اعتباطية بالنسبة إلى الاتجاه x للصفيحة الطبقية. لهذا، نعتمد مقاربة مختلفة للتحقيق المتزامن لجميع الشروط المطلوبة، أي نظرية التصفيح التقليدية. علاوة على ذلك، سنكتشف أن هذه الصفيحة الطبقية "البسيطة" ثنائية الطبقات متصالبة الطية تتمتع بخاصة هامة يمكن أن تدهشنا.

يتم اشتقاق نظرية التصفيح التقليدية في الفقرة 2.4. وبعد ذلك، يتم تصنيف وفحص معاملات جساءة خاصة ذات أهمية عملية في الفقرة 3.4. فيما بعد، يتم مقارنة معاملات

الجساءة النظرية الناتجة من نظرية التصفيح التقليدية مع النتائج التجريبية في الفقرة 4.4. وفي الفقرة 5.4، يتم التوقع بمتانات صفائح طبقية مختلفة. أخيراً، يتم فحص الإجهادات بين رقاقات صفيحة طبقية في الفقرة 6.4 والتوصل إلى أنها سبب محتمل لفصل الطبقات في بعض الصفائح الطبقية.

مجموعة المسائل 1.4

1.1.4 استعمل علاقات الإجهاد- انفعال والمعادلة (2.61) وتعريف الانفعال = εL من أجل إيجاد الإجهادات والانفعالات في المعادلات (4.1) و (4.2).

2.1.4 هل أغفلنا أي ظاهرة سلوك في مناقشة المعادلتين (4.1) و (4.2)؟ في حال الإيجاب، ما هي؟ صف آثارها في النتائج التي توصلنا إليها.

2.4 نظرية التصفيح التقليدية

تنطوي نظرية التصفيح التقليدية على مجموعة من فرضيات الإجهاد والانفعال من نمط ميكانيك المواد التي يتم وصفها في هذا الفقرة. وباستعمال هذه النظرية، يمكننا الانتقال مباشرة وبانسجام من عنصر البناء الأساسي، الرقاقة، إلى النتيجة النهائية، الصفيحة الطبقية الإنشائية. وتكمن الإجرائية الشاملة في إيجاد فرضيات تبسيطية وفعالة ومنطقية ودقيقة تمكنّنا من تقليص اهتمامنا من مسألة المرونة ثلاثية الأبعاد المعقدة إلى مسألة ميكانيك الأجسام القابلة للانفعال ثنائية الأبعاد والقابلة للحل.

والآن، نظراً إلى أن فرضيات الإجهاد والانفعال تشكل جزءاً لا يتجزأ من نظرية التصفيح التقليدية، فإن الاسم الأكثر صحةً يمكن أن يكون نظرية التصفيح الرقيق التقليدية أو حتى نظرية الصفيحة متعددة الطبقات التقليدية. سنستعمل تعبير نظرية التصفيح التقليدية الشائع ونعترف أنه فرطٌ في التبسيط مناسب للتسمية الدقيقة. وتُختصر غالباً نظرية التصفيح التقليدية في أدبيات المواد المركبة إلى classical lamination theory – CLT).

يتم أولاً في الفقرة 1.2.4 مراجعة سلوك الإجهاد- انفعال لرقاقة منفردة والتعبير عنه على شكل معادلة للرقاقة رقم k في صفيحة طبقية. وبعد ذلك، يتم في الفقرة 2.2.4 تحديد تغيرات الإجهاد والانفعال عبر سماكة الصفيحة الطبقية. أخيراً، يتم في الفقرة 3.2.4 إيجاد العلاقة بين قوى وعزوم الصفيحة الطبقية والانفعالات والتقوسات حيث تشكل

معاملات جساءة الصفيحة الطبقية الصلة من القوى والعزوم إلى الانفعالات والتقوسات. وتعتبر الاشتقاقات في هذا الفقرة مشابهةً تماماً للعمل التقليدي من قبل بيستر ودونغ [4−1] وريسنر وستافسكي [4−2].

1.2.4 سلوك الإجهاد− انفعال للرقاقة

تعطى علاقات الإجهاد− انفعال في إحداثيات المادة الرئيسية لرقاقة مادة ثلاثية المناحي تحت إجهادٍ مستوٍ على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

تعرّف معاملات الجساءة المختزلة، Q_{ij} بدلالة الثوابت الهندسية في المعادلة (2.66). وفي أي نظام إحداثيات أخرى في مستوي الرقاقة، تكون الإجهادات:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

حيث تعطى معاملات الجساءة المختزلة والمحولة $\overline{Q}_{ij}$ بدلالة معاملات الجساءة المختزلة Q_{ij} في المعادلة (2.85).

تفيد علاقات الإجهاد− انفعال في إحداثيات اعتباطية في المستوي، أي المعادلة (4.5)، في تعريف معاملات جساءة الصفيحة الطبقية، وذلك بسبب التوجيه الاعتباطي للرقاقات المكوّنة. ويمكن اعتبار كلٍّ من المعادلتين (4.4) و (4.5) كعلاقات إجهاد− انفعال للطبقة رقم k للصفيحة الطبقية متعددة الطبقات. من هنا، يمكن كتابة المعادلة (4.5):

$$\{\sigma\}_k = [\overline{Q}]_k \{\varepsilon\}_k \tag{4.6}$$

سنعمل في الفقرة التالي على تعريف تغيرات الانفعال والإجهاد عبر سماكة الصفيحة الطبقية. وسيتم عندئذ الحصول على محصلة القوى والعزوم على الصفيحة الطبقية في الفقرة 3.2.4 بواسطة تكامل علاقات الإجهاد− انفعال لكل طبقة، المعادلة (4.6)، عبر سماكة الصفيحة الطبقية المعرضة لتغيرات الإجهاد والانفعال المحددة في الفقرة 2.2.4.

2.2.4 تغير الانفعال والإجهاد في صفيحة طبقية

تعتبر معرفة تغير الإجهاد والانفعال عبر سماكة الصفيحة الطبقية جوهرية من أجل تعريف معاملات جساءة الاستطالة والانحناء للصفيحة الطبقية. تعتبر الصفيحة الطبقية مكونةً من رقاقات مترابطة بشكلٍ مثالي[1]. علاوة على ذلك، تعتبر الروابط رقيقةً بشكلٍ متناه في الصغر وغير قابلة للانفعال بالقص أيضاً. هذا يعني أن الانزياحات هي مستمرة عبر حدود الرقاقة بحيث لا يحصل انزلاق رقاقة بالنسبة إلى الأخرى. وهكذا، يكون سلوك الصفيحة الطبقية كما لو كانت طبقة واحدة ذات خصائص خاصة، التي سوف نرى فيما بعد أنها تشكل عنصراً إنشائياً.

بناءً على ذلك، إذا كانت الصفيحة الطبقية رقيقة، فإن خطاً مستقيماً في البداية وعمودياً على السطح الأوسط للصفيحة الطبقية، أي ناظم بالنسبة إلى السطح الأوسط، ينتظر أن يبقى مستقيماً وعمودياً على السطح الأوسط عندما تنفعل الصفيحة الطبقية أي تنحرف أو تستطيل أو تتقلص أو تتعرض للقص أو تلتوي. ويكافئ شرط بقاء الناظم على السطح الأوسط مستقيماً وعمودياً تحت الانفعال إلى تجاهل انفعالات القص في المستويات العمودية على السطح الأوسط، أي إن $\gamma_{xz}=\gamma_{yz}=0$ حيث z اتجاه الناظم على السطح الأوسط في الشكل 4-4 (لاحظ أن γ_{yz} و γ_{xz} تمثل الزوايتين التي يمكن أن

---

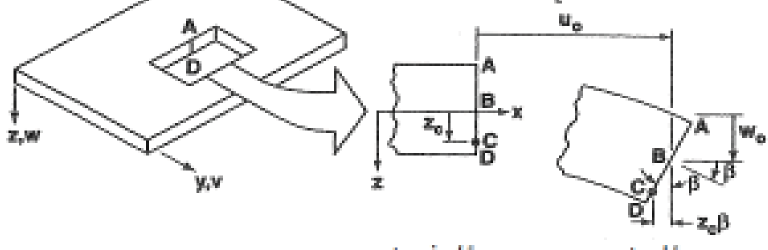
[1] أن تكون الطبقات مترابطة بشكل مثالي ليس مثالياً إلى الحد الذي لا يمكن تحقيقه بالمعنى العملي. في الواقع، يوجد اختبارات لتحديد ما إذا كانت الطبقات مترابطة ببعضها البعض. وتعتبر هذه الاختبارات جزءاً لا يتجزأ من تقانة التصنيع الحالية للبنى المركبة. وتعتبر نقرة قطعة النقود التي يمكن لأي شخص القيام بها واحدة من هذه الاختبارات. فصوت نقرة قطعة النقود على الصفيحة الطبقية تتغير درجة نغماته من مناطق الإقـــران الكامل إلى المناطق التي يوجد فيها عدم ترابط. بناءً على ذلك، يتم ضمان الإقـــران الجيد بين الرقاقات بواسطة المعاينة المناسبة. هكذا، فإن الإدراك المألوف (الصحيح) بأن الروابط بين الليف والمصفوفة على المستوى المجهري ليست مثالية مطلقاً، وليس لها مشابه على مستوى الصفيحة الطبقية (الماكروي). سوف تكون الصفائح الطبقية غير المترابطة بشكلٍ كامل على الأرجح مرفوضة (أو خاضعة للإصلاح إذا أمكن) في الممارسة الصناعية الشائعة. يعود الإلحاح على الروابط الجيدة إلى أن الروابط شبه الكاملة تعتبر حاجةً في كل الصفائح الطبقية من أجل ضمان أن تعمل الرقاقات معاً كوحدة كما في الشكل 4-2 وليست منفصلة (إذا كانت الرقاقات غير ملتصقة، فليس لدينا حينها صفيحة طبقية!).

يعملها الناظم المشوه مع السطح الأوسط المشوه). علاوة على ذلك، يُفترض أن تمتلك المستقيمات الناظمية طولاً ثابتاً بحيث يكون الانفعال العمودي على السطح الأوسط مهملاً أيضاً، أي $\varepsilon_z = 0$. تُؤلف مجموعة الفرضيات السابقة لسلوك طبقة منفردة تمثل الصفيحة الطبقية فرضية كيرشوف المعروفة من أجل الصفائح وفرضية كيرشوف- لوف من أجل القواقع (وهي المناظر ثنائي البعد لفرضية نظرية العارضة العادية أحادية البعد أن المقاطع المستوية، أي المقاطع العمودية على محور العارضة، تبقى مستوية بعد الانحناء، ومن هنا لا بدّ أن يكون المبرر الفيزيائي لمجموعة الفرضيات واضحاً). لاحظ أنه لم يُفرض أي قيد على الصفائح المستوية، فالصفائح الطبقية يمكن، في الحقيقة، أن تكون مقوّسة أو شبه قشرية.

تُشتق انعكاسات فرضية كيرشوف على انزياحات الصفيحة الطبقية v, u و w في الاتجاهات y, x وz باستعمال مقطع الصفيحة الطبقية في المستوي z-x المبين في الشكل 4-4. يكون u_o هو الانزياح في الاتجاه x للنقطة B من السطح الأوسط غير المشوه إلى السطح الأوسط المشوه (يستعمل رمز "الصفر"(o) للإشارة إلى قيم متغيّر في السطح الأوسط). بما أن الخط ABCD يبقى مستقيماً تحت انفعال الصفيحة الطبقية، يكون الانزياح عند النقطة C :

$$u_c = u_\circ - z_c \beta \qquad (4.7)$$

لكن، بما أن الخط ABCD يبقى أيضاً، تحت الإجهاد، عمودياً على السطح الأوسط، فإن β تكون ميل السطح الأوسط للصفيحة الطبقية في الاتجاه x، أي أن:



الشكل 4-4: هندسة الانفعال في المستوي x-z

$$\beta = \frac{\partial W_\circ}{\partial x} \tag{4.8}$$

بعد ذلك، يكون الانزياح، u ، في أي نقطة عبر سماكة الصفيحة الطبقية

$$u = u_\circ - z\frac{\partial W_\circ}{\partial x} \tag{4.9}$$

وبمحاكمة مشابهة، يكون الانزياح، v ، في الاتجاه y

$$v = v_\circ - z\frac{\partial W_\circ}{\partial y} \tag{4.10}$$

تم اختزال انفعالات الصفيحة الطبقية إلى ε_x، ε_y و γ_{xy} بفضل فرضية كيرشوف. أي إن $\varepsilon_z = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$. ومن أجل انفعالات صغيرة (مرونة خطية)، تُعرف الانفعالات المتبقية بدلالة الانزياحات كما يلي:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \tag{4.11}$$

هكذا، تكون الانفعالات من أجل الانزياحات المشتقة u و v في المعادلتين (4.9) و (4.10)

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_\circ}{\partial x} - z\frac{\partial^2 W_\circ}{\partial x^2} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v_\circ}{\partial y} - z\frac{\partial^2 W_\circ}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_\circ}{\partial y} + \frac{\partial v_\circ}{\partial x} - 2z\frac{\partial^2 W_\circ}{\partial x \partial y} \end{aligned} \tag{4.12}$$

أو:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{\circ} \\ \varepsilon_y^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \qquad (4.13)$$

حيث تكون انفعالات السطح الأوسط:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x^{\circ} \\ \varepsilon_y^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_{\circ}}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_{\circ}}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_{\circ}}{\partial y} + \dfrac{\partial v_{\circ}}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (4.14)$$

وتكون تقوسات السطح الأوسط:

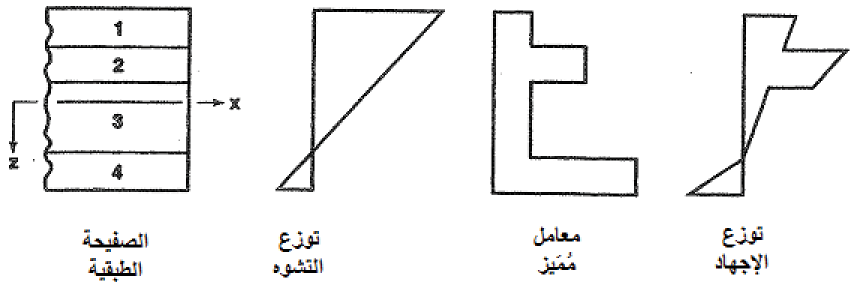
$$\begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 W_{\circ}}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 W_{\circ}}{\partial y^2} \\ 2\dfrac{\partial^2 W_{\circ}}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} \qquad (4.15)$$

(يمثل الحد الأخير في المعادلة (4.15) تقوس الفتل للسطح الأوسط). نشير فقط إلى تقوسات السطح الأوسط كسطح مرجعي، وليس إلى أيّ سطح آخر، لهذا، ليس هناك حاجة إلى اللاحقة السفلية صفر على κ_x و κ_y و κ_{xy} من هنا، تكون فرضية كيرشوف قد تحققت مباشرة كي ينطوي ذلك على تغير خطي للانفعال عبر سماكة الصفيحة الطبقية لأن الانفعالات في المعادلة (4.13) تأخذ شكل خط مستقيم أي y= mx + b. يعتبر هذا التحليل السابق صالحاً فقط من أجل الصفائح لأن علاقات الإجهاد– انفعال في المعادلة (4.11). وفي حالة قشريات الأسطوانة الدائرية، يجب أن يكون الحد ε_y في المعادلة (4.11) مكمَلاً بواسطة W_o/r حيث r يمثل نصف قطر القوقعة، وتمتلك بنى قشرية أخرى علاقات انزياح– انفعال أكثر تعقيداً.

باستبدال تغير الانفعال عبر السماكة، المعادلة (4.13) في علاقات الإجهاد–انفعال، المعادلة (4.6)، يمكن التعبير عن الإجهادات في الطبقة رقم k بدلالة انفعالات وتقوسات السطح الأوسط للصفيحة الطبقية على النحو الآتي:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}_k=\begin{bmatrix}\bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16}\\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26}\\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66}\end{bmatrix}_k\left[\begin{bmatrix}\varepsilon_x^{\circ}\\ \varepsilon_y^{\circ}\\ \gamma_{xy}^{\circ}\end{bmatrix}+z\begin{bmatrix}\kappa_x\\ \kappa_y\\ \kappa_{xy}\end{bmatrix}\right] \quad (4.16)$$

يمكن أن يكون $\bar{Q}_{ij}$ مختلفاً من أجل كل طبقة في الصفيحة الطبقية، لهذا، لا يكون تغير الإجهاد عبر سماكة الصفيحة الطبقية خطياً بالضرورة حتى ولو كان تغير الانفعال خطياً. وبدلاً من ذلك، يبيّن الشكل 4–5 تغيرات الانفعال والإجهاد النموذجية حيث تكون الإجهادات خطية في كل مجال (أي خطية في كل طبقة، لكن غير مستمرة عند الحدود بين الرقاقات).



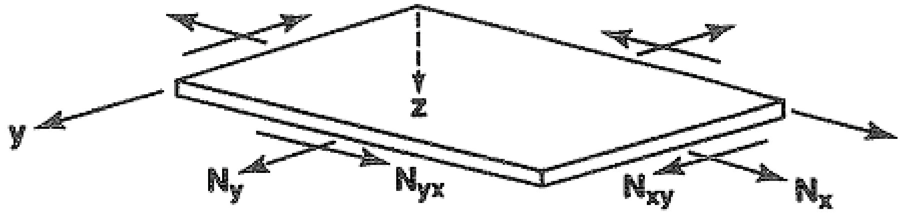
الشكل 4–5: تغير افتراضي للانفعال والإجهاد عبر سماكة الصفيحة الطبقية

3.2.4 محصلة القوى والعزوم في الصفيحة الطبقية

يتم الحصول على محصلة القوى والعزوم المؤثرة في صفيحة طبقية عبر تكامل الإجهادات في كل طبقة أو رقاقة عبر سماكة الصفيحة الطبقية، وعلى سبيل المثال:

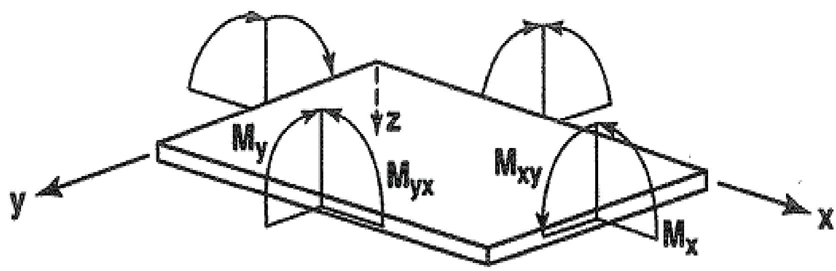
$$N_x=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_x dz \qquad M_x=\int_{-t/2}^{t/2}\sigma_x z dz \quad (4.17)$$

لاحظ أن الإجهادات في الشكل 4–5 تتغير في كل رقاقة ومن رقاقة إلى أخرى أيضاً، لهذا فالتكامل ليس عدّياً. ويمثل N_x حالياً قوةً في وحدة العرض من مقطع الصفيحة الطبقية، كما في الشكل 4–6.



الشكل 4−6: قوى في المستوي لصفيحة طبقية مستوية

وبشكلٍ مشابه، يمثل M_x العزم في واحدة الطول، كما في الشكل 4-7. ومع ذلك، سيشار إلى N_x إلخ و M_x إلخ كقوى وعزوم مع إسقاط شرط "في وحدة العرض"، لغرض ما هو مناسب. يُظهر الشكلان 4-6 و4-7 المجموعة الكاملة لمحصلات القوة والعزم من أجل صفيحة طبقية من N طبقة، وتُعرف على النحو التالي:



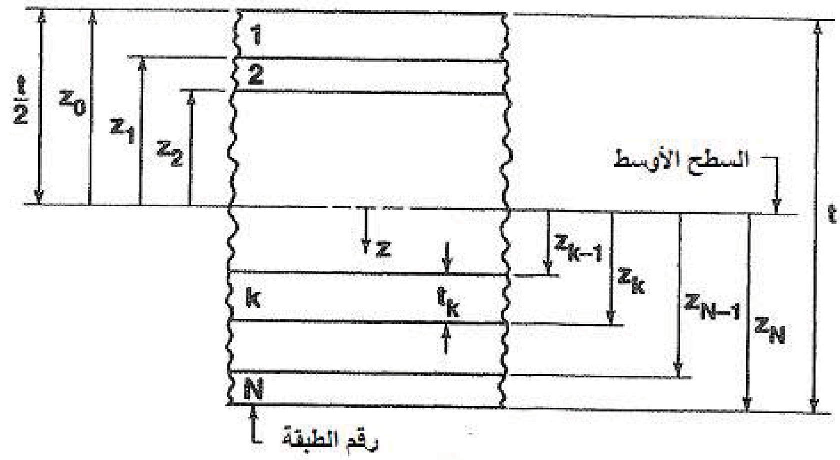
الشكل 4−7: العزوم في صفيحة طبقية مستوية

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k dz \qquad (4.18)$$

و:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k zdz \qquad (4.19)$$

حيث تُعرف z_k و z_{k-1} في هندسة الصفيحة الطبقية الأساسية في الشكل 4−8. لاحظ هنا أن z_i تُمثل المسافات الموجهة (الإحداثيات) بالتوافق مع الاصطلاح القاضي بأن يكون z موجباً نحو الأسفل. هذا يعني أن z_k يُمثل المسافة الموجهة إلى أسفل الطبقة رقم k و z_{k-1} يُمثل المسافة الموجهة إلى أعلى الطبقة رقم k. علاوة على ذلك، $z_\circ = -t/2$، $z_1 = -t/2 + t_1$، إلخ، بينما $z_N = +t/2$، $z_{N-1} = -t/2 - t_N$ إلخ. ولا تتعلق محصلات القوة والعزوم بـــ z بعد التكامل، لكنها تتعلق بـــ x و y، أي الإحداثيات في مستوي السطح الأوسط للصفيحة الطبقية.



الشكل 4−8: هندسة صفيحة طبقية من N طبقة

يمكن إعادة ترتيب المعادلتين (4.18) و(4.19) للاستفادة من حقيقة أن مصفوفة الجساءة لرقاقة تكون غالباً ثابتةً ضمن الرقاقة (إلا في حالة كون خصائص الرقاقة تتعلق بدرجة الحرارة والرطوبة وفي حالة وجود تدرج حرارة وتدرج رطوبة عبر الرقاقة). إذا كانت درجة الحرارة أو الرطوبة ثابتةً عبر سماكة الرقاقة (شرط "الغمر" أو النقع أو ثبات الشروط)، تكون قيم $\left[\overline{Q}_{ij}\right]_k$ ثابتة في الطبقة، لكن ربما متقادمة بسبب وجود الحرارة و/أو الرطوبة. لهذا، تمتد مصفوفة الجساءة خارج التكامل على كل طبقة، لكنها تبقى ضمن

مجموع محصلات القوة والعزم لكل طبقة. وعندما تُستبدل علاقات الإجهاد– انفعال للرقاقة، المعادلة (4.16)، تُصبح القوى والعزوم:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[\int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} dz + \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} zdz \right] \qquad (4.20)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{13} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \left[\int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} zdz + \int_{Z_{k-1}}^{Z_k} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} z^2 dz \right] \qquad (4.21)$$

وفي بعض الأحيان، تكون مصفوفة الجساءة $\left[\overline{Q}_{ij}\right]_k$ للرقاقة غير ثابتة عبر سماكة الرقاقة. وعلى سبيل المثال، إذا كانت خصائص الرقاقة تتعلق بدرجة الحرارة والرطوبة، وفي حالة وجود تدرج حرارة وتدرج رطوبة عبر الرقاقة، عندئذٍ، تكون $\left[\overline{Q}_{ij}\right]_k$ متعلقةً بـــ z ويجب بقاؤها داخل التكامل. وفي هذه الحالات، تكون الصفيحة الطبقية غير متجانسة ضمن كل طبقة ويتطلب الأمر، عند ذلك، حلاً عددياً أكثر تعقيداً مما هو وارد هنا.

ينبغي الآن التذكير أن ε_x°، ε_x° ، γ_{xy}° ، κ_x و κ_y و κ_{xy} لا تتعلق بـــ z ، لكنها قيم السطح الأوسط، ويمكن حذفها من إشارات الجمع. ويمكن، إذاً، كتابة المعادلتين (4.20) و (4.21) على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \qquad (4.22)$$

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \qquad (4.23)$$

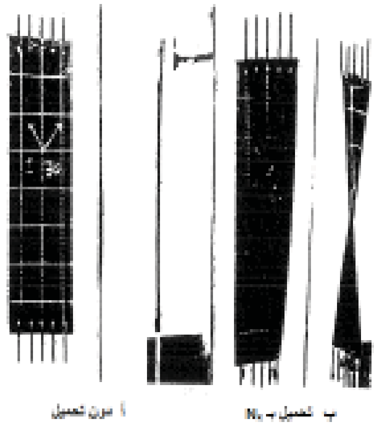
حيث:

$$
\begin{aligned}
A_{ij} &= \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k (Z_k - Z_{k-1}) \\
B_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \qquad (4.24)\\
D_{ij} &= \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)
\end{aligned}
$$

في المعادلات (4.22) و(4.23) و(4.24)، تُمثل A_{ij} معاملات جساءة الاستطالة و B_{ij} معاملات جساءة الإقران انحناء- استطالة و D_{ij} معاملات جساءة الانحناء. وينطوي مجرد وجود B_{ij} على الإقران بين الانحناء والاستطالة للصفيحة الطبقية [(يعود ذلك إلى وجود القوى والتقوسات معاً وأيضاً العزوم والانفعالات في المعادلات (4.22) و(4.23)]. لهذا، من المستحيل تطبيق السحب على صفيحة طبقية تُظهر حدود B_{ij} بدون، في نفس الوقت، حرف و/أو فتل الصفيحة. هذا يعني أن قوة استطالة لا تؤدي فقط إلى انفعالات استطالة وإنما إلى انحناء و/أو فتل الصفيحة الطبقية. من جهة أخرى، لا يمكن لمثل هذه الصفيحة الطبقية الخضوع لعزمٍ بدون المعاناة، بنفس الوقت، من استطالة السطح الأوسط. تنشأ الملاحظة الأولى في الصفيحة الطبقية من طبقتين من بوليمير النيلون المقوى بالمطاط، كما في الشكل 4-9. فبدون تحميل، تكون الصفيحة الطبقية مستويةً، كما في الشكل 4-9 أ. وبتعريض الصفيحة الطبقية إلى محصلة القوة N_x وبسبب طريقة الاستناد والتحميل، يكون $N_x= N_{xy}= M_x= M_{xy}= 0$. وعندما تُوجه اتجاهات المادة الرئيسية للرقاقتين وفق $+\alpha$ و $-\alpha$ على التوالي بالنسبة إلى المحور الصفيحة الطبقية x، يمكن أن نُبين أن العبارة العامة لـــ N_x تُخصص إلى:

$$\mathrm{N_x} = \mathrm{A}_{11}\varepsilon_{\mathrm{x}}^{\circ} + \mathrm{A}_{12}\varepsilon_{\mathrm{y}}^{\circ} + \mathrm{B}_{16}\kappa_{xy} \qquad (4.25)$$

وهكذا، تسبب محصلة القوة N_x فتل الصفيحة الطبقية الذي يبيّنه الحد κ_{xy} بالإضافة إلى الانفعالات الناظمية العادية $\varepsilon_{\mathrm{x}}^{\circ}$ (استطالة) و $\varepsilon_{\mathrm{y}}^{\circ}$ (انكماش)، الأمر الذي يتضح مباشرة في الشكل 4-9 أ.

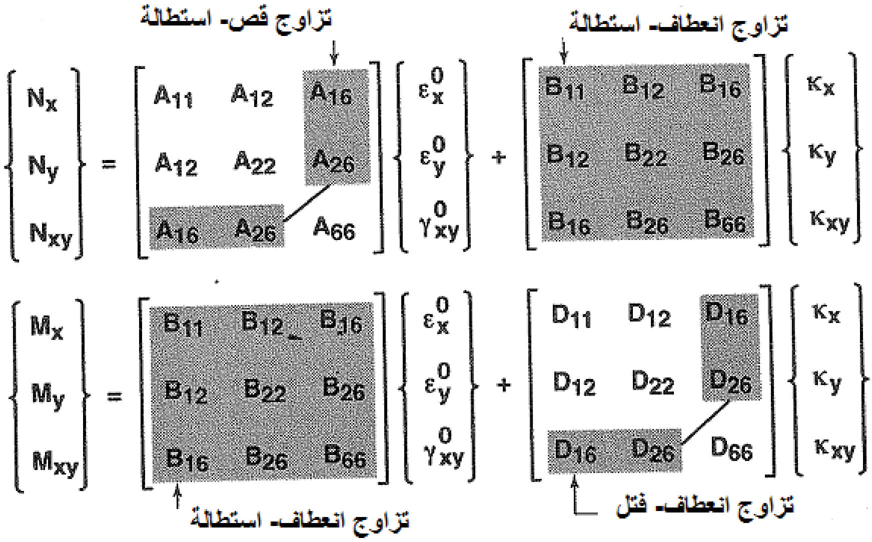


الشكل 4–9: فتل صفيحة طبقية معاكسة التناظر من طبقتين تحت الشد
(عن أشتون وهالبين وبيتي [4–3])

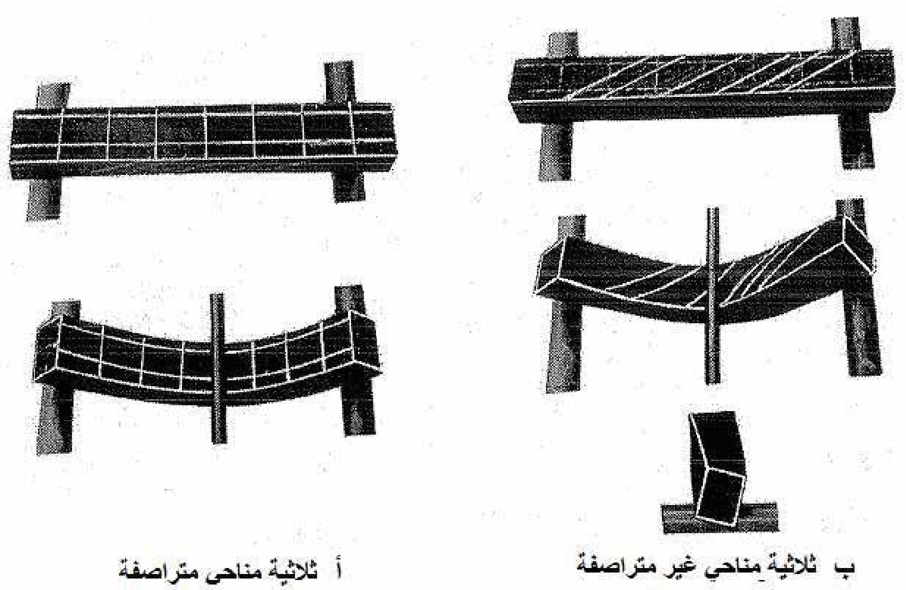
4.2.4 ملخص

تشتمل نظرية التصفيح التقليدية مجموعة شاملة من فرضيات الانفعال التي تقود إلى علاقات القوة– انفعال– تقوس وعزم– انفعال– تقوس في المعادلتين (4.22) و(4.23) المبيّنة في الشكل 4–10 حيث تتبين المعاني الفيزيائية لــ A_{ij} و B_{ij} و D_{ij}. وهنا، يُمثل A_{16} و A_{26} الإقران قص– استطالة على مستوى الصفيحة الطبقية، الأمر الذي يشبه ما كان في الرقاقة المنفردة في الفصل الثاني. ويُمثل B_{ij}، بالتأكيد، الإقران الأخير بين الانحناء والاستطالة، وهذه ظاهرة غير موجودة على مستوى الرقاقة. أخيراً، يُمثل D_{16} و D_{26} الإقران انحناء– فتل. ويتم توضيح هذا الإقران الأخير بواسطة حرف عارضة مطاطية مقوّات بألياف نيلون أحادية الاتجاه تُشكل زاوية مع الاتجاه الطولاني (spanwise) بين المسندين في المستوي الأفقي، كما في الشكل 4–11 ب. وهنا، لا تنحرف العارضة فقط في الاتجاه الطولاني بين المسندين، وإنما يتعرض للفتل حول محور الاتجاه الطولاني بين المسندين، كما تبيّنه الخطوط البيضاء على جسم عارضة المطاط الأسود بحيث ترتفع عن المسندين زاويتين للعارضة متعاكستان قطرياً. إذا تمّت إدارة نفس العارضة °90 حول محور الاتجاه الطولاني بين المسندين (تشكل، هكذا، الألياف زاوية بالنسبة إلى المحور المسافة لاتجاه الطولاني بين المسندين في المستوي الشاقولي) وتحرف كما في الشكل 4–11

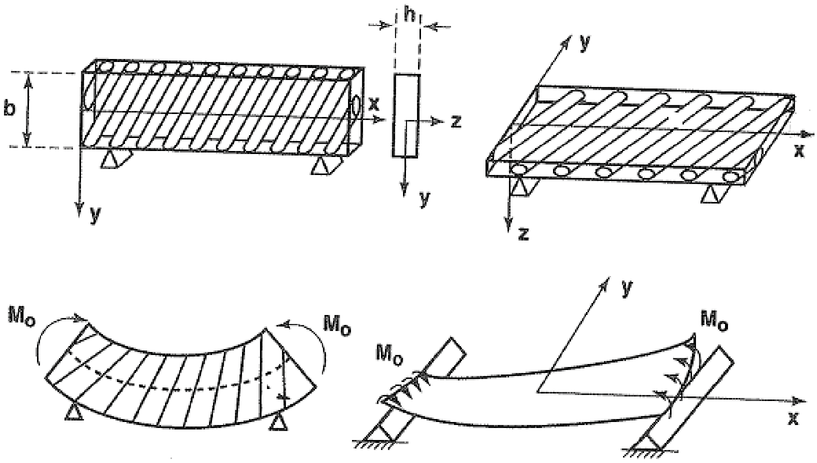
4 أ، فلا يحصل فتلٌ عند ذلك! وتسلك بطريقة مشابهة صفيحة ذات ألياف تشكل زاوية مع محور بين المسندين، كما في الشكل 4-12.



الشكل 4-10: المعنى الفيزيائي لحدود الجساءة كمحصلات قوة وعزم



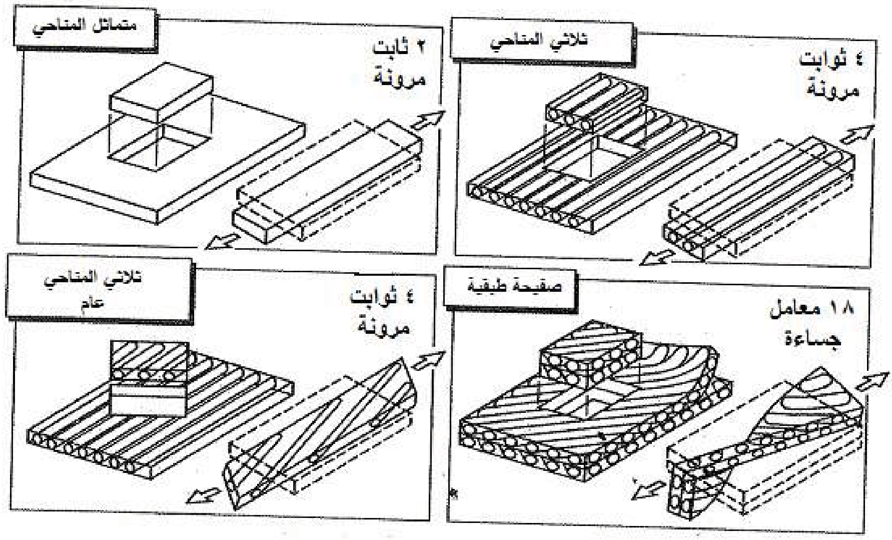
الشكل 4-11: تأثير الإقران انحناء – فتل على انحناء العارضة (عن آشتون وهالبين وبيتي [4-3])



الشكل 4-12: تأثير الإقران انحناء- فتل على انحناء الصفيحة (عن أشتون وهالبين وبيتي [4-3])

تضمنت أنماط السلوك المدروسة حتى الآن المواد متماثلة المناحي والمواد ثلاثية المناحي (التي تسمى أحياناً ثلاثية المناحي الخاصة في حال تحميلها وفق اتجاهات المادة الرئيسية) والمواد ثلاثية المناحي العامة (مواد ثلاثية المناحي بكل بساطة في حال تحميلها وفق اتجاهات المادة غير الرئيسية) والصفائح الطبقية. ويبين الشكل 4-13 كل تشكيل مع استجابة الانفعال لحمل محوري. لاحظ أنه لا يحصل إقران قص- استطالة في المواد ثلاثية المناحي المُحمّلة وفق اتجاهات المادة الرئيسية، لكنه يحصل في حال التحميل في غير هذه الاتجاهات.

أخيراً، يمكن فتل صفيحة طبقية عند سحبها وفق الاتجاه المحوري. يبيّن كذلك الشكل 4-13 عدد ثوابت المرونة المستقلة لكل فئة من المواد (اثنين للمواد متماثلة المناحي وأربعة للمواد ثلاثية المناحي). لاحظ على الخصوص أن صفيحة طبقية تمتلك 18 معامل جساءة (ستة لكل من A_{ij} و B_{ij} و D_{ij}). ويكون العدد الأقصى لثوابت المرونة في صفيحة طبقية مساوياً لأربعة لكل طبقة، لكن في حال تصنيعها من نفس المادة في كل طبقة، يكون عندها عدد ثوابت المرونة أربعة فقط.



الشكل 4-13: المادة والأشكال الإنشائية (عن أشتون وهالبين وبيتي [4-3])

حاول بعض المهندسين توصيف الصفائح الطبقية بواسطة معاملات جساءة فعلية، E_x، E_y، ν_{xy} وG_{xy} ، ويمكن لهذه الخصائص أن تُحدد فعلاً بواسطة القياسات العادية. ومع ذلك، فمن الجوهري الاعتراف أنه مع مقاربة جساءة فعالة للصفيحة الطبقية:

- يتم تجاهل الإقران قص- استطالة
- يتم تجاهل جميع استجابات الانحناء (بما في ذلك بالطبع الإقران انحناء- فتل)
- يتم تجاهل الإقران بين الانحناء والاستطالة (يكون عدد من الصفائح الطبقية متناظراً، لكن البعض الآخر ليس كذلك).

ينبغي أن نستنتج أن الصفيحة الطبقية ليست مادةً، بل، بدلاً من ذلك، عنصراً إنشائياً مع سمات جوهرية لا يمكن تجاهلها من خصائص المادة والهندسة على السواء. لهذا، تكون مقاربة جساءة فعالة للصفيحة الطبقية فيها خلل في معظم التطبيقات العملية (على الرغم من عدم صحة ذلك من أجل صفيحة طبقية متناظرة بالنسبة إلى السطح الأوسط ومعرضة لتحميل شد فقط). بناءً على ذلك، ينبغي أن نوصف الصفائح الطبقية بواسطة معاملات الجساءة الجوهرية للاستطالة والإقران انحناء- استطالة والانحناء في المعادلة (4.24).

كخلاصة، تمكننا نظرية التصفيح التقليدية من حساب القوى والعزوم إذا عرفنا الانفعالات والتقوسات للسطح الأوسط (وبالعكس). عندئذٍ، يمكننا حساب إجهادات الرقاقات في إحداثيات الصفيحة الطبقية. وبعد ذلك، يمكننا تحويل إجهادات الرقاقات من إحداثيات الصفيحة الطبقية إلى اتجاهات المادة الرئيسية للرقاقة. أخيراً، يمكننا توقع تطبيق معيار إخفاق لكل رقاقة في اتجاهات المادة الرئيسية الخاصة بها. تبدو هذه الإجرائية مباشرة من حيث المبدأ، لكنه من الصعب الفهم التام لعلاقات القوة– انفعال– تقوس و عزم– انفعال– تقوس في المعادلتين (4.22) و(4.23). لهذا، سنجرب بعض عمليات التبسيط في الفقرة التالي لزيادة فهمنا لنظرية التصفيح التقليدية.

مجموعة المسائل 2.4

1.2.4 تحقق من أجل مادة متماثلة المناحي من طبقة منفردة وخصائص مادة E و ν وسماكة t أن معاملات جساءة الاستطالة والانحناء تكون:

$$A_{11} = A_{22} = \frac{Et}{1-\nu^2} \qquad D_{11} = D_{22} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

واللتين تسميان عموماً B و D على التوالي في نظرية الصفيحة متماثلة المناحي العادية. ما هي معاملات جساءة الإقران انحناء– استطالة؟

2.2.4 اشتق عبارات الجمع لمعاملات جساءة الاستطالة والإقران انحناء– استطالة وانحناء لصفائح طبقية ذات خصائص ثابتة في كل رقاقة ثلاثية المناحي، أي، اشتق المعادلة (4.24) من المعادلتين (4.20) و(4.21).

3.2.4 بين أنه يمكن كتابة معاملات الجساءة في المعادلة (4.24) على النحو:

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\overline{Q}_{ij})_k \left[t_k \overline{Z}_k^2 + \frac{t_k^3}{12} \right] \qquad B_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\overline{Q}_{ij})_k t_k \overline{Z}_k \qquad A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\overline{Q}_{ij})_k t_k$$

حيث يكون t_k السماكة و $\overline{Z}_k$ المسافة إلى المركز المتوسط للطبقة ثلاثية المناحي رقم k. ما هو المعنى الفيزيائي للمعاملات $((\overline{Q}_{ij})_k)$ في كلٍ من العبارات السابقة؟

4.2.4 حدِّد معاملات جساءة الاستطالة والإقران انحناء– استطالة والانحناء لشريطة معدن ثنائية الطبقة ذات سماكات متساوية كما في الشكل 1–3 (عارضة من مادتين

متماثلتي المناحي خصائصها E_1, ν_1, α_1 و E_2, ν_2, α_2). استعمل السطح الأوسط للعارضة كسطحٍ مرجعي.

5.2.4 بَرْهِنْ أن القوة في وحدة العرض في صفيحة طبقية ذات رقاقات ثلاثية المناحي متساوية السماكة موجهة وفق الزوايا $+\alpha$ و $-\alpha$ بالنسبة إلى القوة المطبقة تكون:

$$N_x = A_{11}\varepsilon_x^{\circ} + A_{12}\varepsilon_y^{\circ} + B_{16}\kappa_{xy}$$

ما هي A_{11} و A_{12} و B_{16} بدلالة معاملات الجساءة المتحولة المختزلة $(\overline{Q}_{ij})_{+\alpha}$ لرقاقة وسماكة الرقاقة t ؟

6.2.4 نَفِّذْ كل أجزاء المسألة 5.2.4 من أجل العزم في وحدة العرض، M_x.

3.4 حالات خاصة لمعاملات جساءة الصفيحة الطبقية

خُصصت هذه الفقرة لتلك الحالات الخاصة من الصفائح الطبقية حيث تأخذ معاملات الجساءة قيماً مبسطة مقارنةً بالشكل العام في المعادلة (4.24). تعتبر العلاقات العامة قوة– عزم– انفعال– تقوس في المعادلات (4.22) و(4.23) عامة جداً كي تُفهم بسهولة. لهذا، يتم بناء فهمنا لسلوك الصفائح الطبقية من الحالات الأسهل إلى الحالات الأكثر تعقيداً. فبعض هذه الحالات تكون غالباً بديهية، وبعضها الآخر تكون اختصاصية، والبعض لا يحصل غالباً في الممارسة لكنها جميعاً تشكل مساهمات لاستيعاب مفهوم معاملات جساءة الصفائح الطبقية. وتنتج عدة حالات من الممارسة الشائعة في بناء صفائح طبقية من رقاقات تمتلك نفس خصائص وسماكة المواد، لكنها تتمتع بالنسبة إلى بعضها، وإلى محاور الصفيحة الطبقية بتوجيهات مختلفة لاتجاهات المادة الرئيسية. وسيتم أيضاً تفحص حالات أكثر عمومية.

ومن أجل توفير قاعدة للمناقشة اللاحقة، سيتم أولاً معالجة معاملات جساءة التشكيلات أحادية الطبقة. ولا بد أن تكون معاملات الجساءة هذه قابلة للتعرف بناءً على المفاهيم المعروفة مسبقاً من قبل القارئ في دراسته للصفائح والقشريات. وسيتم فيما بعد مناقشة وتصنيف الصفائح الطبقية المتناظرة بالنسبة إلى سطحها الأوسط. كما سيتم بعد ذلك توصيف الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المنضدة بشكلٍ عكسي التناظر بالنسبة إلى السطح الأوسط، وأخيراً، سيتم مناقشة الصفائح الطبقية التي يغيب فيها تماماً التناظر بالنسبة إلى

السطح الأوسط أي الصفائح الطبقية اللامتناظرة. وتظهر قضية سماكات الرقاقات في كافة الصفائح الطبقية. فالصفائح الطبقية المنتظمة، تمتلك رقاقات متساوية السماكة، أما الصفائح الطبقية غير المنتظمة، فهي تمتلك رقاقات مختلفة السماكة.

1.3.4 التشكيلات أحادية الطبقة

تعتبر التشكيلات الخاصة أحادية الطبقة المعالجة في هذا الفقرة متماثلة المناحي، ثلاثية المناحي خاصة، ثلاثية المناحي عامة وغير متماثلة المناحي. ولا يمكن بالطبع تمييز التشكيل ثلاثي المناحي العام عن الطبقة غير متماثلة المناحي من وجهة نظر التحليل، لكنه يمتلك فقط خصائص المادة الأربعة المستقلة للمادة ثلاثية المناحي.

الطبقة المنفردة متماثلة المناحي

من أجل طبقة منفردة متماثلة المناحي خصائص مادتها E و ν و سماكتها t ، تختزل المعادلة (4.24) لمعاملات جساءة الصفيحة الطبقية إلى:

$$A_{11} = \frac{Et}{1-\nu^2} = A \qquad D_{11} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = D$$

$$A_{12} = \nu A \qquad D_{12} = \nu D$$

$$A_{22} = A \qquad B_{ij} = 0 \qquad D_{22} = D \tag{4.26}$$

$$A_{16} = 0 \qquad D_{16} = 0$$

$$A_{26} = 0 \qquad D_{26} = 0$$

$$A_{66} = \frac{Et}{2(1+\nu)} = \frac{1-\nu}{2}A \qquad D_{66} = \frac{Et^3}{24(1+\nu)} = \frac{1-\nu}{2}D$$

حيث تتعلق محصلة القوى فقط بالانفعالات في المستوي للسطح الأوسط في الصفيحة الطبقية، كما تتعلق محصلة العزوم فقط بتقوسات السطح الأوسط:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & \nu A & 0 \\ \nu A & A & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} \qquad (4.27)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D & \nu D & 0 \\ \nu D & D & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \qquad (4.28)$$

بهذا، لا يحصل إقران بين الانحناء والاستطالة لطبقة منفردة متماثلة المناحي. لاحظ أيضاً أن:

$$D = \frac{At^2}{12} \qquad (4.29)$$

الطبقة المنفردة ثلاثية المناحي الخاصة

من أجل طبقة منفردة ثلاثية المناحي خاصة سماكتها t، ورقاقة ذات معاملات جساءة $\overline{Q}_{ij}$ تعطى بالمعادلات (2.61)، تكون معاملات جساءة الصفيحة الطبقية:

$$A_{11} = Q_{11}t \qquad D_{11} = \frac{Q_{11}t^3}{12}$$

$$A_{12} = Q_{12}t \qquad D_{12} = \frac{Q_{12}t^3}{12}$$

$$A_{22} = Q_{22}t \qquad B_{ij} = 0 \qquad D_{22} = \frac{Q_{22}t^3}{12} \qquad (4.30)$$

$$A_{16} = 0 \qquad D_{16} = 0$$

$$A_{26} = 0 \qquad D_{26} = 0$$

$$A_{66} = Q_{66}t \qquad D_{66} = \frac{Q_{66}t^3}{12}$$

حيث، كما هو الحال مع الطبقة المنفردة متماثلة المناحي، تتعلق محصلة القوى فقط بالانفعالات في المستوي، كما تتعلق محصلة العزوم فقط بالتقوسات:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

الطبقة المنفردة ثلاثية المناحي العامة

من أجل طبقة منفردة ثلاثية المناحي عامة سماكتها t ورقاقة ذات معاملات جساءة $\overline{Q}_{ij}$ تعطى بالمعادلات (2.80)، تكون معاملات جساءة الصفيحة الطبقية:

$$A_{ij} = \overline{Q}_{ij} t \qquad B_{ij} = 0 \qquad D_{ij} = \frac{\overline{Q}_{ij} t^3}{12} \quad (4.33)$$

وهنا أيضاً، لا يحصل إقران بين الانحناء والاستطالة وتكون محصلة القوى والعزوم:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

لاحظ أنه، مقارنة بكلٍ من الطبقة متماثلة المناحي والطبقة ثلاثية المناحي خاصة ، تتعلق قوى الاستطالة على السواء بانفعال القص وانفعال الاستطالة. كما أن محصلة قوة القص N_{xy} تتعلق على السواء بانفعالات الاستطالة ε_x° و ε_y° وانفعال القص γ_{xy}° . وبشكل

مشابه، تتعلق محصلات العزم كلها على السواء بتقوسات الانحناء κ_x و κ_y وتقوس الفتل κ_{xy}.

الطبقة المنفردة غير متماثلة المناحي

يكمن الفرق الوحيد في الظاهر بين الطبقة المنفردة العامة ثلاثية المناحي عامة والطبقة غير متماثلة المناحي في أن الأخيرة تمتلك معاملات جساءة رقاقة Q_{ij} تعرف ضمنياً في المعادلة (2.84) بينما تمتلك الطبقة ثلاثية المناحي عامة معاملات جساءة $\overline{Q}_{ij}$ تعرف في المعادلة (2.80). وتكون معاملات جساءة الصفيحة الطبقية:

$$A_{ij} = Q_{ij}t \qquad B_{ij} = 0 \qquad D_{ij} = \frac{Q_{ij}t^3}{12} \tag{4.36}$$

وتعطى محصلة القوة والعزم بالمعادلتين (4.34) و (4.35).

2.3.4 الصفائح الطبقية المتناظرة

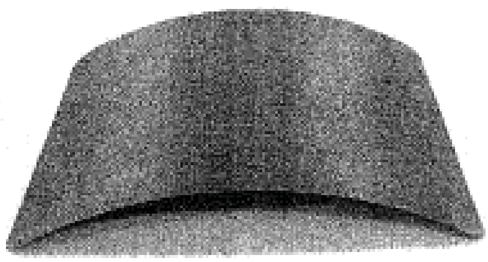
من أجل الصفائح الطبقية المتناظرة في كلٍّ من الهندسة وخصائص المادة بالنسبة إلى السطح الأوسط، تصبح معادلات الجساءة العامة، المعادلة (4.24)، أكثر اختزالاً. ويأخذ هذا التناظر شكلاً حيث إنه من أجل كل زوج رقاقات متساوي السماكة: (1) تمتلك كلتا الرقاقتين نفس خصائص المادة وتوجه اتجاهات المادة الرئيسية، أي إن كلتا الرقاقتين تمتلكان نفس $(\overline{Q}_{ij})_k$؛ و (2) إذا كانت رقاقة على مسافة ما فوق السطح الأوسط، فإن الرقاقة الأخرى ستكون على نفس المسافة تحت السطح الأوسط. ويمكن اعتبار طبقة منفردة تجسُر (straddle) السطح الأوسط كزوج من الرقاقات نصفية السماكة تحقق متطلبات التناظر (لاحظ أن مثل هذه الرقاقة تكون متناظرة بالنسبة إلى السطح الأوسط).

وبسبب تناظر $(\overline{Q}_{ij})_k$ والسماكات t_k، تكون كل معاملات جساءة الإقران انحناء– استطالة، أي B_{ij}، مساوية للصفر. وينتج من إزالة الإقران بين الانحناء والاستطالة تفرعان عمليان هامان. أولاً، يكون تحليل مثل هذه الصفائح الطبقية أكثر سهولة من تحليل الصفائح الطبقية ذات الإقران انحناء– استطالة. ثانياً، لا تظهر الصفائح الطبقية المتناظرة نزعةً نحو الانحناء أو الفتل نتيجة الانكماش الحتمي الحراري المنشأ الذي يحصل خلال التبريد بعد عملية الشي.

وعلى سبيل المثال، يظهر الشكل 4-14 صفيحة طبقية متناظرة ذات رقاقات متصالبة تم بناؤها من طبقات افرادية على صفيحة مستوية من الفولاذ وتغليفها من الأعلى والأسفل بواسطة صفائح مستوية من الفولاذ خلال الشي في مكبس ساخن وذلك بعد إخراجها من الصفائح والمكبس الساخن. ويا لها من صدمة أن نرى مثل هذه الصفيحة الطبقية شديدة التقوس تخرج من عملية الشي بعد أن تم وضع مجموعة من الرقاقات المستوية بين صفائح مستوية من الفولاذ في مكبسٍ مستوٍ ساخن! لهذا، يستخدم بشكل شائع صفائح طبقية متناظرة إلا إذا تطلبت ظروف خاصة صفائح طبقية غير متناظرة.

وعلى سبيل المثال، يمكن أن يكون جزء من وظيفة صفيحة طبقية أن تخدم كدرعٍ حراري، وحيث إن الحرارة تأتي فقط من جانب واحد، يجب استخدام صفيحة طبقية غير متناظرة (أو أنها ستنتج في كل الأحوال). تعطى محصلات القوة والعزم لصفيحة طبقية بالعلاقة:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{\circ} \\ \varepsilon_y^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} \qquad (4.37)$$



الشكل 4- 14: صفيحة طبقية لا متناظرة بعد الشي

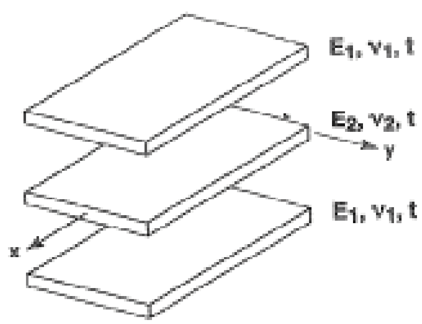
$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \qquad (4.38)$$

سيتم في الفقرات الفرعية التالية وصف حالات خاصة من الصفائح الطبقية المتناظرة. وفي كلّ حالة، ستأخذ A_{ij} و D_{ij} في المعادلتين (4.37) و (4.38) قيماً مختلفة، وبعضها سيضمحل.

لاحظ أنه حتى صفيحة طبقية متناظرة بالنسبة إلى السطح الأوسط يمكن أن تظهر إقراناً بين الانحناء والاستطالة إذا احتوت الرقاقات موادّ ذات خصائص تابعة لدرجة الحرارة وإذا طبق تدرج حراري عبر السماكة (تذكَّر مثال الدرع الحراري في بداية هذه الفقرة الفرعية). من هنا، فإن الأسس التي بنيت عليها المعادلات (4.20) و(4.21) لم تعد قابلة للتطبيق. وتكون معاملات الجساءة أكثر تعقيداً مما في المعادلة (4.24). فالتدرج في درجة الحرارة يغيّر خصائص المادة، ويؤدي بذلك إلى تخريب التناظر الابتدائي للصفيحة الطبقية.

الصفائح الطبقية المتناظرة مع طبقات متعددة من مواد متماثلة المناحي

إذا تم ترتيب عدة طبقات متماثلة المناحي ذات سماكات مختلفة بشكل متناظر من وجهتي النظر الهندسية، وخاصة المادة حول السطح الأوسط، فإن الصفيحة الطبقية الناتجة لا تظهر إقراناً بين الانحناء والاستطالة. ويبيّن الشكل 4-15 مثالاً بسيطاً لصفيحة طبقية متناظرة من ثلاث طبقات متماثلة المناحي. وهنا، يظهر بوضوح نوعا التناظر في الهندسة وخاصة المادة. يعطي الجدول 4-1 مثالاً أكثر تعقيداً لصفيحة طبقية متناظرة تتضمن ست طبقات متماثلة المناحي ذات خصائص مرونة وسماكات مختلفة. هنا أيضاً، يظهر بوضوح نوعا التناظر في الهندسة وخاصة المادة. لاحظ أنه يمكن اعتبار الطبقات 3 و4 في الجدول 4-1 معاً كطبقة منفردة سماكتها 6t بدون تغيير مميزات الجساءة.



الشكل 4- 15: منظر غير مرتبط لصفيحة طبقية متناظرة من ثلاث طبقات متماثلة المناحي

الجدول 4-1: صفيحة طبقية متناظرة من ست طبقات متعددة متماثلة المناحي

الطبقة	خصائص المادة	سماكة الطبقة
1	E_1, ν_1	t
2	E_2, ν_2	2t
3	E_3, ν_3	3t
4	E_3, ν_3	3t
5	E_2, ν_2	2t
6	E_1, ν_1	t

تحسب معاملات جساءة الاستطالة والانحناء في الحالة العامة من العلاقة (4.24) حيث يكون من أجل الطبقة ذات الرقم k :

$$(\overline{Q}_{11})_k = (\overline{Q}_{22})_k = \frac{E_k}{1-\nu^2} \qquad (\overline{Q}_{16})_k = (\overline{Q}_{26})_k = 0$$

$$(\overline{Q}_{12})_k = \frac{\nu_k E_k}{1-\nu_k^2} \qquad (\overline{Q}_{66})_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)} \tag{4.39}$$

وتأخذ محصلة القوة والعزم الصيغة البسيطة:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} \tag{4.40}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{4.41}$$

حيث يكون $A_{11} = A_{22}$ و $D_{11} = D_{22}$ من أجل طبقات متماثلة المناحي الأمر الذي يعود إلى الشرط الأول في المعادلة (4.39). ومن الممكن أحياناً أن يُعنى الشكل النوعي لـــ A_{ij} و D_{ij} الأمر الذي يمكن إثباته بيسرٍ من خلال تفحص بعض الأمثلة البسيطة.

الصفائح الطبقية المتناظرة مع طبقات متعددة من مواد ثلاثية المناحي خاصة

نظراً إلى التعقيدات التحليلية المرتبطة بمعاملات الجساءة A_{16} ، A_{26}، D_{16} و D_{26}، فمن المرغوب أحياناً أن لا تمتلك الصفيحة الطبقية معاملات الجساءة هذه. ويمكن أن تصنع الصفائح الطبقية من طبقات ثلاثية المناحي بحيث تكون اتجاهات المادة الرئيسية متطابقة مع اتجاهات الصفيحة الطبقية. فإذا كانت سماكات ومواقع وخصائص المادة للصفيحة الطبقية متناظرة حول السطح الأوسط للصفيحة الطبقية، لن يكون هناك إقران بين الانحناء والاستطالة. يظهر الجدول 4−2 مثالاً عاماً. لاحظ أن خاصية تناظر المادة يتطلب تساوي $[\overline{Q}_{ij}]_k$ في الطبقتين الموضَوعتين عند نفس المسافة فوق وتحت السطح الأوسط. لهذا، يجب أن يكون كل من خصائص المادة ثلاثية المناحي، $[Q_{ij}]_k$، للطبقات وزاوية اتجاهات المادة الرئيسية بالنسبة إلى المحاور الصفيحة الطبقية (أي توجيه كل طبقة) متماثلين. تحسب معاملات جساءة الاستطالة والانحناء من المعادلة (4.24) حيث يكون من أجل الطبقة رقم k

$$(\overline{Q}_{11})_k = \frac{E_1^k}{1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k} \qquad (\overline{Q}_{12})_k = \frac{\nu_{12}^k E_1^k}{1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k} \qquad (\overline{Q}_{22})_k = \frac{E_2^k}{1-\nu_{12}^k\nu_{21}^k}$$

$$(\overline{Q}_{16})_k = 0 \qquad (\overline{Q}_{26})_k = 0 \qquad (\overline{Q}_{66})_k = G_{12}^k \tag{4.42}$$

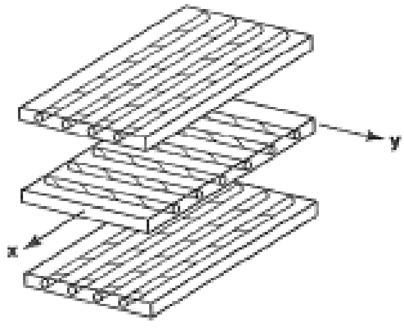
وبما أن $(\overline{Q}_{16})_k$ و $(\overline{Q}_{26})_k$ يساويان الصفر، فإن معاملات الجساءة A_{16} ، A_{26}، D_{16} و D_{26} تضمحل. كذلك تساوي معاملات جساءة الإقران انحناء− استطالة B_{ij} الصفر بسبب تناظر الصفيحة الطبقية. لهذا، يمكن أن يسمّى هذا النوع من الصفيحة الطبقية بالصفيحة الطبقية ثلاثية المناحي خاصة، وذلك بالتشابه مع الرقاقة ثلاثية المناحي خاصة (في الحقيقة، يجب أن لا تسمّى صفيحة طبقية باسم توصيف خاصة المادة لأن الصفائح الطبقية ليست موادّ وإنما عناصر إنشائية). وتأخذ محصلتا القوة والعزم شكل المعادلتين (4.40) و(4.41) على التوالي باستثناء أن $A_{11} \neq A_{22}$ و $D_{11} \neq D_{22}$.

الجدول 4-2: صفيحة طبقية متناظرة من خمس طبقات ثلاثية المناحي خاصة

الطبقة	خصائص المادة				الاتجاه	السماكات
	Q_{11}	Q_{12}	Q_{22}	Q_{66}		
1	F_1	F_2	F_3	F_4	0°	t
2	G_1	G_2	G_3	G_4	90°	2t
3	H_1	H_2	H_3	H_4	90°	4t
4	G_1	G_2	G_3	G_4	90°	2t
5	F_1	F_2	F_3	F_4	0°	t

تحصل الحالة الشائعة الخاصة جداً من الصفائح الطبقية المتناظرة ذات الطبقات المتعددة ثلاثية المناحي الخاصة عندما تمتلك كل الرقاقات نفس السماكة وخصائص المادة وتتناوب الاتجاهات الرئيسية لمادتها بين °0 و°90 بالنسبة إلى المحاور الصفيحة الطبقية أي على سبيل المثال [0°/90°/0°]. تسمى هكذا صفائح طبقية بالصفائح الطبقية المتناظرة المنتظمة ذات الرقاقات المتصالبة (منتظمة لأن كل الرقاقات تتمتع بنفس السماكة وذات رقاقات متصالبة لأن الألياف في طبقتين متجاورتين تشكّل فيما بينها زاوية °90). يبيّن الشكل 4-16 مثالاً بسيطاً لصفيحة طبقية متناظرة ومنتظمة ذات رقاقات متصالبة مؤلفة من ثلاث طبقات متساوية السماكة والخصائص. يجب أن تمتلك الصفيحة الطبقية عدداً فردياً من الطبقات لتلبية متطلبات التناظر حيث يزول الإقران بين الانحناء والاستطالة (أو أن الطبقات لا تتناوب فيما يتعلق باتجاه الليف).

أما الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة والعدد المزدوج من الطبقات، فهي بوضوح غير متناظرة وستناقش في الفقرة 3.3.4. كما سيتم في الفقرة 4.4 – معاملات الجساءة النظرية مقابل المقاسة للصفيحة الطبقية– مناقشة الحالة الأقل شيوعاً لصفائح طبقية ذات رقاقات متصالبة تكون طبقاتها المفردة متساوية السماكة وطبقاتها المزدوجة متساوية السماكة، ولكنها مختلفة عن سماكة الطبقات المفردة.



الشكل 4–16: منظر غير مترابط الصفيحة طبقية من ثلاث رقاقات متصالبة متناظرة ومنتظمة

ومن أجل إيضاح الإجرائيات العامة، سيتم رسم منطق اشتقاق معاملات الجساءة المختلفة. لنعتبر أولاً معاملات جساءة الاستطالة:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k (z_k - z_{k-1}) \qquad (4.43)$$

تساوي A_{ij} مجموع جداء $\overline{Q}_{ij}$ للرقاقات الإفرادية وسماكاتها. من هنا، تكمن الطرائق الأحادية للحصول على A_{ij} إفرادية معدومة في كون جميع الــ $\overline{Q}_{ij}$ معدومة، أو أن يكون بعض الــ $\overline{Q}_{ij}$ سالباً، والبعض الآخر موجباً، حيث إن مجموع جداءاتها مع سماكاتها المقابلة يساوي الصفر. من عبارات معاملات الجساءة المحولة للرقاقات $\overline{Q}_{ij}$، في المعادلة (2.80)، تكون $\overline{Q}_{11}$، $\overline{Q}_{12}$، $\overline{Q}_{22}$ و $\overline{Q}_{66}$ موجبة لأن جميع الدالات المثلثية (Trigonometic) تأخذ أس مزدوج. ولهذا، تكون A_{11} ، A_{12} ، A_{22} و A_{66} موجبة لأن السماكات تكون بالتأكيد موجبة على الدوام. ومع ذلك، تكون $\overline{Q}_{16}$ و $\overline{Q}_{26}$ معدومة من أجل اتجاه رقاقات $0°$ و $90°$ بالنسبة إلى محاور الصفيحة الطبقية. من هنا، تكون A_{16} و A_{26} معدومة في الصفائح الطبقية ذات الرقاقات ثلاثية المناحي الموجهة وفق الزاوية $0°$ أو $90°$ بالنسبة إلى محاور الصفيحة الطبقية.

لنعتبر ثانياً معاملات جساءة إقران انحناء– استطالة:

$$A_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \qquad (4.44)$$

فإذا كانت الصفيحة الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة متناظرة من حيث خصائص المادة والهندسة بالنسبة إلى السطح الأوسط، فإن جميع B_{ij} ستضمحل، كما يتبين بسهولة.
لنعتبر أخيراً معاملات جساءة الانحناء:

$$A_{ij} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}\left(\overline{Q}_{ij}\right)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{4.45}$$

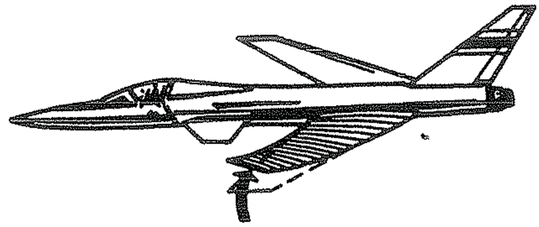
حيث تكون D_{ij} المختلفة مجموع جداء $\overline{Q}_{ij}$ للرقاقة المنفردة والحد $(Z_k^3 - Z_{k-1}^3)$. وبما أن $\overline{Q}_{11}$، $\overline{Q}_{12}$، $\overline{Q}_{22}$ و $\overline{Q}_{66}$ موجبة، والحد الهندسي موجباً، فإن D_{11}، D_{12}، D_{22} و D_{66} تكون موجبة. كما تكون أيضاً $\overline{Q}_{16}$ و $\overline{Q}_{26}$ معدومة من أجل اتجاهات رئيسية لخاصية مادة الرقاقة وفق الزاوية $0°$ و $90°$ بالنسبة إلى محاور إحداثيات الصفيحة الطبقية. لهذا تكون D_{16} و D_{26} معدومة.

الصفائح الطبقية المتناظرة مع طبقات متعددة من مادة ثلاثية المناحي عامة

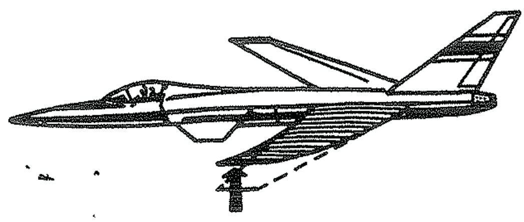
لا تظهر الصفائح الطبقية مع طبقات متعددة من مادة ثلاثية المناحي عامة المتناظرة التنضيد حول السطح الأوسط إقراناً بين الانحناء والاستطالة، أي إن B_{ij} تساوي الصفر. لهذا، تمثل محصلات القوة والعزم بواسطة المعادلات (4.37) و (4.38) على التوالي. وهنا، يلزم كل A_{ij} و D_{ij} بسبب الإقران بين القوى الناظمية وانفعال القص، قوة القص والانفعالات الناظمية، العزوم الناظمية والفتل، وعزم الفتل والتقوسات الناظمية. ويستدل على هذا الإقران بواسطة معاملات الجساءة A_{15} ، A_{26} ، D_{16} و D_{26}.

تشكل معاملات الجساءة للإقران انحناء- فتل آلية التحكم للأجنحة الماسحة إلى الأمام (forward swept) للطائرة X-29A في الشكل 1-37. تتعرض الأجنحة الماسحة إلى الأمام لقوى ديناميكية هوائية تعمل على فتل الجناح حول محورٍ على طول الجناح وعمودياً على جسم الطائرة إلى الخارج بزاوية تساوي زاوية مسح الجناح، أي M_y في الشكل 7-10. ويكون التباعد (divergence) الأيروديناميكي هو النتيجة الممكنة (الترفرف الإجمالي للجناح الذي يسحبه إلى الخارج). وتمتلك صفيحة طبقية ذات رقاقات تشكل زوايا مختلفة بالنسبة إلى محور الجناح معاملات D_{16} و D_{26} تسبب فتل الجناح في الاتجاه المعاكس لأثر فتل الجناح الأيروديناميكي، المبيّن في الشكل 4-17. ويسبّب التغلب على أثر فتل الجناح في جناح معدني قيوداً تتعلق بالوزن والكلفة لأن الطريقة الأحادية لتوليد

معاملات D_{16} و D_{26} إنشائية في جناح معدني تتطلب دعامات متعددة تميل بزاوية عن محور الجناح. وبالمقابل، يمكن أن يتطلب جناح صفائحي مركب عدداً صغيراً من الطبقات الإضافية من المادة بدون دعامات. من هنا، تكون قيود الوزن والكلفة صغيرةً لتحقيق مزايا أداء الطائرة ذات الجناح الماسح إلى الأمام (أي تحسين جودة المناورة ومزايا طيران مع زاوية انقضاض عالية). في الواقع، يمكن أن يكون الجناح الأمامي أصغر حجماً ووزناً وكلفةً من الجناح الخلفي. ولقد راجع Hertz و Shink و Weisshaar [4-4] مفاهيم ما أصبح يسمى التصميم الهوائي المرن للإنشاءات المركبة.



انحناءات وفتلات (فتل) جناح معدني تحت تأثير أحمال أيروديناميكية

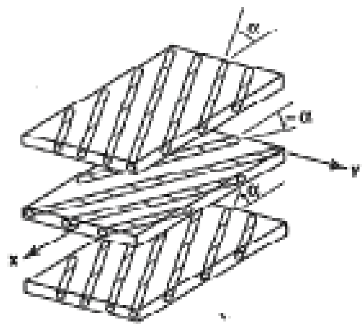


انحناءات الجناح المركب وعدم فتله

الشكل 4-17: استجابة أجنحة ماسحة إلى الأمام

تعتبر الصفائح الطبقية المنتظمة والمتناظرة ذات الرقاقات المائلة بزاوية (لأن الرقاقات المتجاورة تشكل زاوية α + و α − بالنسبة إلى الاتجاه محور الصفيحة الطبقية) فرعاً خاصاً من هذه الفئة. تمتلك مثل هذه الصفائح الطبقية رقاقات ثلاثية المناحي متساوية السماكات. كما تمتلك الرقاقات المتجاورة إشارات معاكسة لزاوية خصائص توجه المادة الرئيسية بالنسبة إلى محاور الصفيحة الطبقية مثل [α +/α −/α +]. لهذا، لتحقيق التناظر، يجب أن يكون عدد الطبقات مفرداً. يظهر الشكل 4-18 مثالاً بسيطاً لصفيحة طبقية منتظمة

ومتناظرة من ثلاث طبقات مائلة. ويعطي الجدول 4-3 مثالاً أكثر تعقيداً لصفيحة طبقية ذات رقاقات ثلاثية المناحي عامة. لاحظ أن خصائص مادة الرقاقة ثلاثية المناحي وتوجيهاتها وسماكاتها تكون كلها متناظرة حول السطح الأوسط.



الشكل 4-18: منظر لصفيحة طبقية منتظمة ومتناظرة وغير مترابطة ذات ثلاث زوايا مائلة

الجدول 4-3: صفيحة طبقية متناظرة من خمس رقاقات ثلاثية المناحي عامة

الطبقة	خصائص المادة				الاتجاه	السماكة
	Q_{11}	Q_{12}	Q_{22}	Q_{26}		
1	F_1	F_2	F_3	F_4	+ 30°	t
2	G_1	G_2	G_3	G_4	− 60°	3t
3	H_1	H_2	H_3	H_4	+ 10°	5t
4	G_1	G_2	G_3	G_4	− 60°	3t
5	F_1	F_2	F_3	F_4	+ 30°	t

يأخذ الإقران المشار إليه أعلاه، والذي يتطلب بـــ A_{16} ، A_{26} ، D_{16} و D_{26} شكلاً خاصاً في الصفائح الطبقية المتناظرة ذات الرقاقات المائلة. ويمكن بيان أن معاملات الجساءة هذه تكون الأكبر عندما N=3 (أصغر قيمة لـــ N يوجد من أجلها هذه الفئة من الصفائح الطبقية) وتتناقص بتناسب مع 1/N عندما يزداد N (انظر الفقرة 4.4.4). والآن في عبارات معاملات جساءة الاستطالة والانحناء A_{16} و D_{16} ،

$$A_{16} = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{16}\right)_k (z_k - z_{k-1}) \tag{4.46}$$

$$D_{16} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N}\left(\overline{Q}_{16}\right)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \qquad (4.47)$$

حيث يكون A_{16} و D_{16} بوضوح مجموع حدود متناوبة الإشارة لأن

$$\left(\overline{Q}_{16}\right)_{+\alpha} = -\left(\overline{Q}_{16}\right)_{-\alpha} \qquad (4.48)$$

لهذا، فمن أجل صفائح طبقية متناظرة متعددة الطبقات المائلة، يمكن أن تكون قيم A_{16} ، A_{26} ، D_{16} و D_{26} صغيرةً تماماً عند مقارنتها بـــ A_{ij} و D_{ij} الأخرى على التوالي.

ولدى اعتبار ميزة B_{ij} المساوية للصفر، والمحققة على الدوام بسبب التناظر بالإضافة إلى A_{16} ، A_{26} ، D_{16} و D_{26} السفلي، فإن الصفائح الطبقية المتناظرة متعددة الطبقات المائلة يمكن أن توفر تبسيطات عملية ذات مزايا ومغزى بالنسبة إلى الصفائح طبقية أكثر عمومية. زد على ذلك أن الصفائح الطبقية المتناظرة متعددة الطبقات المائلة توفر جساءة قص أكثر مما توفره الصفائح الطبقية المتناظرة متعددة الطبقات المتصالبة، وهذا ما يجعل استعمالها أكثر شيوعاً. على الرغم من ذلك، فمن الجوهري أن يعرف المحلل أو المصمم أثر A_{16} ، A_{26} ، D_{16} و D_{26} في الأنواع المفردة للمسائل المعتبرة لأن قيماً صغيرةً لــ A_{16} و D_{26} يمكن أن تسبّب نتائج استجابة مختلفة نوعياً عن تلك الحالات التي تكون فيها معاملات الجساءة مساوية الصفر تماماً. ويمكن فقط في الحالة التي يكون فيها A_{16} ، A_{26} ، D_{16} و D_{26} مساوية الصفر تماماً، تجاهلها بدون أي تفكيرٍ أو تحليلٍ إضافي.

الصفائح الطبقية المتناظرة ذات طبقات متعددة غير متماثلة المناحي

في الحالة العامة لصفيحة طبقية ذات طبقات متعددة غير متماثلة المناحي متناظرة بالنسبة إلى السطح الأوسط، لا يوجد أي تبسيط للجساءة باستثناء حذف الـــ B_{ij} بفضل التناظر. وتوجد كل معاملات الجساءة A_{16}، A_{26} ، D_{16} و D_{26} التي لا تنتهي بالضرورة نحو الصفر مع زيادة عدد الطبقات. فمعامل الجساءة A_{16}، على سبيل المثال، يشتق من مصفوفة Q_{ij} في المعادلة (2.84) من أجل رقاقة غير متماثلة المناحي التي تمتلك بالتأكيد خصائص مادة مستقلة أكثر من رقاقة ثلاثية المناحي. من هنا، فإن تبسيطات الجساءة الممكنة من أجل صفائح طبقية أخرى لا يمكن تطبيقها من أجل هذه الفئة.

3.3.4 الصفائح الطبقية ذات التناظر المعاكس

يعتبر عموماً تناظر صفيحة طبقية بالنسبة إلى السطح الأوسط مرغوباً من أجل تحاشي الإقران بين الانحناء والاستطالة. مع ذلك، فإن تطبيقات فيزيائية متعددة للمواد المركبة الصفائحية تتطلب صفائح طبقية غير متناظرة من أجل تلبية متطلبات التصميم. من الضروري، على سبيل المثال، وجود بعض أشكال الإقران لجعل شفرات مروحة عنفة نفاثة مسبقة الفتل بدون استخدام قالب معقد. وكمثال إضافي، إذا توجب زيادة جساءة القص لصفيحة طبقية مصنّعة من رقاقات ذات ألياف أحادية الاتجاه، فإن الطريقة الأحادية لتحقيق هذا الشرط هي في توضع الطبقات على زاوية معيّنة بالنسبة إلى محاور الصفيحة الطبقية. ومن أجل الاستجابة لمتطلبات الوزن والكلفة، فمن الضروري استخدام عدد مزدوج من هذه الطبقات وفق توجيهات تتناوب من طبقة إلى أخرى، أي [α − /α+ /α − /α+]. لهذا، يتم تدمير التناظر بالنسبة إلى السطح الأوسط، ويمكن أن تتغير بشكل ملموس مميزات سلوك الصفيحة الطبقية بالنسبة إلى حالة التناظر. وعلى الرغم من أن مثال الصفيحة الطبقية ليس متناظراً، فإنه معاكس التناظر (antisymmetric) بالنسبة إلى السطح الأوسط، كما إن بعض تبسيطات الجساءة (متانة الانفعال) تكون ممكنة.

يتطلب التناظر المعاكس لصفيحة طبقية (1) التناظر بالنسبة إلى السطح الأوسط للشكل الهندسي (أي نعتبر زوجاً متساوي السماكة من الرقاقات، واحدة على مسافة معينة فوق السطح الأوسط والأخرى على نفس المسافة تحت السطح الأوسط)، لكن (2) مع بعض أنواع "الانقلاب" أو صورة المرآة لخصائص المادة $\left[\overline{Q}_{ij}\right]_k$ في الحقيقة، تكون خصائص مادة ثلاثية المناحي $\left[\overline{Q}_{ij}\right]_k$ متناظرة، لكن توجيهات الاتجاهات الرئيسية لمادة الرقاقة ليست متناظرة بالنسبة إلى السطح الأوسط. فهذه التوجيهات تنقلب من $0°$ إلى $90°$ (أو بالعكس) أو من α+ إلى α − (صورة مرآة بالنسبة إلى المحور x للصفيحة الطبقية). وبما أن $\left[\overline{Q}_{ij}\right]_k$ ليست متناظرة، يحصل إقران بين الانحناء والاستطالة.

يجب أن تمتلك الصفائح الطبقية معاكسة التناظر عدداً مزدوجاً من الطبقات إذا كانت الرقاقات المتجاورة تمتلك أيضاً إشارات متناوبة لاتجاهات خصائص المادة الرئيسية بالنسبة إلى المحاور الصفيحة الطبقية. أما إذا كانت الرقاقات المتجاورة لا تمتلك إشارات متناوبة، فإن عدد الطبقات لا يحتاج أن يكون مزدوجاً.

في حالة الصفيحة الطبقية معاكسة التناظر ذات الرقاقات غير متماثلة المناحي، لا تختزل معاملات الجساءة بالنسبة إلى تلك الواردة في المعادلات (4.22) و(4.23). وبسبب التناظر المعاكس لخصائص المادة لرقاقات عامة[2] ثلاثية المناحي متناظرة السماكات، فإن معامل الجساءة A_{16} للإقران قص– استطالة:

$$A_{16} = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{16}\right)_k (z_k - z_{k-1}) \tag{4.49}$$

يكون بوضوح مساوٍ الصفر بسبب:

$$(\overline{Q}_{16})_{+\alpha} = -(\overline{Q}_{16})_{-\alpha} \tag{4.50}$$

كما تمتلك الطبقات المتناظرة بالنسبة إلى السطح الأوسط سماكة متساوية، وبالتالي نفس قيمة الحد الهندسي لجداء $(\overline{Q}_{16})_k$. وبالتشابه، يكون A_{26} مساوياً الصفر، كما هو معامل الجساءة (متانة الانفعال) للإقران انحناء– فتل D_{16}:

$$D_{16} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{16}\right)_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \tag{4.51}$$

ويعود ذلك أيضاً لأن المعادلة (4.51) تتحقق كما أن الحد الهندسي لجداء $(\overline{Q}_{16})_k$ هو نفسه من أجل طبقتين متناظرتين بالنسبة إلى السطح الأوسط. وينطبق التحليل السابق أيضاً من أجل D_{26}.

تتغير معاملات جساءة الإقران انحناء– استطالة B_{ij} من أجل فئات مختلفة معاكسة التناظر من الصفائح الطبقية ذات الرقاقات ثلاثية المناحي عامة، ولا يوجد في الواقع تمثيل عام غير ذلك في محصلات القوة والعزم التاليين:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{\circ} \\ \varepsilon_y^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{4.52}$$

---

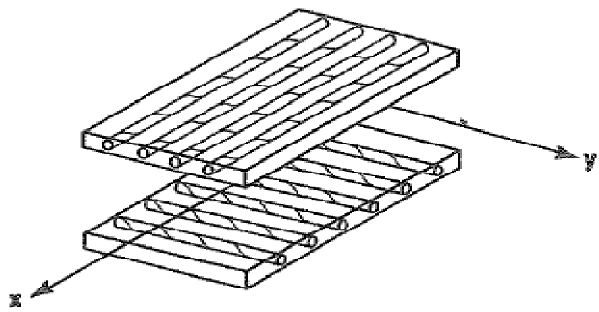
[2] نظراً إلى وجود الإقران انحناء– استطالة، فإن مصطلحي "ثلاثي المناحي عام" و "ثلاثي المناحي خاص" ليس لهما من معنى سوى بالنسبة إلى طبقة منفردة، وليس لصفيحة طبقية.

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \qquad (4.53)$$

يهدف ما يتبقى في هذه الفقرة إلى مناقشة فئتين مهمتين من الصفائح الطبقية معاكسة التناظر أي الصفائح الطبقية معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة والصفائح الطبقية معاكسة التناظر ذات الرقاقات المائلة. مع أنه لا يستخدم أيٌّ منهما في الممارسة العملية، إلا أن كليهما يضيف إلى فهمنا للصفائح الطبقية.

الصفائح الطبقية معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة

تتألف صفيحة طبقية معاكسة التناظر ذات رقاقات متصالبة من عدد مزدوج من الرقاقات ثلاثية المناحي المتوضعة فوق بعضها البعض، حيث تتناوب الاتجاهات الرئيسية للمادة بزاوية 0° و90° بالنسبة إلى المحاور الصفيحة الطبقية، كما في المثال البسيط في الشكل 4-19. ويعطي الجدول 4-4 مثالاً أكثر تعقيداً (حيث لا تمتلك الطبقات المتجاورة دائماً التتالي 0° يليه 90° يليه 0°، إلخ)، ولا تمتلك مثل هذه الصفائح الطبقية A_{16} أو A_{26} أو D_{16} أو D_{26}، لكنها تمتلك إقراناً انحناء- استطالة. وسنرى فيما بعد أن هذا الإقران يؤدي إلى محصلات قوة وعزم.



شكل 4-19: منظر بدون ترابط لصفيحة طبقية ذات طبقتين منتظمتين معاكستي التناظر متصالبتـــيـــن

الجدول 4-4: صفيحة طبقية من ست طبقات ثلاثية المناحي خاصة

السماكات	التوجيه	خصائص المادة				الطبقة
		Q_{66}	Q_{22}	Q_{12}	Q_{11}	
t	0°	F_4	F_3	F_2	F_1	1
3t	90°	G_4	G_3	G_2	G_1	2
2t	90°	H_4	H_3	H_2	H_1	3
2t	0°	H_4	H_3	H_2	H_1	4
3t	0°	G_4	G_3	G_2	G_1	5
t	90°	F_4	F_3	F_2	F_1	6

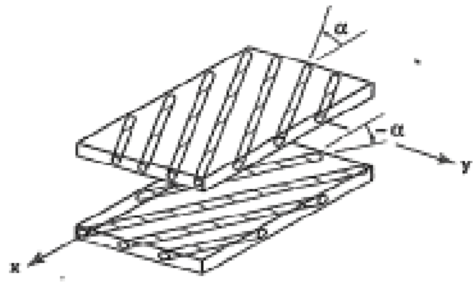
$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

تعرف الصفيحة الطبقية المنتظمة معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة بأنها تمتلك رقاقات متساوية السماكة جميعها، وبأنها شائعة نظراً إلى بساطة التصنيع. ومع زيادة عدد الطبقات، يمكن بيان أن معامل جساءة الإقران انحناء- استطالة B_{11} يقترب من الصفر.

الصفائح الطبقية معاكسة التناظر ذات الرقاقات المائلة

تمتلك الصفيحة الطبقية معاكسة التناظر ذات الرقاقات المائلة رقاقات تميل بزاوية α + بالنسبة إلى محاور إحداثيات الصفيحة الطبقية على أحد جانبي السطح الأوسط يقابلها رقاقات مساوية السماكة وتميل بزاوية α – على الجانب الآخر، وعلى نفس المسافة من السطح الأوسط. يظهر الشكل 4–20 مثالاً بسيطاً لصفيحة طبقية معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة. ويعطي الجدول 4–5 مثالاً أكثر تعقيداً مع موادّ وزوايا تصفيح مختلطة.



شكل 4-20: منظر بدون ترابط لصفيحة طبقية ذات طبقتين منتظمتين معاكستي التناظر مائلتين

جدول 4-5: صفيحة طبقية من ست طبقات معاكسة التناظر مائلة

الطبقة	خصائص المادة				الاتجاه	السماكات
	Q_{11}	Q_{12}	Q_{22}	Q_{66}		
1	F_1	F_2	F_3	F_4	- 45°	t
2	G_1	G_2	G_3	G_4	+ 30°	2t
3	H_1	H_2	H_3	H_4	0°	3t
4	H_1	H_2	H_3	H_4	0°	3t
5	G_1	G_2	G_3	G_4	- 30°	2t
6	F_1	F_2	F_3	F_4	+ 45°	t

من أجل سهولة التصنيع، تمتلك الصفيحة الطبقية معاكسة التناظر ذات الرقاقات المائلة رقاقات جميعها من نفس المادة والسماكة. ويمكن أيضاً أن تقتصر هذه الفئة من الصفائح الطبقية على قيمة واحدة لـــ α مقابل الاتجاهات المتعددة والمواد والسماكات في الجدول 4-5.

تكون محصلات القوة والعزم في صفيحة طبقية معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{\circ} \\ \varepsilon_y^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{4.56}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 \end{bmatrix}\right] \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{\circ} \\ \varepsilon_y^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{4.57}$$

يمكن بيان أن معاملي جساءة الإقران انحناء− استطالة B_{11} و B_{26} يقتربان من الصفر عندما يزداد عدد طبقات الصفيحة الطبقية مع ثبات سماكتها.

4.3.4 الصفائح الطبقية اللامتناظرة

تعتبر الصفائح الطبقية اللامتناظرة (unsymmetric) أو غير المتناظرة أكثر فئات الصفائح الطبقية عمومية. يمكن أن يحصل غياب التناظر بواسطة التصميم عبر البناء الإرادي لصفيحة طبقية غير متناظرة بالنسبة إلى السطح الأوسط. ويمكن أيضاً بناء صفيحة طبقية متناظرة وتعريضها خلال الخدمة للتسخين من جانب واحد حيث يؤدي التدرج الحراري المطبق على خصائص المادة المرتبطة بدرجة الحرارة إلى جعل الصفيحة الطبقية لامتناظرة. سنعالج بإيجاز الصفائح الطبقية اللامتناظرة ذات الطبقات المتعددة متماثلة المناحي، ثلاثية المناحي خاصة، ثلاثية المناحي عامة وغير متماثلة المناحي.

من أجل الحالة العامة للطبقات المتعددة متماثلة المناحي ذات السماكة t_k وخصائص المادة E_k و ν_k، تعطى معاملات الجساءة للاستطالة والإقران انحناء− استطالة وانحناء بالمعادلة (4.24) حيث:

$$(\overline{Q}_{11})_k = (\overline{Q}_{22})_k = \frac{E_k}{1-\nu_k^2} \qquad (\overline{Q}_{16})_k = (\overline{Q}_{26})_k = 0 \tag{4.58}$$

$$(\overline{Q}_{12})_k = \frac{\nu_k E_k}{1-\nu_k^2} \qquad (\overline{Q}_{66})_k = \frac{E_k}{2(1+\nu_k)}$$

عندما يكون t_k اعتباطياً، ليس من الممكن إجراء أي تخفيض خاص لمعاملات الجساءة. هذا يعني أنه يمكن حصول الإقران بين الانحناء والاستطالة باستخدام تنضيد غير متناظر حول السطح الأوسط لطبقات متماثلة المناحي مع خصائص مادة مختلفة وربما (لكن ليس بالضرورة) سماكات مختلفة. لهذا، لا يكون الإقران بين الانحناء والاستطالة نتيجةً للمادة ثلاثية المناحي، وإنما على الأرجح نتيجة عدم تجانس الصفيحة الطبقية أي تركيب كلٍّ من الهندسة وخصائص المادة. وتكون محصلات القوة والعزم:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{4.59}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^{\circ} \\ \varepsilon_y^{\circ} \\ \gamma_{xy}^{\circ} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \qquad (4.60)$$

ويمكن بيان أن الصفائح الطبقية اللامتناظرة ذات الطبقات المتعددة ثلاثية المناحي خاصة تمتلك محصلات قوة وعزم في المعادلتين (4.59) و(4.60)، ولكن مع A_{22} ، B_{22} و D_{22} عن A_{11} ، B_{11} و D_{11} مختلفة على التوالي. هذا يعني أنه لا يوجد حدود إقران قص− استطالة، ولا أية حدود للإقران انحناء – فتل بحيث يكون حل المسائل لهذا النوع من التنضيد الصفائحي سهلاً، كما هو الحال مع الطبقات متماثلة المناحي.

تمتلك الصفائح الطبقية اللامتناظرة ذات الطبقات المتعددة ثلاثية المناحي عامة، أو ذات الطبقات المتعددة غير متماثلة المناحي محصلات قوة وعزم ليست أسهل من المعادلتين (4.22) و(4.23). فكل معاملات الجساءة ظاهرة. من هنا، يكون تحليل التشكيلات التي تمتلك مثل تلك الرقاقتين أكثر صعوبة من تحليل التشكيلات التي تمتلك طبقات متعددة متماثلة المناحي أو طبقات متعددة ثلاثية المناحي خاصة.

5.3.4 تعاريف الصفيحة الطبقية الشائعة

نحتاج أولاً طريقةً عامة بدون إبهام لصياغة كيفية تحديد بناء الصفيحة الطبقية أي ترميز تتابع التنضيد. بعدئذ، يتم تعريف الصفائح الطبقية شبه متماثلة المناحي، المتوازنة والهجينة.

ترميز تتابع التنضيد

يمكن أن تكون طريقة توصيف صفيحة طبقية باستعمال سماكات الطبقة المنفردة وتوجيهات خاصة المادة الرئيسية وتتابع التنضيد (stacking−sequence) الإجمالي ملتبسةً تماماً. ومع ذلك، ولحسن الحظ، تُمثل كلُّ المعاملات الهامة بطريقة بسيطة وموجزة باستخدام مصطلحات تتابع التنضيد التالية. من أجل الصفائح الطبقية المنتظمة (متساوية سماكات الطبقات)، يكفي جدول الطبقات وتوجيهاتها مثل [0°/90°/45°]. لاحظ أنه يحتاج الأمر فقط إعطاء توجيهات اتجاهات المادة الرئيسية. من الممكن بناء عددٍ من الصفائح الطبقية باستخدام نفس الطبقات، [90˚/0˚/45˚]. في حالة الصفائح الطبقية غير المنتظمة (لا تمتلك الطبقات نفس السماكة)، يجب إلحاق رمز سماكات الطبقات إلى الترميز السابق،

مثل $[0^\circ_t/90^\circ_{2t}/45^\circ_{3t}]$ أو $[0^\circ @ t/90^\circ @ 2t/45^\circ @ 3t]$. أخيراً، من أجل الصفائح الطبقية المتناظرة مثل الصفيحة الطبقية [0°/90°/45°/45°/90°/0°] يكون أبسط تمثيل $[0°/90°/45°]_{متناظر}$ أو $[0°/90°/45°]_{متناظر}$ او $[0°/90°/45°]_{م}$. إذا وقعت عدة رقاقات عند نفس الزاوية، يتم استخدام لاحقة سفلى للإشارة إلى عدد هكذا طبقات متعددة مثل[0°/0°/0°/90°/90°]= $\left[0^\circ_3/90^\circ_2\right]$. إذا تكررت تتابعات الرقاقات، يتم تجميع هذه التتابعات مع لاحقة سفلي للإشارة إلى عدد تكرار التتابع مثل [0°/90°/45°/0°/90°/45°]= $[0°/90°/45°]_2$. إذا قسمت طبقة بالتساوي بواسطة السطح الأوسط، يوضع خط فوقها مثل [0°/90°/0°]= $\left[0°/\overline{90°}\right]_s$. أخيراً، إذا تم تحديد كل الرقاقات في تتابع التنضيد المبيّن، وفي حال غياب آثار التناظر وعدم الرغبة في تكرار التتابعات وفي التسامح مع أيّ التباس، يستخدم اللاحقة السفلي T للإشارة إلى التحديد الكامل أو الكلي للتأكيد مثل $[0°/90°/0°-45°/0°/90]_T$ أي إنه لا رغبة في التناظر أو تكرار التتابع. سيستخدم هذا الترميز في ما تبقى من هذا الكتاب، كما أنه مستخدم عموماً في ممارسة البنى المركبة.

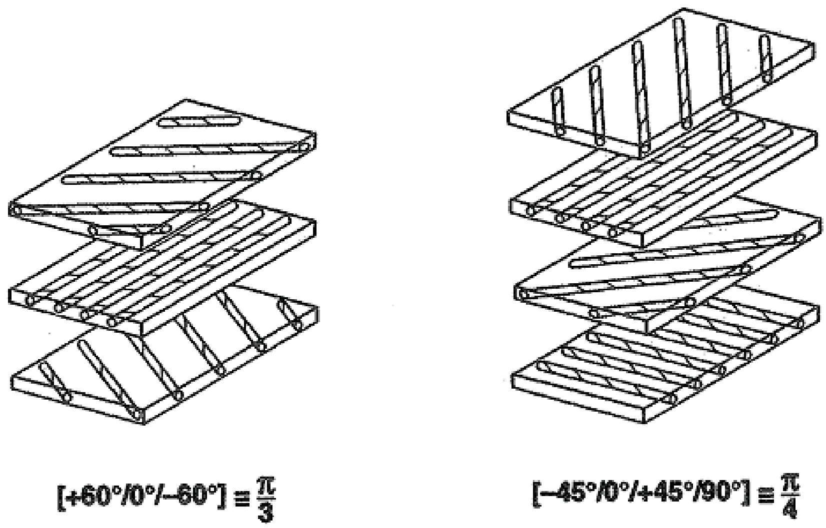
الصفائح الطبقية شبه متماثلة المناحي

يستخدم تعبير شبه متماثلة المناحي (quasi–isotropic) لوصف الصفائح الطبقية التي تمتلك معاملات جساءات مستطالة متماثلة (extensional stiffnesses) المناحي (هي نفسها في كل الاتجاهات في مستوي الصفيحة الطبقية). وكخلفية للتعريف، لنتذكر أن تعبير متماثل المناحي يمثل خاصية مادة حيث تتعلق معاملات جساءة الصفيحة الطبقية بخصائص المادة وهندستها. لاحظ أيضاً أن البادئة شبه تعني "بمعنى ما أو بطريقة ما". لهذا، يجب أن تعني صفيحة طبقية شبه متماثلة المناحي أنها تظهر تماثل مناحي في اتجاه ما، لكنها ليست متماثلة المناحي فعلياً في جميع الاتجاهات. وفي هذه الحالة، تعني صفيحة طبقية شبه متماثلة المناحي أنها متساوية معاملات جساءة الاستطالة في كل اتجاهات مستوي الصفيحة الطبقية، أي إن:

$$A_{11}=A_{22} \qquad A_{12}=\nu A_{11} \qquad A_{66}=\frac{1-\nu}{2}A_{11} \qquad A_{16}=A_{26}=0 \qquad (4.61)$$

$$\overline{A}_{ij}=A_{ij}$$

حيث يستخدم الخط العلوي للإشارة إلى خاصية محولة كما هو الحال في Q_{ij} و $\overline{Q}_{ij}$ ويمثل ν نسبة بواسون (Poisson) للصفيحة الطبقية المعرَّفة فقط من أجل خصائص الاستطالة. إضافة إلى ذلك، تكون جميع الطبقات من نفس المادة ومتساوية السماكة. (في تعريف آخر للصفيحة الطبقية شبه متماثلة المناحي، هي الصفيحة التي تمتلك معاملات جساءة انحناء متساوية في جميع اتجاهات المستوي). ويتمثل أبسط مثال على صفيحة طبقية شبه متماثلة المناحي في الصفيحة التي تحتوي على ثلاث طبقات [$-60°/0°/60°$]. والمثال الثاني هو مثال صفيحة طبقية من أربع طبقات [$-0°/90°/45°/45°$]. تمثل هذه الصفائح الطبقية في الشكل 4-21 حيث يستخدم الرمز $\pi/3$ و $\pi/4$. وتنتج الأسماء $\pi/3$ و $\pi/4$ عن (1) أن الزاوية بين الطبقات هي $60°$ و $45°$ على التوالي و (2) $60°$ و $45°$ هي $\pi/3$ و $\pi/4$ على التوالي في نظام الوحدات الدولية. ومع زيادة عدد الطبقات، تتناقص الزاوية بين الرقاقات المتجاورة بشكل يكون $\Delta\theta= 180°/N$ حيث يمثل N عدد الطبقات. ومع أن A_{ij} تكون متماثلة في جميع الاتجاهات، فإن B_{ij} و D_{ij} تتعلق بتوجيه المحاور الإحداثية للصفيحة الطبقية. لهذا، يمكن أن تمتلك صفيحة طبقية شبه متماثلة المناحي إقران انحناء- استطالة و أيضاً استجابة انحناء متغيرة عندما تدور الصفيحة الطبقية ضمن المستوي.



الشكل 4-21: منظر بدون ترابط لصفائح طبقية بسيطة شبه متماثلة المناحي

الصفائح الطبقية المتوازنة

على الرغم من أن كلمة "متوازنة" ملتبسة وليست محددة، فإن المعنى الشائع لصفيحة طبقية متوازنة (balanced laminates) هو الصفيحة الطبقية التي تكون فيها كل الرقاقات متساوية السماكة مع زوايا θ، غير الزاوية °0 و °90، بالنسبة إلى المحاور المرجعية فقط في الأزواج θ±. وليس بالضرورة أن تتجاور الطبقات المنفردة θ+ و θ−. لاحظ أيضاً أن الصفائح الطبقية المتوازنة ينبغي أن تكون متناظرة بالنسبة إلى السطح الأوسط للصفيحة الطبقية بحيث إنه يجب أن يتواجد رقاقتان θ+ ورقاقتان θ− من أجل كل زوج θ±. وتكون مميزات السلوك لصفيحة طبقية متوازنة بحيث لا يوجد إقران قص− استطالة، ولا إقران انحناء− استطالة. ومع ذلك، يوجد إقران انحناء− فتل.

الصفائح الطبقية الهجينة

تعتبر الصفائح الطبقية الهجينة (hybrid laminates) خليطاً من نظامين أو أكثر من المواد لتشكيل صفيحة طبقية. وعلى سبيل المثال، تستخدم رقاقات غرافيت− إيبوكسي مع رقاقات ألياف كفلار− 49®− إيبوكسي لتوليد بنية ناعمة جناح−إلى− هيكل من أجل طائرات بوينغ 757 و 767. لاحظ أنه يجب أن يكون راتنجا اللاإيبوكسي متوافقين في المعالجة الحرارية لتحقيق صفيحة طبقية وظيفية. من هنا، تمزج غالباً أنظمة ألياف مختلفة في الصفائح الطبقية الهجينة، لكن بالمقابل لا يمكن استخدام الكثير من الأنظمة المختلفة للمصفوفة. وكمثال لصفيحة طبقية من الغرافيت− إيبوكسي محاطة بطبقات من ألياف البورون− إيبوكسي يمكن كتابتها وفق $\left[0^{\circ}_{B}/\pm 45^{\circ}_{G}/90^{\circ}_{G}\right]_{S}$. لاحظ أن هذه الصفيحة الطبقية ليست شبه متماثلة المناحي لأن الرقاقات، مع أنها ذات توجيه زاوي صحيح في صفيحة طبقية $\pi/4$، إلا أنها تتكون من أنظمة مختلفة من المواد.

6.3.4 ملاحظات تلخيصية

لا تظهر الصفائح الطبقية المنفردة الطبقة إقراناً بين الانحناء والاستطالة إذا اتخذ السطح المرجعي هو السطح الأوسط (إن مثل هذه التشكيلات ليست صفائح طبقية، لكن معاملات جساءة الصفيحة الطبقية يجب أن تختصر إلى معاملات جساءة الطبقة المنفردة). ومع أيّ سطح مرجعي آخر، هناك حقاً مثل هذا الإقران. وتظهر الصفائح الطبقية متعددة

الطبقات عموماً إقراناً بين الانحناء والاستطالة. ويتأثر الإقران على السواء بمميزات هندسية ومميزات خاصة بمادة الصفائح الطبقية. هناك مع ذلك دمج للمميزات الهندسية والخاصة بالمادة حيث لا يحصل فيها إقران بين الانحناء والاستطالة. وقد تمّ مراجعة هذه الحالات الخاصة في هذه الفقرة، بالإضافة إلى حالات خاصة أخرى. ومن الضروري فهم كل الحالات الخاصة جيداً من أجل تقدير الصفائح الطبقية الأكثر تعقيداً. لاحظ من مجموعة الحالات الخاصة أن تناظر الرقاقات المرن (سواء كان متماثل المناحي أو ثلاثي المناحي، إلخ) ليس بالضرورة محفوظاً في الصفيحة الطبقية. ويمكن للتناظر أن يزداد أو يتناقص أو يبقى كما هو. زد على ذلك، أن تناظرات مصفوفات الجساءة الثلاثة A، B و D لا تحتاج أن تكون هي نفسها. وتدخل في حسابات الجساءة عوامل هندسية لا يمكن تحاشيها.

يجب تفهم المفهوم الأساسي للإقران بين الانحناء والاستطالة لأن هناك تطبيقات متعددة للمواد المركبة حيث يمكن أن يكون إهمال الإقران كارثياً. ويعتبر هذا الإقران المفتاح من أجل التحليل الصحيح للصفائح والقواقع المقواة محورياً. ولقد بيّن Card وJones أنه إذا وضعت دعائم طولية خارج بنية قوقعة اسطوانية دائرية محملة محورياً، فإن حمل الإنبعاج يكون ضعف قيمته عند وضع نفس الدعائم على السطح الداخلي للقوقعة. تم في السابق تجاهل الإقران انحناء- استطالة بين الدعائم والقوقعة. وبنفس الطريقة، سيتم في الفصل الخامس بيان الفوارق ذات المغزى في الصفائح المتشكلة بالتصفيح.

3.4 مجموعة المسائل

1.3.4 بَرْهِنْ أن معاملات جساءة الإقران انحناء- استطالة B_{ij} تكون مساوية للصفر من أجل الصفائح الطبقية المتناظرة من حيث خصائص المادة والهندسة بالنسبة إلى السطح الأوسط.

2.3.4 إعتبر رقاقتين ذات اتجاهي مادة رئيسية تشكلان الزاويتين α+ و α− بالنسبة إلى المحاور مرجعية. أثبت أنه من أجل موادّ ثلاثية المناحي:

$$(\overline{Q}_{16})_{+\alpha} = -(\overline{Q}_{16})_{-\alpha}$$

ناقش فيما إذا كانت هذه العلاقة صالحة من أجل المواد غير متماثلة المناحي. بتعبير آخر، أَثْبِتْ في ما إذا كانت صفيحة طبقية، ذات رقاقات مائلة بزاوية α±

من نفس الرقاقات غير متماثلة المناحي والمتناظرة هندسياً، معاكسة التناظر أم لا. معادلات التحويل لمواد غير متماثلة المناحي معطاة في الفقرة 7.2.

3.3.4 لا تسلك الصفائح الطبقية شبه متماثلة المناحي نفس سلوك المواد المتجانسة متماثلة المناحي. ناقش لماذا لا، وَصِفْ كيف يكون سلوكها. لماذا لا تكون صفيحة طبقية من رقاقتين وتتابع تنضيد [0°/90°] وسماكة طبقات متساوية صفيحة طبقية شبه متماثلة المناحي؟ بيِّن في ما إذا كانت معاملات جساءة الاستطالة نفسها مهما كانت محاور الصفيحة الطبقية وذلك في حالتي رقاقتين أو ثلاث رقاقات. تلميح: استخدم الخصائص اللامتغيرة في المعادلة (2.93).

4.3.4 بيّن أن B_{16} و B_{26}، من أجل صفيحة طبقية معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة وسماكة طبقات متساوية من نفس المادة، تقتربان من الصفر إذا تزايد العدد المزدوج للطبقات (متساوية السماكة)، وإذا بقيت السماكة الكلية للصفيحة الطبقية ثابتة. ماذا يحصل إذا أضيفت طبقات متساوية السماكة، بحيث تزداد السماكة الكلية للصفيحة الطبقية؟ في كلتا الحالتين، وسِّع (Develop) المعادلتين B_{16} و B_{26} التي يمكنك دراستهما، تعديلهما واستعمالهما تغييرها واستعماله لتحديد أجوبتك.

5.3.4 بيّن أن $A_{16}= A_{26}= D_{16}= D_{26}=0$ من أجل الصفائح الطبقية المنتظمة معاكسة التناظر حيث تصنع كل طبقة متساوية السماكة من نفس المادة.

6.3.4 ابدأ من العبارة العامة للقوة في وحدة العرض، N_x، بدلالة التقوسات والانفعالات للسطح الأوسط لاشتقاق العبارة الخاصة لــ N_x من أجل صفيحة طبقية ذات طبقتين متساويتي السماكة [0°/90°]. يجب أن تكون عبارتك النهائية بدلالة Q_{ij} و سماكة الصفيحة الطبقية t. ماذا تسمّى مثل هذه الصفيحة الطبقية؟ ما هي مميزات الانفعال الذي تظهره هذه الصفيحة الطبقية عندما تخضع لــ N_x، أي ماذا تفعل هذه الصفيحة الطبقية؟

7.3.4 كرِّر كل أجزاء المسألة 6.3.4 من أجل العزم في وحدة العرض M_x.

8.3.4 تتألف صفيحة طبقية من رقاقات متساوية السماكة مقواة بألياف حيث يكون % 40 من الرقاقات أحادية الاتجاه وفق الاتجاه x و % 30 وفق زاوية °45+ بالنسبة إلى الاتجاه x وباقي % 30 وفق زاوية °45− بالنسبة إلى الاتجاه x. ما هو عدد الطبقات الأدنى لتحقيق النسب المعطاة تماماً؟ ما هو عدد الطبقات اللازم لتحاشي الإقران بين الانحراف والاستطالة إذا كان ذلك ممكناً حقاً؟ ما هو عدد الطبقات

اللازم لجعل هذه الصفيحة الطبقية ثلاثية المناحي ماكروياً (أي أنها تسلك سلوك طبقة منفردة ثلاثية المناحي)؟ أو أليست هي ثلاثية المناحي ماكروياً على الدوام؟ ناقش. حَدِّدْ في كلٍّ حالة تتابع تنضيد الصفيحة الطبقية.

4.4 معاملات جساءة الصفيحة الطبقية النظرية مقابل المقاسة

تمّ في الفقرات السابقة التوقع بمعاملات الجساءة لصفيحة طبقية بالاعتماد على تركيب معاملات جساءة الرقاقة وبالانسجام مع نظرية التصفيح التقليدية. ومع ذلك، يبقى الإنجاز العملي الحالي لتلك المعاملات موضوعاً للبرهان. يكمن هدف هذه الفقرة في مقارنة معاملات الجساءة المحسوبة لصفيحة طبقية بمعاملات الجساءة المقاسة لصفيحة طبقية لتحديد صلاحية نظرية التصفيح التقليدية. وسيتم عرض نتائج نوعين من الصفائح الطبقية، الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة و الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة.

1.4.4 مقلوب معادلات الجساءة

قبل مقارنة معاملات الجساءة المحسوبة بمعاملات الجساءة المقاسة، يتطلب الأمر إعادة تفسير موجزة لمعاملات جساءة صفيحة طبقية. تعطى عادةً محصلة القوى والعزوم بدلالة انفعالات الاستطالة والتقوسات للسطح الأوسط وفق:

$$\frac{N}{M}=\left[\frac{A}{B}+\frac{B}{D}\right]\left[\frac{\varepsilon^{\circ}}{\kappa}\right] \qquad (4.62)$$

لكن، في معظم التجارب، تطبق الحمولات وتقاس الانفعالات الناتجة، أي إن الانفعالات، وليست الحمولات، هي التي تشكل المتغيرات التابعة. لهذا، فإن عبارات انفعالات وتقوسات السطح الأوسط بدلالة محصلات القوة والعزم يمكن أن تكون مناسبة.

تتمثل الخطوة الأولى في اشتقاق مقلوب المعادلة (4.62) في كتابتها على الشكل التالي:

$$N = A\varepsilon^{\circ} + B\kappa \qquad (4.63)$$

$$M = B\varepsilon^{\circ} + D\kappa \qquad (4.64)$$

وحل المعادلة (4.63) من أجل ε° :

$$\varepsilon^\circ = A^{-1}N - A^{-1}B\kappa \tag{4.65}$$

حيث تصبح المعادلة (4.64)

$$M = BA^{-1}N + (-BA^{-1}B + D)\kappa \tag{4.66}$$

ويمكن كتابة المعادلتين (4.65) و(4.66) على الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^\circ \\ -- \\ M \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A^{-1} & -A^{-1}B \\ \hline BA^{-1} & D - BA^{-1}B \end{array}\right] \begin{bmatrix} N \\ -- \\ \kappa \end{bmatrix} \tag{4.67}$$

أو:

$$\varepsilon^\circ = A^{*}N - B^{*}\kappa \tag{4.68}$$

$$M = H^{*}N + D^{*}\kappa \tag{4.69}$$

حيث B^{*} لا يساوي H^{*}. والآن، حل المعادلة (4.69) من أجل κ:

$$\kappa = D^{*-1}M - D^{*-1}H^{*}N \tag{4.70}$$

واستبدل في المعادلة (4.68) للحصول على:

$$\varepsilon^\circ = B^{*}D^{*-1}M + (A^{*} - B^{*}D^{*-1}H^{*})N \tag{4.71}$$

وهكذا:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^\circ \\ -- \\ \kappa \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A^{*} - B^{*}D^{*-1}H^{*} & B^{*}D^{*-1} \\ \hline -D^{*-1}H^{*} & D^{*-1} \end{array}\right] \begin{bmatrix} N \\ -- \\ M \end{bmatrix} \tag{4.72}$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^{\circ} \\ -- \\ \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & | & B' \\ --- & + & -- \\ H' & | & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N \\ -- \\ M \end{bmatrix} \tag{4.73}$$

حيث يمكن بيان أن H' يساوي B' بفضل تناظر المصفوفات A و B و D وتعاريف المصفوفات A' و B' D' و A^* و B^* و D^*. بالتأكيد، يجب أن يتساوى H' و $(B')^T$ لأن مصفوفة المعاملات في المعادلة (4.62) متناظرة بحيث يجب أن يكون مقلوبها، مصفوفة المعاملات في المعادلة (4.73)، متناظر أيضاً. بهذا، يعتبر البرهان على أن القيم المتوقعة لــ A' و B' D' تتفق مع القيم المقاسة مكافئاً تماماً للتحقق من تقنيات التوقع من أجل A و B و D.

2.4.4 معاملات جساءة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة

تتألف الصفيحة الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة (cross-ply laminate) في هذه الفقرة من N طبقة (ثلاثية المناحي) مقواة محورياً، ومن نفس المادة حيث تكون اتجاهات المادة الرئيسية بشكل متناوب وفق الزاوية 0° و90° بالنسبة إلى المحاور الإحداثية للصفيحة الطبقية. يكون اتجاه الألياف في الطبقات ذات الأرقام المفردة موافقاً للاتجاه x للصفيحة الطبقية. وتأخذ الألياف في الطبقات ذات الأرقام المزدوجة الاتجاه y للصفيحة الطبقية. نعتبر الحالة الخاصة حيث تكون الطبقات ذات الأرقام المفردة متساوية السماكة، كما تكون الطبقات المزدوجة متساوية السماكة، لكن ليس بالضرورة نفس سماكة الطبقات المفردة. لاحظ أننا فرضنا متطلبات خاصة جداً حول تغيّر توجيهات الألياف من طبقة إلى أخرى، وحول سماكات الطبقات، وذلك لتعريف فئة فرعية خاصة من الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة. لهذا، تسمّى هذه الصفائح الطبقية بالصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة "الخاصة" ("special" cross-ply laminates) وسيتم استكشافها في هذه الفقرة الفرعية. ولا تتمتع الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الأكثر عمومية بمثل هذه الشروط على اتجاه الألياف وسماكات الرقاقات. وعلى سبيل المثال، يمكن وصف صفائح طبقية (عامة) ذات رقاقات متصالبة بتحديد $[0^{\circ} @ t / 90^{\circ} @ 2t / 90^{\circ} @ 2t / 0^{\circ} @ t]$ حيث لا يتناوب اتجاه الألياف، كما لا تكون سماكات الطبقات المفردة أو المزدوجة نفسها. ومع ذلك، تكون هذه الصفيحة الطبقية بوضوح صفيحة طبقية متناظرة ذات رقاقات متصالبة.

من أجل الصفيحة الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة، هناك عاملان أساسيان هامان: N، العدد الكلي للطبقات، و M، نسبة السماكة الكلية للطبقات المفردة إلى السماكة الكلية للطبقات المزدوجة (وتسمى نسبة الطبقات المتصالبة). من هنا:

$$M = \frac{\sum_{k=odd} t_k}{\sum_{k=even} t_k} \tag{4.74}$$

وكمثال، إذا أظهرت صفيحة طبقية من خمس طبقات تتابع تنضيد من النوع $[0^\circ_t / 90^\circ_{2t} / 0^\circ_t / 90^\circ_{2t} / 0^\circ_t]$، يكون:

$$M = \frac{t+t+t}{2t+2t} = \frac{3}{4} \tag{4.75}$$

لاحظ أن نسبة الطبقات المتصالبة، M، تتمتع بمعنى محدد فقط عندما تتمتع الطبقات بتوجيهات متناوبة 0° و 90° . إذا كانت الطبقة المتوسطة في المثال السابق مؤلفة من طبقتين وفق زاوية الاتجاه 0° وسماكة كل منهما t/2، يتبين بسهولة أن M تساوي واحداً. لكن، حينئذٍ، لا تظهر الطبقات توجيهاً متناوباً، كما لا تتمتع الطبقات المفردة بنفس السماكة. من هنا، يمكن وصف الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الأكثر عمومية باستخدام نسبة الطبقات المتصالبة، M.

معاملات جساءة الصفيحة الطبقية:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\overline{Q}_{ij})_k (Z_k - Z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (\overline{Q}_{ij})_k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \tag{4.76}$$

$$B_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} (\overline{Q}_{ij})_k (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)$$

يمكن التعبير عنها بدلالة M و N من أجل الصفائح الطبقية ذات عدد الطبقات المفرده أو المزوجة. إضافة إلى ذلك، يستخدم نسبة معاملات الجساءة الرئيسية للرقاقة F:

$$F = \frac{Q_{22}}{Q_{11}} = \frac{E_2}{E_1} \tag{4.77}$$

حيث تمثل F مقلوب نسبة معاملات المرونة العادية E_1/E_2. بيّن Tsai [6-4] معاملات الجساءة التالية للصفائح الطبقية حيث يمثل t سماكة الصفيحة الطبقية.

الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة ومع العدد N مفرد (المتناظرة):

$$A_{11} = \frac{1}{1+M}(M+F)Q_{11}t$$

$$A_{12} = Q_{12}t$$

$$A_{11} = \frac{1}{1+M}(1+MF)Q_{11}t = \frac{1+MF}{M+F}A_{11} \tag{4.78}$$

$$A_{16} = A_{26} = 0$$

$$A_{66} = Q_{66}t$$

$$B_{ij} = 0 \tag{4.79}$$

$$D_{11} = \frac{\left[(F-1)P+1\right]Q_{11}t^3}{12} = \left[(F-1)P+1\right]\frac{1+M}{M+F}\frac{A_{11}t^2}{12} \tag{4.80}$$

$$D_{16} = D_{26} = 0$$

$$D_{66} = \frac{Q_{66}t^3}{12}$$

حيث:

$$P = \frac{1}{(1+M)^3} + \frac{M(N-3)\left[M(N-1)+2(N+1)\right]}{(N^2-1)(1+M)^3} \tag{4.81}$$

الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة مع العدد N مزدوج (معاكسة التناظر):

$$A_{11} = \frac{1}{1+M}(M+F)Q_{11}t$$

$$A_{12} = Q_{12}t$$

$$A_{22} = \frac{1}{1+M}(1+MF)Q_{11}t = \frac{1+MF}{M+F}A_{11} \tag{4.82}$$

$$A_{16} = A_{26} = 0$$

$$A_{66} = Q_{66}t$$

$$B_{11} = \frac{M(F-1)}{N(1+M)^2}Q_{11}t^2 = \frac{M(F-1)}{N(1+M)(M+F)}A_{11}t$$

$$B_{22} = -B_{11} \tag{4.83}$$

$$B_{12} = B_{16} = B_{26} = B_{66} = 0$$

$$D_{11} = \frac{[(F-1)R+1]Q_{11}t^3}{12} = [(1-F)R+F]\frac{1+M}{M+F}\frac{A_{11}t^2}{12}$$

$$D_{12} = \frac{Q_{12}t^3}{12}$$

$$D_{22} = \frac{[(1-F)R+F]Q_{11}t^3}{12} = [(1-F)R+F]\frac{1+M}{M+F}\frac{A_{11}t^2}{12} \tag{4.84}$$

$$D_{16} = D_{26} = 0$$

$$D_{66} = \frac{Q_{66}t^3}{12}$$

حيث:

$$R = \frac{1}{1+M} + \frac{8M(M-1)}{N^2(1+M)^3} \qquad (4.85)$$

ملاحظات حول الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة

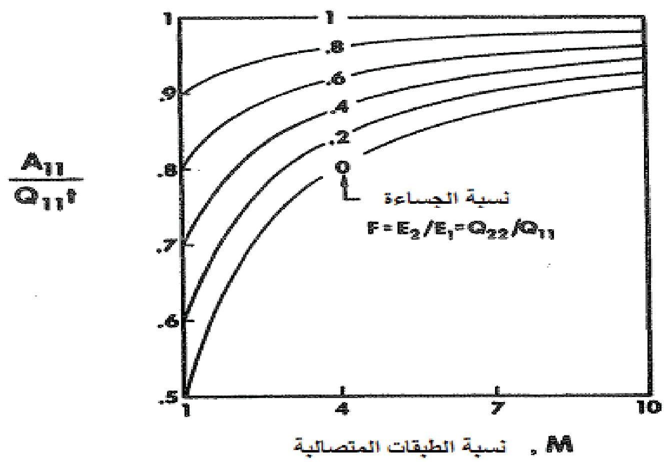
أعطيت معاملات جساءة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة من أجل الصفائح الطبقية المتناظرة بالمعادلات (4.78) حتى (4.80) ومن أجل الصفائح الطبقية معاكسة التناظر بالمعادلات (4.82) حتى (4.84). وستناقش بشكل منفصل في الفقرات التالية معاملات جساءة الاستطالة، الإقران انحناء- استطالة والانحناء.

في كلٍّ من الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة مفردة أو مزدوجة العدد، تكون معاملات جساءة الاستطالة A_{ij} مستقلة عن N، عدد الطبقات (على الرغم من أن سماكات N رقاقة منفردة يمكن أن تجمع للحصول على السماكة الكلية للصفيحة الطبقية t، وهكذا يكون N ضمنياً في المعادلتين (4.78) و (4.82)). وكما يظهر الشكلان 4-22 و4-23، فإن A_{11} و A_{22} يتعلقان بـــ M، نسبة الطبقات المتصالبة، و بـــ F، نسبة جساءة الرقاقة. فمن أجل رقاقة نموذجية مقواة بألياف زجاجية، F=0.3، لذا يتغير A_{11} من $0.65Q_{11}t$ إلى $0.93Q_{11}t$. عندما تتغير M من 1 إلى 10. وبالتشابه، يتغير A_{22} من A_{11} إلى $0.38A_{11}$. على نفس مدى M. تكون معاملتا الجساءة A_{12} و A_{66} مستقلة عن M وF. وتكون معاملتا الجساءة المتبقيتان A_{16} و A_{26} مساويتين للصفر من أجل كلّ الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة.

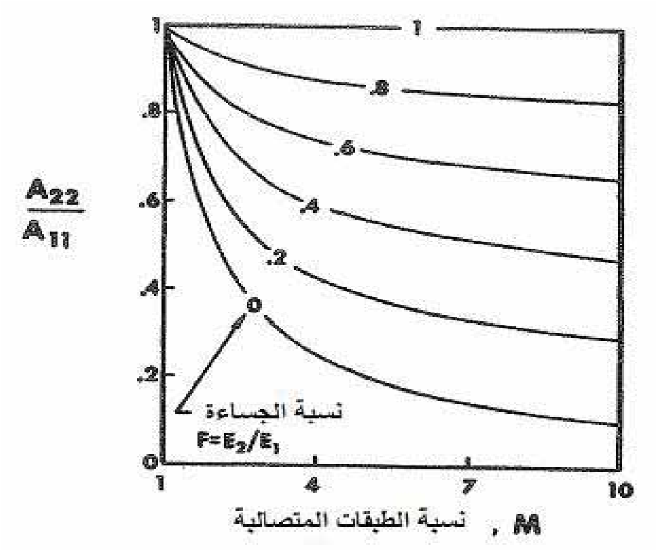
بما أن B_{ij} تساوي كلها الصفر من أجل الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة مع عدد طبقات مفرد، فلا تمتلك سوى الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة مع عدد طبقات مزدوج إقران انحناء- استطالة. يبيّن الشكل 4-24 تغير معاملي الجساءة للإقران انحناء- استطالة B_{11} و B_{22} بدلالة نسبة الطبقات المتصالبة، M. ويظهر عدد الطبقات N في صورة الكسر (البسط) للإحداثي الرأسي (محور y) في الشكل 4-24. لهذا، تتناقص بوضوح قيمة B_{11} عندما تتزايد N، وذلك لأن NB_{11} يكون ثابتاً من أجل نسبة طبقات متصالبة ثابتة. وحيث

يجب أن يكون N مزدوجاً للحصول على أيّ إقران، فإن N=2 توافق أكبر إقران بين الانحناء والاستطالة. يكمن التفسير الفيزيائي لمعامل جساءة الإقران انحناء– استطالة B_{11} في أنه مقياس لموقع المحور المحايد (عديم الإجهاد) بالنسبة إلى السطح الأوسط للصفيحة الطبقية.

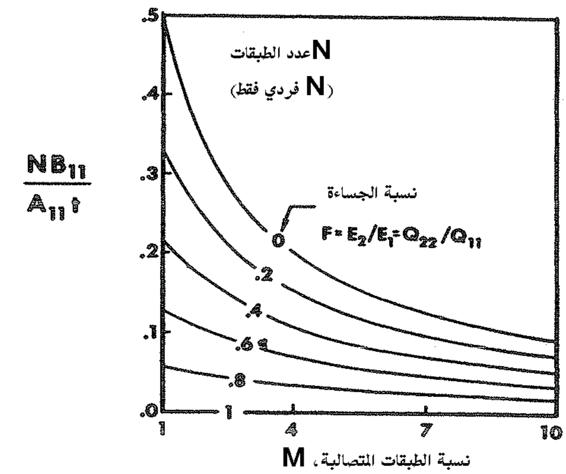
في الحقيقة، يمثل الإحداثي الرأسي في الشكل 4–24 نسبة السماكة الكلية للصفيحة الطبقية، T، التي ينزاح فيها المحور المحايد عن السطح الأوسط. ويكون الانزياح، مثل B_{11} ، متناسباً عكسياً مع N، وهكذا يكون انزياح المحور المحايد أصغر عندما يزداد عدد الطبقات. لاحظ أنه يوجد محور محايد في الاتجاه x مختلف عنه في الاتجاه y، أي أنه لا يوجد سطح محايد.



الشكل 4–22: معامل جساءة الاستطالة A_{11} بدلالة نسبة الطبقات المتصالبة M (عن Tsai [6–4])

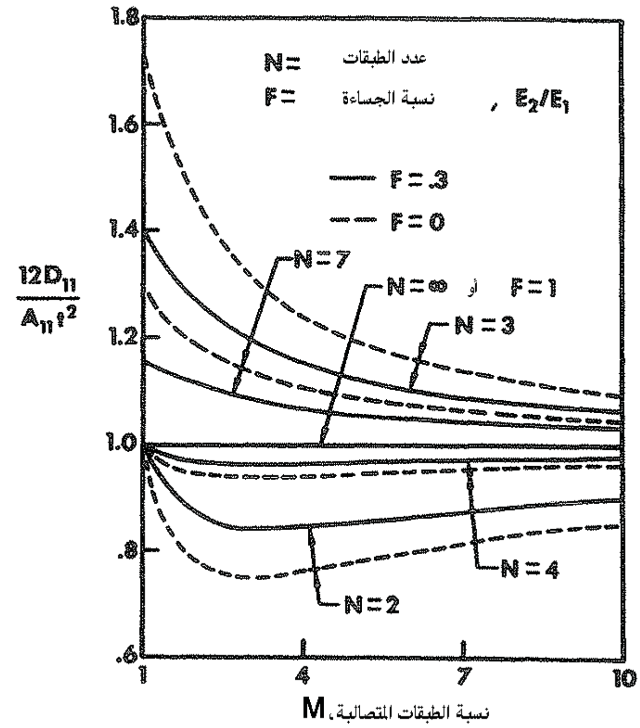


الشكل 4-23: معامل جساءة الاستطالة A_{22} بدلالة نسبة الطبقات المتصالبة M (عن Tsai [4-6])

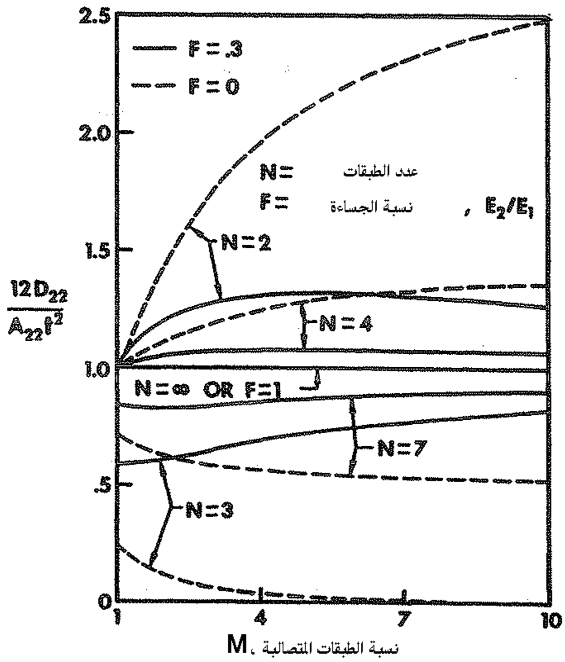


الشكل 4-24: معامل جساءة الإقران انحناء- استطالة B_{11} بدلالة نسبة الطبقات المتصالبة M (عن Tsai [4-6])

تعتبر معاملات جساءة الانحناء D_{ij} دالات معقدة لعدد الطبقات N، لنسبة الطبقات المتصالبة، M ولنسبة جساءة الرقاقة F. يبيّن الشكلان 4−25 و 4−26 القيم لــ D_{11} و D_{22} من أجل عدة قيم لــ F و N بدلالة M. تظهر القيم القصوى لــ D_{11} و D_{22} عندما N=2 و N=3 وتقع بينهما القيم الموافقة لكل قيم N الأخرى. تقترب قيمة D_{11} من $\frac{A_{11}t^2}{12}$ وقيمة D_{22} من $\frac{A_{22}t^2}{12}$ عندما (1) تصبح M كبيرة، (2) و N كبير أو (3) تقترب F من الواحد. وهكذا، من أجل بعض أنواع بنى الصفيحة الطبقية، يمكن أن تقترب معاملات الجساءة من تلك لصفيحة متجانسة أو لعنصر يشبه القوقعة.



الشكل 4−25: معامل جساءة الانحناء D_{11} بدلالة نسبة الطبقات المتصالبة M (عن Tsai [4−6])



الشكل 4–26: معامل جساءة الانحناء D_{22} بدلالة نسبة الطبقات المتصالبة M (عن Tsai [6-4])

3.4.4 معاملات الجساءة النظرية والمقاسة لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة

تم في الفقرة السابقة بيان أن الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة من طبقتين أو ثلاثٍ تتمتع بسلوكٍ حدّيّ (Extrssa). لهذا، لا بد أن تكون المقارنة بين معاملات الجساءة النظرية والمقاسة كاشفةً تماماً. فكل توافق في هذه الحالات يمكن أن يؤدي إلى توافقٍ مساوٍ أو أفضل في حالة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة من أكثر من ثلاث طبقات.

تتألف الرقاقة المفردة المستخدمة من قبل Tsai [6–4] من ألياف زجاجية أحادية الاتجاه في رابط راتنجي (U.S. Polymeric Co. E–787– NUF) مع معاملات معطاة في الجدول 2–3. تم بناء سلسلة من الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة حيث

M= 1, 2, 3, 10 من أجل الصفائح الطبقية ثنائية الطبقة و M= 1, 2, 5, 10 من أجل الصفائح الطبقية ثلاثية الطبقة. أخضعت الصفائح الطبقية لحمولات محورية وعزوم انحناء وقيست انفعالات السطح. بناءً على ذلك، يصبح طبيعياً استخدام علاقات الجساءة كانفعالات وتقوسات بدلالة القوى والعزوم، أي إن:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon \\ - \\ \kappa \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline B'^T & D' \end{array}\right] \begin{bmatrix} N \\ - \\ M \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

بهذا ستقارن القيم النظرية لـــ A' ، B' و D' مع القيم المقاسة. وسيؤدي التدقيق في مجموعة من معاملات الجساءة إلى التدقيق في المجموعة الأخرى لأن المجموعتين A ، B و D و A' ، B' و D' تمثل كلٌّ منهما مقلوبَ الأخرى (أي إن $A \neq A'^{-1}$ ، إلخ.).

تمّ إجراء الاختبارات على مجموعتين من العارضات حيث يشكل محور العارضة زاوية $0°$ و $90°$ على التوالي بالنسبة إلى اتجاه ألياف الطبقات مفردة الترقيم. كانت أبعاد العارضات:1-in (25.4 mm) للعرض، 0.12 بوصة (3mm) للسماكة، و6 بوصة (152mm) للامتداد (Span). تمّ وضع مجسّات الانفعال على السطحين العلوي والسفلي للعارضة بحيث يمكن حساب انفعالات وتقوسات السطح الأوسط من الحل المتزامن لـــ:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_i^{\circ} + \frac{t}{2}\kappa_i = \varepsilon_i^{upper} \\ &\varepsilon_i^{\circ} - \frac{t}{2}\kappa_i = \varepsilon_i^{lower} \\ &i = 1,2,6 \end{aligned} \quad (4.87)$$

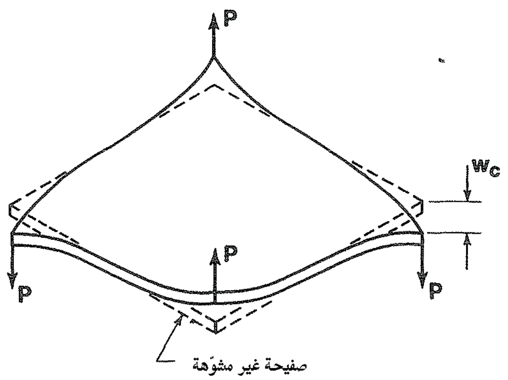
حيث t يمثل سماكة العارضة.

تمّ قياس معاملات الجساءة A'_{11} ، $A'_{12} = A'_{12}$ ، B'_{11} و B'_{12} بعد تطبيق شد محوري صرف، N_1 على عارضة زاويته $0°$؛ ومعاملات الجساءة B'_{11} ، $B'_{21} = B'_{12}$ ، D'_{11} و $D'_{21} = D'_{12}$ بعد تطبيق عزم انحناء صرف، M_1 على عارضة زاويتها $0°$. كما قيست معاملات الجساءة $A'_{12} = A'_{21}$ ، A'_{22} ، $B'_{21} = B'_{12}$ ، B'_{22} ، $D'_{12} = D'_{21}$ و D'_{22} على عارضة زاويتها $90°$. وتمّ استخدام فتل صرف على صفيحة مربّعة زاويتها $0°$ لقياس

D_{66} . وهذا يعني أنه تم تطبيق قوتين نحو الأعلى وقوتين نحو الأسفل على زوايا الصفيحة الأربع، كما في الشكل 4–27 حيث:

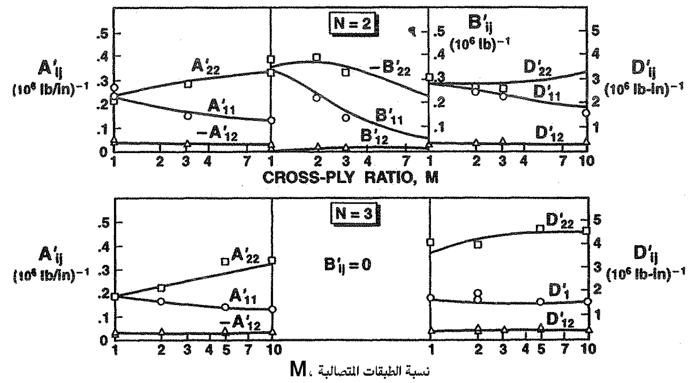
$$D_{66} = \frac{PL^2}{4W_c} \tag{4.88}$$

حيث يشير W_c إلى انحراف الزاوية. ولم يتم قياس معامل جساءة القص في المستوي A_{66} .

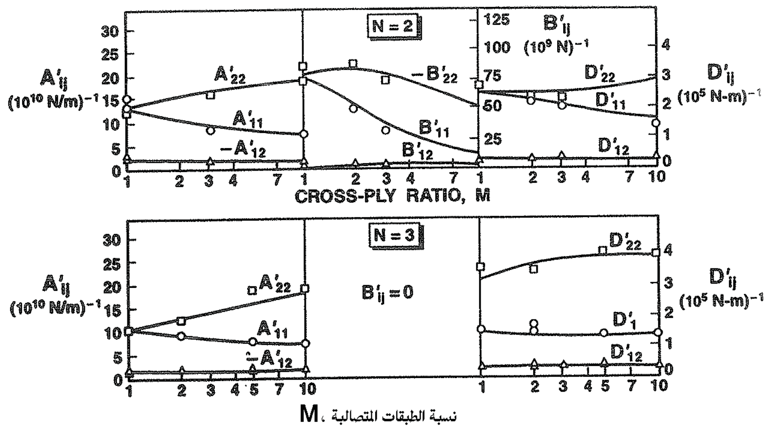


الشكل 4–27: فتل صفيحة مربعة

يظهر الشكل 4–28 معاملات الجساءة المقيسة لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة خاصة من طبقتين أو ثلاثٍ، وتظهر النتائج النظرية باستخدام خطوط قاتمة. وقد بقيت الحمولة، في كل الحالات، منخفضاً إلى درجة، بحيث لا يتجاوز الانفعال 500 ميكرون. لهذا، كان السلوك خطياً ومرناً. ويظهر الاتفاق بين النظرية والتجربة جيداً تماماً. كما تتحقق الجوانب الكيفية والكمية للنظرية. من هنا، تتوفر إمكانية التوقع بشكلٍ دقيقٍ بمعاملات جساءة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة.



الشكل 4−28 أ: معاملات الجساءة النظرية والمقاسة لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة خاصة (وحدات معيارية أمريكية) (عن Tsai [4−6])



الشكل 4−28 ب: معاملات الجساءة النظرية والمقاسة لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة خاصة (وحدات دولية SI) (عن Tsai [4−6])

4.4.4 معاملات جساءة الصفيحة الطبقية ذات الرقاقات المائلة الخاصة

تتألف الصفيحة الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة في هذه الفقرة من N طبقة (ثلاثية المناحي) مقواة محورياً، ومن نفس المادة حيث تكون اتجاهات المادة الرئيسية بشكل متناوب

وفق الزاوية α + و α - بالنسبة إلى المحور x للصفيحة الطبقية. وتكون الطبقات المفردة الترقيم على زاوية α - ، بينما تكون الطبقات المزدوجة الترقيم على زاوية α + . لنعتبر الحالة الخاصة لكن العملية حيث تمتلك كل الطبقات نفس السماكة، وهي حالة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة المنتظمة. وبسبب المتطلبات الخاصة حول كيفية تغير اتجاهات الألياف من طبقة إلى أخرى، والسماكات المتساوية لكل طبقة، تسمّى هذه الصفائح بالصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبةِ "الخاصة" وسيتم استكشافها في هذه الفقرة الفرعية. ولا تتمتع الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الأكثر عمومية بمثل هذه الشروط على اتجاه الألياف وسماكات الرقاقات.

وعلى سبيل المثال، يمكن لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة أن تكون $\left[45^{\circ} @ t/60^{\circ} @ 2t/60^{\circ} @ 2t/45^{\circ} @ t\right]_S$ حيث لا تتناوب توجيهات الألياف ولا تكون سماكات الرقاقات متماثلة، ومع ذلك، فالصفيحة الطبقية هي بوضوح صفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة متناظرة. ويمكن وصف سلوك الصفيحة الطبقية لهذه الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبةِ الخاصة بواسطة عدد الطبقات N، اتجاه الرقاقات، α ، ومعاملات جساءة الرقاقات، Q_{ij} ، بالإضافة إلى السماكة الكلية للصفيحة الطبقية، t. ويمكن التعبير عن معاملات جساءة الصفيحة الطبقية:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} (\overline{Q}_{ij})_k (Z_k - Z_{k-1})$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} (\overline{Q}_{ij})_k (Z_k^2 - Z_{k-1}^2) \qquad (4.89)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{N} (\overline{Q}_{ij})_k (Z_k^3 - Z_{k-1}^3)$$

بدلالة N، $\overline{Q}_{ij}$ (الذي يأخذ بالاعتبار α) و t من أجل الصفائح الطبقية ذات عدد الطبقات المزدوجة و عدد الطبقات المفردة. وفي كلتا الحالتين، يحسب $\overline{Q}_{ij}$ من أجل α – ويكون:

$$\overline{Q}_{11+\alpha} = \overline{Q}_{11-\alpha} \qquad \overline{Q}_{66+\alpha} = \overline{Q}_{66-\alpha}$$

$$\overline{Q}_{12+\alpha} = \overline{Q}_{12-\alpha} \qquad \overline{Q}_{16+\alpha} = \overline{Q}_{16-\alpha} \tag{4.90}$$

$$\overline{Q}_{22+\alpha} = \overline{Q}_{22-\alpha} \qquad \overline{Q}_{26+\alpha} = \overline{Q}_{26-\alpha}$$

وهذا ما يمكن تحقيقه بالتبديل في المعادلة (2.85). وقد بيّن Tsai في [4-6] معاملات الجساءة التالية:

$$\begin{aligned} &A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66} = \left(\overline{Q}_{11}, \overline{Q}_{12}, \overline{Q}_{22}, \overline{Q}_{66}\right)t \\ &A_{16}, A_{26} = \left(\overline{Q}_{16}, \overline{Q}_{26}\right)\frac{t}{N} \end{aligned} \tag{4.91}$$

$$B_{ij} = 0 \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned} &D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66} = \left(\overline{Q}_{11}, \overline{Q}_{12}, \overline{Q}_{22}, \overline{Q}_{66}\right)\frac{t^3}{12} \\ &D_{16}, D_{26} = \left(\overline{Q}_{16}, \overline{Q}_{26}\right)\frac{t^3}{12}\left[\frac{3N^2 - 2}{N^3}\right] \end{aligned} \tag{4.93}$$

الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة الخاصة و N زوجي (عكسية التناظر)

$$\begin{aligned} &A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66} = \left(\overline{Q}_{11}, \overline{Q}_{12}, \overline{Q}_{22}, \overline{Q}_{66}\right)t \\ &A_{16}, A_{26} = 0 \end{aligned} \tag{4.94}$$

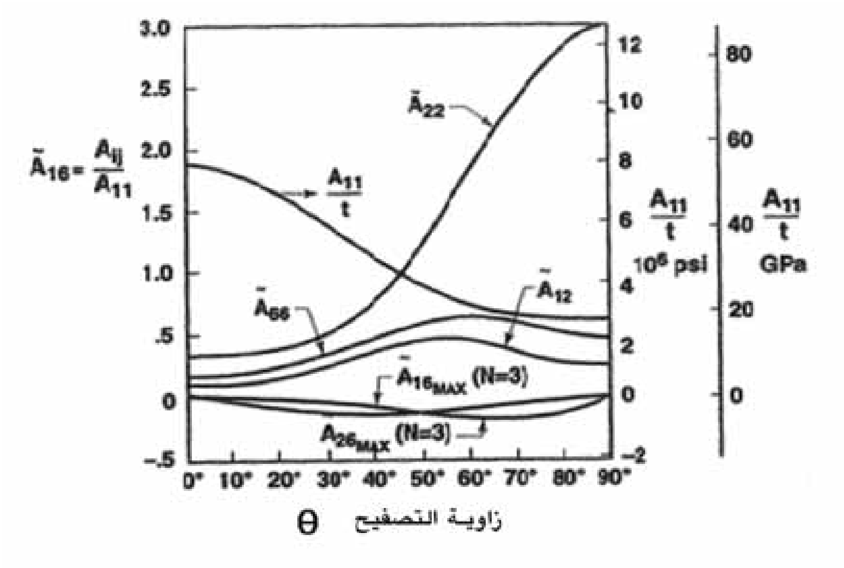
$$B_{11}, B_{12}, B_{22}, B_{66} = 0 \tag{4.95}$$

$$B_{16}, B_{26} = -\left(\overline{Q}_{16}, \overline{Q}_{26}\right)\frac{t^2}{2N}$$

$$\begin{aligned} &D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66} = \left(\overline{Q}_{11}, \overline{Q}_{12}, \overline{Q}_{22}, \overline{Q}_{66}\right)\frac{t^3}{12} \\ &D_{16}, D_{26} = 0 \end{aligned} \tag{4.96}$$

ملاحظات حول الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة الخاصة

يظهر الشكل 4-29 معاملات جساءة الاستطالة، A_{ij} ، بدلالة زاوية التصفيح. وتكون الحدود A_{11} ، A_{12} ، A_{22} و A_{66} مستقلة عن عدد الطبقات N. لكن A_{16} و A_{26} تتعلقان بـــN . ويتناسبان عكسياً مع N عندما يكون N فردياً، ويساويان الصفر عندما يكون N زوجياً. بهذا، تكون أعلى قيم لـــ A_{16} و A_{26} عندما N=3.

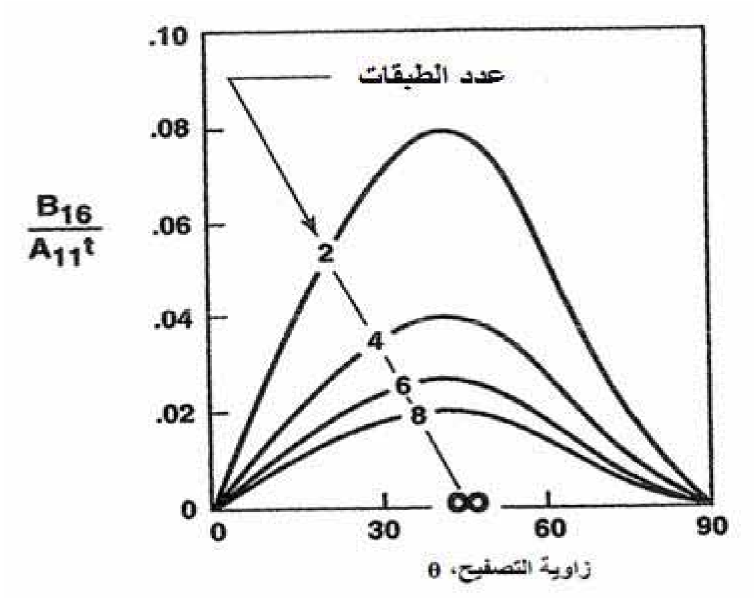


الشكل 4-29: معاملات جساءة الاستطالة المعايرة لصفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة من الإيبوكسي المقوّى بالزجاج (عن Tsai [4-6])

تساوي معاملات الجساءة للإقران انحناء- استطالة B_{ij} الصفر من أجل عدد طبقات فرد، لكنه يمكن أن يكون كبيراً من أجل عدد طبقات مزدوج. يظهر الشكل 30.4 قيم $B_{16}/t(A_{11})$بدلالة زاوية التصفيح. وبما أن B_{16} يتناسب عكسياً مع N، فإن القيمة الأكبر لـــ B_{16} تحصل عندما N=2. ويمكن بيان أن الكمية الممثلة هي:

$$\frac{B_{16}}{tA_{11}} = \frac{M_{xy}}{tN_x} \qquad (4.97)$$

وهي نسبة عزم الفتل إلى قوة الشد المحورية من أجل الاستطالة الصرفة، ε_x° وبالتشابه.

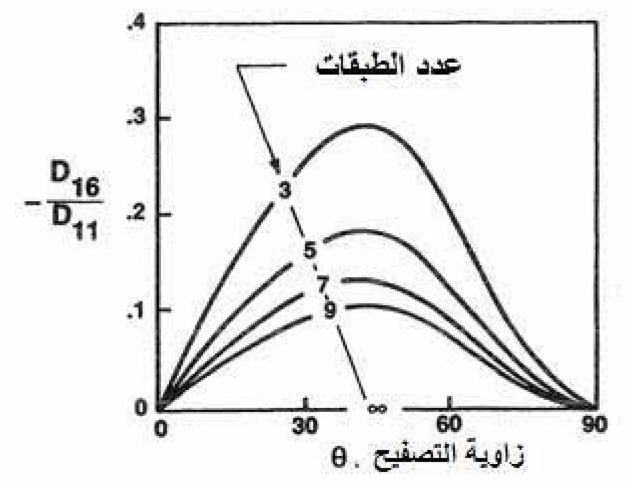


الشكل 4−30: معامل الجساءة B_{16} للإقران انحناء− استطالة من أجل صفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة من الإيبوكسي المقوّى بالزجاج (عن Tsai [4−6])

$$\frac{B_{26}}{tA_{22}} = \frac{M_{xy}}{tN_y} \tag{4.98}$$

ويبيّن الشكل 4-30 أن الإقران انحناء− استطالة يكون الأكبر عندما $\theta = 45^\circ$ و N=2.

تحتوي معاملات جساءة الانحناء حدّي الإقران انحناء− فتل D_{16} و D_{26} عندما يكون N مفرداً، لكن $D_{16} = D_{26} = 0$ من أجل N مزدوج. وبما أنه، وفق المعادلة (4.93)، يتناسب D_{16} و D_{26} عكسياً مع N، فإن قيمتهما العظمى تحصل عندما N=3. ويبيّن الشكل 4−31 أن D_{16} و D_{26} تحقق قيماً عظمى من أجل زاوية تصفيح 45°. في حالة الانحناء البسيط، يكون عزم الفتل، الناجم عن وجود D_{16} و D_{26}، مساوياً % 30 من عزم الانحناء المطبق. ولا يتناقص هذا الإقران سريعاً عندما يزداد N. لهذا، لا تعتبر الحلول التقريبية التي يتم فيها تجاهل الإقران انحناء− فتل دقيقةً.



الشكل 4-31: معامل الجساءة D_{16} للإقران انحناء- فتل من أجل صفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة من الإيبوكسي المقوّى بالزجاج (عن Tsai [4-6])

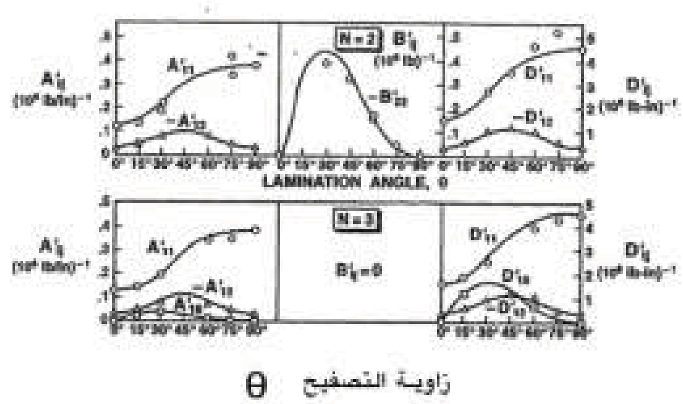
5.4.4 معاملات الجساءة النظرية والمقاسة للصفيحة الطبقية ذات الرقاقات المائلة

تعتبر إجرائيات القياس المختارة لمقارنة النظرية والتجربة نفس الإجرائيات في الفقرة 3.4.4 من أجل الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة. تمتلك الصفيحة الطبقية ذات الرقاقات المائلة ثنائية الطبقة القيم الأعلى لـ B_{16} و B_{26}. وتمتلك الصفيحة الطبقية ثلاثية الطبقة القيم الأعلى لـ A_{16} ، A_{26}، D_{16} و D_{26}. تم إجراء التجارب على عارضات ذات طبقات مائلة بزاوية $\pm\alpha$ بالنسبة إلى محور العارضة. لاحظ أنه يلزم فقط نصف العيّنات مقارنةً بالصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة الخاصة، ويعود ذلك إلى أن A_{11} و A_{22} يشكل كلٌّ منهما صورة مرآتية للآخر عند الزاوية 45° تقريباً. تم توقع حدوث انفعال نسبي معقّدة بسبب وجود الإقران بين قوى الشد وانفعالات القص، وكذلك بين عزوم الانحناء وانفعالات الفتل. لهذا، تم وضع مجسات انفعال الثلاثة على السطحين العلوي والسفلي للعارضة. وعندئذ، يحسب انفعال القص النسبي γ_{xy} من:

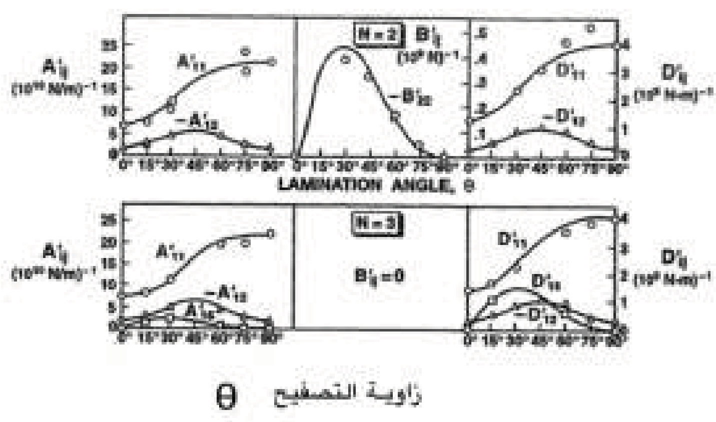
$$\gamma_{xy}^{upper} = 2\varepsilon_{45^\circ}^{upper} - (\varepsilon_x^{upper} + \varepsilon_y^{upper})$$
$$\gamma_{xy}^{lower} = 2\varepsilon_{45^\circ}^{lower} - (\varepsilon_x^{lower} + \varepsilon_y^{lower}) \qquad (4.99)$$

حيث يمثل ε_{45° الانفعال الثالث (عند الزاوية 45° بالنسبة إلى المحور x و y) في مجس الانفعال. وتحسب الانفعالات النسبية للسطح الأوسط والانحناءات من المعادلة (4.87).

يبيّن الشكل 4-32 معاملات الجساءة النظرية والمقاسة. وكما هو الحال في الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة، تم الحصول على توافق جيد جداً. بهذا، تكون التوقعات بمعاملات الجساءة للصفائح الطبقية دقيقة تماماً.



الشكل 4-32 أ: معاملات الجساءة النظرية والمقاسة لصفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة خاصة (وحدات معيارية أمريكية) (عن Tsai [4-6])



الشكل 4-32 ب: معاملات الجساءة النظرية والمقاسة لصفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة خاصة (وحدات دولية SI) (عن Tsai [4-6])

6.4.4 ملاحظات تلخيصية

تم مقارنة معاملات الجساءة المقاسة لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة ومائلة خاصة بمعاملات الجساءة النظرية من نظرية التصفيح التقليدية. وتم معالجة الصفائح الطبقية المتناظرة وعكسية التناظر. وحيث وُجدت هذه المعاملات، يتوافق عدد الطبقات في كل صفيحة طبقية مع توقعات معاملات جساءة الإقران الأكبر A_{16} ، A_{26} ، B_{ij} ، D_{16} و D_{26} . هكذا تمّت المقارنات بين النظرية والتجربة في شروط الحالة الأسوأ. بناءً على ذلك، ينطوي التوافق الجيد الناتج من ثقة عالية في التوقعات النظرية لمعاملات الجساءة في حالة الشروط القاسية للإقران، ومن أجل الصفائح الطبقية الأكثر عمومية.

4.4 مجموعة المسائل

1.4.4 اشتقْ معاملات جساءة الاستطالة لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة خاصة متناظرة ومنتظمة، أي اشتق المعادلة (4.78) من أجل الحالة الخاصة حيث $t_{odd} = t_{even} = t/N$.

2.4.4 اشتقْ معاملات جساءة الانحناء لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة خاصة متناظرة ومنتظمة، أي اشتق المعادلة (4.80) من أجل الحالة الخاصة حيث $t_{odd} = t_{even} = t/N$.

3.4.4 اشتقْ معاملات جساءة الاستطالة لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة خاصة متناظرة ومنتظمة، أي اشتق المعادلة (4.82) من أجل الحالة الخاصة حيث $t_{odd} = t_{even} = t/N$ (وحيث M=1 أيضاً).

4.4.4 اشتقْ معاملات جساءة الإقران انحناء– استطالة لصفائح طبقية ذات رقاقات متصالبة خاصة عكسية التناظر ومنتظمة، أي اشتق المعادلة (4.83) من أجل الحالة الخاصة حيث $t_{odd} = t_{even} = t/N$ (وحيث M=1 أيضاً).

5.4.4 اشتقْ معاملات جساءة الانحناء لصفائح طبقية ذات رقاقات متصالبة خاصة عكسية التناظر ومنتظمة، أي اشتق المعادلة (4.84) من أجل الحالة الخاصة حيث $t_{odd} = t_{even} = t/N$ (وحيث M=1 أيضاً).

6.4.4 اشتق معاملات الجساءة لصفائح طبقية ذات رقاقات مائلة خاصة في المعادلتين (4.91)– (4.93).

7.4.4 اشتق معاملات الجساءة لصفائح طبقية ذات رقاقات مائلة خاصة عكسية التناظر في المعادلتين (4.94)– (4.96).

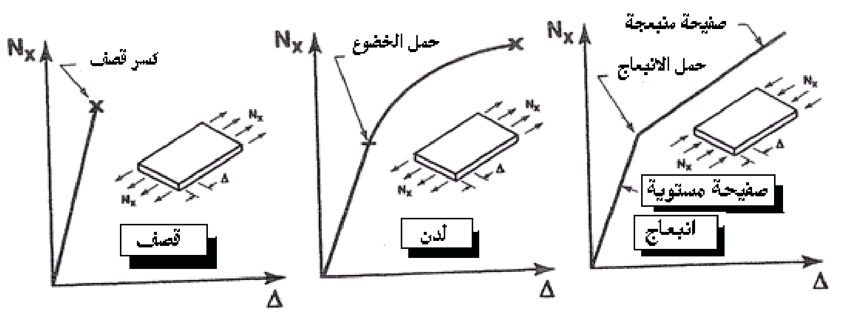
8.4 .4 اشتقْ المعادلتين (4.97) و(4.98).

5.4 متانة الصفائح الطبقية

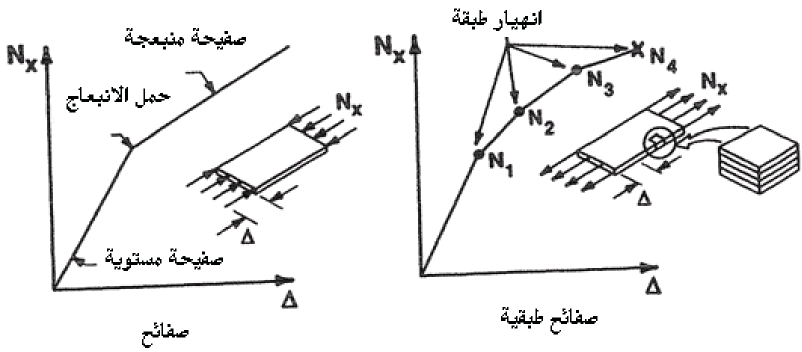
1.5.4 مقدّمة

تحت تحميل شدٍّ في المستوي، تظهر الصفائح المعدنية سلوك إخفاق (failure) إما قصفاً (brittle) أو لدناً (ductile)، كما هو في الشكل 4–33. من جهة أخرى، يمكن لصفيحة معدنية تحت تحميل ضغط في المستوي أن تنبعج مع تحمّل حمل أعلى من حمل الانبعاج، مع أن ذلك يتم على حساب تزايد كبير للانحراف (deflection) مقابل كل وحدة حمل إضافي مطبق. ولا يمثّل كلٌّ من حمل الانبعاج أو حمل الخضوع قابلية تحمّل الحمل الأعظمية لعنصر إنشائي. ومع ذلك، فإن تجاوز حمل الانبعاج (العمل في نظام ما بعد الانبعاج) أو حمل الخضوع ليس دائماً مسموح به في شروط العمل العادية.

تظهر الصفائح المركبة الصفائحية تحت حمل شدٍّ في المستوي استجابة انفعال تشبه كلاً من الصفيحة المعدنية اللدنة تحت الشد و الصفيحة المعدنية التي تنبعج. وهكذا، تظهر الصفيحة المركبة إخفاقاً تدريجياً على أساس طبقةٍ وراء طبقة، كما في الشكل 4–34. تنبعج الصفيحة المركبة، بالتأكيد، بشكلٍ مشابهٍ للصفيحة المعدنية باستثناء أن الإخفاقات المختلفة في حالة تحميل الضغط في الشكل 4–34 يمكن أن تكون إخفاقات رقاقة أو حوادث مختلفة لانبعاج الصفيحة (يحصل أكثر من حمل انبعاج واحد).



الشكل 4-33: السلوك حمل- انحراف لصفائح معدنية



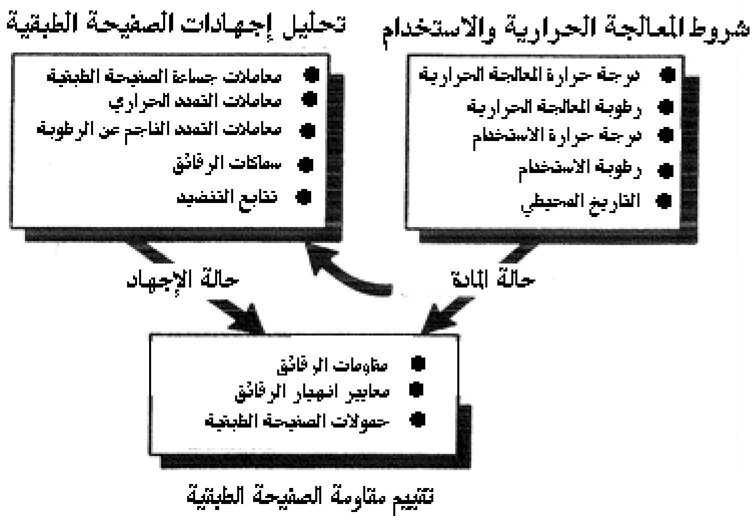
الشكل 4-34: التناظر بين صفيحة منبعجة والسلوك حمل- انفعال لصفيحة طبقية

فيما يتعلق بمتانة الصفيحة الطبقية، وكما هو الحال مع جساءة الصفيحة الطبقية، لبنة البناء الأساسية هي الرقاقة مع ما لها من مميزات ذاتية. تهدف هذه الفقرة إلى تقديم طريقة للتوقع بمتانة الصفيحة الطبقية، بالاعتماد على متانات وتفاعلات رقاقاتها. وتستند هذه الطريقة على معرفة حالة الإجهاد في كلِّ رقاقة بناءً على المفاهيم المطورة سابقاً في هذا الكتاب. ومع ذلك، وبسبب عدم تجانس وثلاثية المناحي، أو ربما حتى الطبيعة غير متماثلة المناحي للمواد المركبة، فإن أشكال الإخفاق الحاصلة تتطلب تحليلاً جديداً مختلفاً تماماً عنه في المواد المتجانسة متماثلة المناحي. على الأخص، فإن إخفاق طبقة واحدة في المواد المركبة الصفائحية لا يؤدي بالضرورة إخفاق كامل الصفيحة الطبقية التي يمكنها، في الحقيقة، أن تكون قادرة على تحمّل أحمالٍ أكبر، على الرغم من تغير ملحوظ (تناقص) في

الجساءة. التناظر مع هذه الظاهرة هو قابلية صفيحة معرضةٍ لضغطٍ في المستوي على تحمل حمولات أعلى من حمل الانبعاج مع زيادة في كمية الانفعال في وحدة الحمل (تناقص الجساءة) كما في الشكل 4-34.

وبسبب تعدد مواصفات الصفائح الطبقية، فمن الصعب تحديد معيارٍ للمتانة يأخذ بعين الاعتبار كافة الأشكال والتفاعلات للإخفاق. إضافة إلى ذلك، يصبح التحقق من معيار إخفاقٍ مقترحٍ أكثر تعقيداً بفعل تبعثر المتانات المقاسة الناتجة من تقانات معالجة غير ملائمة (لا يمكن تحاشيها أساساً) وأحياناً من تقانات قياس خادعة وغير مناسبة. مع ذلك، يجب استمرار الجهد لتعريف معايير المتانة التي تسمح التوقع الدقيق لمتانات الصفائح الطبقية المركبة. وتعتبر معايير المتانة جوهريةً كي يتمكن المصمم من التوقع بقدرة عنصرٍ إنشائي تحت حالة تحميلٍ معقدةٍ. ويجب التحقق من مثل تلك المعايير مقارنة بالمتانات المقاسة، كما يجب في ما بعد الحكم حول ما إذا كانت المعايير تمثل بشكلٍ مناسبٍ الظواهر الفيزيائية بالنظر إلى الصعوبات التجريبية لقياس الظواهر.

تتعلق كل معايير المتانة للصفائح الطبقية بالمتانات في الاتجاهات الرئيسية للمادة في الرقاقات، ولا تنطبق هذه الاتجاهات مع اتجاهات الإجهادات الرئيسية للرقاقات. لهذا، يجب تقييم متانة كل رقاقة في الصفيحة الطبقية في نظام إحداثيات مختلفة على العموم عن تلك في الرقاقات المجاورة. ويعتبر هذا الاختلاف في الإحداثيات واحداً من التعقيدات التي تميز حتى معياراً ماكروياً لمتانة الصفائح الطبقية. يبيّن الشكل 4-35 ضمن عدة مجموعات العوامل أو العناصر الرئيسية الخاصة بتحليل متانة الصفيحة الطبقية. وهنا، تؤثر المعالجة الحرارية وشروط الاستخدام في حالة المادة المستخدمة في الصفيحة الطبقية. فعلى سبيل المثال، يسبب الاختلاف بين درجة حرارة المعالجة الحرارية العالية بدون إجهاد ودرجة حرارة الاستخدام إجهادات حرارية أو إجهادات متبقية. وبالتشابه، يسبب الاختلاف بين محتوى الرطوبة عند المعالجة الحرارية ومحتوى الرطوبة عند الاستخدام إجهادات رطوبة، وهذا ما ينتج أيضاً من الاختلاف بين محتوى الرطوبة عند أي زمنين مختلفين. وتنتشر الرطوبة عبر مواد المصفوفة الإيبوكسيدية بسرعةٍ أقل كثيراً (أشهر) من درجة الحرارة (دقائق). في بعض الحالات، يجب الأخذ بعين الاعتبار تاريخ التاثيرات المحيطية مثل درجة الحرارة والرطوبة.



الشكل 4-35: عناصر تحليل متانة الصفيحة الطبقية

تتأثر عناصر تحليل إجهاد الصفيحة الطبقية بحالة المادة وتحدد بدورها حالة الإجهاد. وعلى سبيل المثال، تتعلق عادةً معاملات جساءة الصفيحة الطبقية بدرجة الحرارة، ويمكن أن تتعلق أيضاً بالرطوبة. وتعتبر الخصائص الميكانيكية الحرارية الرطبة (hygrothermechanical) والسماكات والتوجيهات هامةً في تحديد المواصفات الموجهة لمتانة الصفيحة الطبقية. كما يؤثر تتابع التنضيد في معاملات جساءة الانحناء والإقران انحناء- استطالة، وبالتالي على متانات الصفيحة الطبقية.

أخيراً، يؤثِّر كلٌ من حالة المادة وحالة الإجهاد في تقييم متانة الصفيحة الطبقية. هذا يعني أن درجة الحرارة الحالية وشروط الرطوبة تؤثر في متانات الرقاقات. وباعتبارها سويةً مع إجهادات الرقاقات، تؤدي متانات الرقاقات وحمولات الصفيحة الطبقية إلى تقييم قدرات الصفيحة الطبقية.

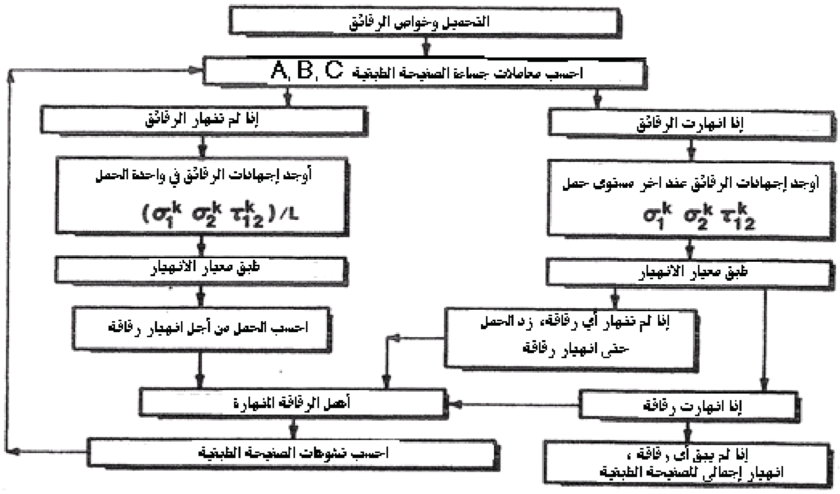
يمكن لصفيحة طبقية أن تتعرض لحمولات حرارية وميكانيكية ورطوبية مع الهدف في تحمل هذه الحمولات. ويتطلب الأمر طريقة تحليل المتانة من أجل تحديد كلٍّ من (1) الحمولات العظمى التي يمكن أن تتحملها صفيحة طبقية و(2) ومميزات الصفيحة الطبقية اللازمة لتحمل حملٍ معيّن. فمسألة الحمولات العظمى هي بالتأكيد حالة تحليل، ومسألة مميزات الصفيحة الطبقية هي حالة تصميم سيتم مناقشتها في الفصل السابع.

2.5.4 إجرائية تحليل متانة الصفيحة الطبقية

يعتبر تحليل الإجهادات في رقاقات صفيحة طبقية مهمةً مباشرةً، لكنها أحياناً شاقةً. ويفترض أن يكون القارئ معتاداً على المبادئ الأساسية للتصفيح التي نوقشت سابقاً في هذا الفصل. وهنا، تم بيان أن الإجهادات كانت دلالةً خطيةً للحمولات المطبقة إذا أظهرت الرقاقات سلوكاً مرناً خطياً. بهذا، يكفي تحليل إجهادٍ وحيدٍ لتحديد مجال الإجهاد الذي يسبب إخفاق رقاقةٍ منفردة. هذا يعني أنه إذا عرفت كل إجهادات الرقاقات، فإنه يمكن مقارنة الإجهادات في كل رقاقة بمعيار إخفاق الرقاقة وزيادتها بشكل مطَّرد من أجل تحديد الحمل الذي يحصل عنده الإخفاق.

يبيّن الشكل 4−36 إجمالياً الإجرائية العامة لتحليل متانة الصفيحة الطبقية الذي يؤدي بشكلٍ متزامن إلى السلوك حمل− انفعال للصفيحة الطبقية. وهنا، يعبر الحمل عن كلٍّ من القوى والعزوم، وبالتشابه، تتضمن الانفعالات كلاًّ من الانفعالات والتقوسات. يتألف التحليل من مقاربتين مختلفتين يتعلقان بإخفاق أو عدم إخفاق أيّ من الرقاقات.

إذا لم تخفق أيٌّ من الرقاقات، يجب تحديد الحمل الذي تخفق عنده أول رقاقة (وهذا ما يسمى إخفاق الرقاقة الأولى)، أي الرقاقة التي تخالف معيار إخفاق الرقاقة. وفي نطاق عملية هذا التحديد، يجب تحديد إجهادات الرقاقات بدلالة مقدار الحمل غير المعروف، وذلك في إحداثيات الصفيحة الطبقية أولاً، ومن ثم في اتجاعات المادة الرئيسية. وتعيَّن نسب الحمل (N_x إلى N_y، M_x إلى M_y إلخ) بالتأكيد في بداية التحليل. يتم زيادة باراميتر الحمل حتى إخفاق بعض الرقاقات المفردة. وعندئذ، تتراجع خصائص الرقاقة الخفقة وفق طريقةٍ أو اثنتين: (1) إلى الصفر تماماً إذا أخفقت الألياف في الرقاقة أو (2) إلى الخصائص وفق اتجاه الليف إذا حصل الإخفاق على شكل كسرٍ موازٍ للألياف (إخفاق المصفوفة). وبسبب معالجات المصفوفة ذات الصلة في التحليل، يجب ألاّ تكون خصائص الرقاقة الخفقة مساويةً للصفر، لكن على الأرجح قيماً فعلية من مرتبة الصفر، لتحاشي مصفوفة غير قلوبة (غير نظامية) في مسألة التحليل الإنشائي. وتحسب الانفعالات للصفيحة الطبقية من الحمل المعروف ومعاملات الجساءة قبل إخفاق الرقاقة. وسيتم فيما بعد مناقشة انفعالات الصفيحة الطبقية مباشرةً بعد إخفاق الرقاقة.



الشكل 4–36: تحليل متانة الصفيحة الطبقية وسلوك الحمل– انفعال

إذا خفقت الآن رقاقة أو مزيد من الرقاقات، يتم حساب استطالة الصفيحة الطبقية الجديدة والإقران انحناء– استطالة ومعاملات جساءة الانحناء. ويعاد حساب إجهادات الرقاقات لتحديد توزعها بعد إخفاق رقاقة (يجب أن تزداد الإجهادات في الرقاقات المتبقية لاستمرار التوازن). وبعدئذ، يجب التحقق من عدم إخفاق الرقاقات المتبقية الخاضعة لمستويات إجهاداتها المتزايدة عند نفس الحمل الذي تسبب في إخفاق الرقاقة خلال المرحلة السابقة للتحليل. هذا يعني، هل يمكن إعادة توزيع إجهادات الرقاقات بنجاح على الطبقات غير الخفقة؟ إذا لم نزد من الرقاقات، يمكن إذاً زيادة الحمل حتى إخفاق رقاقة أخرى وتتكرر الدورة. وفي كل دورة، يجب التحقق من أن الإجهادات المتزايدة بفعل إخفاق رقاقة لا تسبب إخفاقاً تدريجياً آنياً، أي أين تخفق كافة الرقاقات على التتالي وعند نفس الحمل. وعندما يحصل مثل هذا الإخفاق المتعدد، يقال إن الصفيحة الطبقية قد تعرضت لإخفاق إجمالي.

لاحظ أنه لم يشر صراحة إلى معيار إخفاق الرقاقة في مناقشة الشكل 4–36. فالإجرائية الكاملة لتحليل المتانة تكون مستقلة عن معيار إخفاق الرقاقة الحالي، لكن نتائج الإجرائية تتعلق الأحمال العظمى، والانفعالات تتعلق بالمعيار النوعي لإخفاق الرقاقة. وبسبب التقيد بسلوك خطيٍ مرنٍ لكل رقاقة، يكون أيضاً السلوك حمل– انفعال نوعاً ما

خطياً. إذا ما كان سلوك الرقاقات مرناً غير خطّيّ، يمكن أن يكون سلوك الصفيحة الطبقية نوعاً ما غير خطّيٍّ. ومن أجل أيّ معدلٍ، يكون السلوك العام للصفيحة الطبقية غير خطّيّ إذا أخفقت رقاقة أو أكثر قبل الإخفاق الإجمالي للصفيحة الطبقية. تمّ في الفقرة 9.2 تحديد معيار (Tsai– Hill) كأفضل تمثيلٍ عمليٍ لإخفاق رقاقات إيبوكسي– زجاج E تحت شروط إجهادٍ ثنائي المحور. لهذا، سيتم استخدام معيار (Tsai– Hill) في توقعات المتانة اللاحقة في هذه الفقرة. ومع ذلك، يمكن أن يكون واحد من المعايير الأخرى أكثر ملاءمةً لموادّ أخرى غير الإيبوكسي– زجاج E.

3.5.4 تحليل الإجهاد الحراري والميكانيكي

لا يكفي تحليل الإجهاد الميكانيكي الذي سبقت معالجته في هذا الفصل لتحليل الصفائح الطبقية التي قد عولجت عند درجة حرارة مختلفة عن درجة حرارة العمل التصميمية. وفي مثل هذه الحالات، تظهر إجهادات حرارية يجب أخذها بالاعتبار. وسيتم في هذه الفقرة تكرار مفاهيم تحليل الإجهاد الميكانيكي مع التعديلات الضرورية لتحليل الإجهاد الحراري (thermoelastic).

تكون علاقات الإجهاد– انفعال الحراري المرن غير متماثل المناحي، وثلاثي الأبعاد على النحو التالي:

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j + \alpha_i \Delta T \qquad i,j=1,2,\ldots,6 \qquad (4.100)$$

حيث تكون الانفعالات الكلية ε_i مجموع الانفعالات الميكانيكية $S_{ij}\sigma_j$ والانفعالات الحرارية الحرة الستة $\alpha_i \Delta T$ من أجل تغيرٍ في درجة الحرارة ΔT. ويتم الحصول على علاقات الإجهاد– انفعال ثلاثية الأبعاد بالقلب (Inversion):

$$\sigma_i = C_{ij}\left(\varepsilon_j - \alpha_i \Delta T\right) \qquad i,j=1,2,\ldots,6 \qquad (4.101)$$

حيث تشير المقادير الستة α_i في كلتا العلاقتين (4.100) و(4.101) إلى معاملات الانفعال الحراري (تمدد أو تقلص وفتل (distortion)، أي قص)، و ΔT إلى الاختلاف في درجة الحرارة. كما تشير الحدود $C_{ij}\alpha_j \Delta T$ في العلاقة (4.101) إلى الإجهادات الحرارية إذا كان الانفعال الكلي معدوماً.

في حالة إجهاد مستوى على رقاقات ثلاثية المناحي في الإحداثيات الرئيسية للمادة :(Principal Material Coorolinales–PMC)

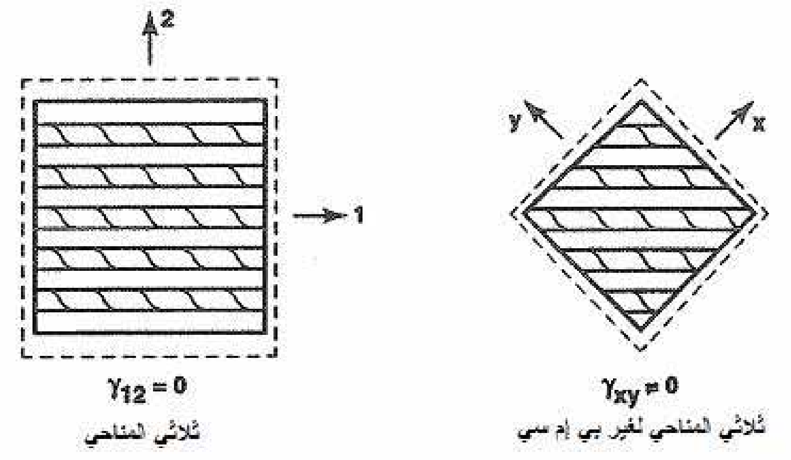
$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 - \alpha_1 \Delta T \\ \varepsilon_2 - \alpha_2 \Delta T \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \qquad (4.102)$$

لاحظ أن معاملات التمدد الحراري تؤثر فقط في انفعالات الاستطالة وليس انفعالات القص.

يتم الحصول على الإجهادات للطبقة رقم k^{th} في إحداثيات الصفيحة الطبقية بتحويل الإحداثيات وفق ما ورد في الفقرة 6.2 على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x - \alpha_x \Delta T \\ \varepsilon_y - \alpha_y \Delta T \\ \gamma_{xy} - \alpha_{xy} \Delta T \end{bmatrix} \qquad (4.103)$$

حيث يشير ظهور المقادير α_{xy} إلى معامل ظاهري لقص حراري أو فتل، كما هو الحال في الجانب الأيمن للشكل 4-37.



الشكل 4-37: التمدد الحراري والفتل لرقاقة ثلاثية المناحي

عندما يستبدل التغير الخطي للانفعال عبر السماكة، المعادلة (4.13)، في المعادلة (4.103) ويتم تكامل العبارات الناتجة لإجهادات الطبقة على السماكة، تكون محصلات القوة:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{11} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{bmatrix} \quad (4.104)$$

حيث تمثل A_{ij} و B_{ij} معاملات جساءتي الاستطالة والإقران- استطالة المألوفتين والمعروفتين في المعادلة (4.24) وتكون القوى الحرارية على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k \Delta T dz \quad (4.105)$$

لاحظ أن ما يسمى القوى الحرارية، N^T، تكون قوى حرارية حقاً عندما تكون القوى والانحناءات الكلية مقيدة تماماً، أي، معدومة.

وبنفس الطريقة، يتم الحصول على محصلات العزوم بتكامل عزم الإجهادات على السماكة:

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{11} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

حيث تمثل D_{ij} معاملات جساءة الانحناء الشائعة المعرفة في المعادلة (4.24) وتكون العزوم الحرارية على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{bmatrix} = \int \begin{bmatrix} \overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16} \\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26} \\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{bmatrix}_k \Delta T z dz \quad (4.107)$$

وفي الواقع، تكون N^T و M^T على التوالي قوى وعزوماً حرارية فقط في الحالة المحددة للتقييد المثالي. ومع ذلك، يمكن إعادة ترتيب محصلات القوة والعزم كي تقرأ على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} \overline{N}_x \\ \overline{N}_y \\ \overline{N}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x + N_x^T \\ N_y + N_y^T \\ N_{xy} + N_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{11} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.108)$$

$$\begin{bmatrix} \overline{M}_x \\ \overline{M}_y \\ \overline{M}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_x + M_x^T \\ M_y + M_y^T \\ M_{xy} + M_{xy}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^\circ \\ \varepsilon_y^\circ \\ \gamma_{xy}^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{11} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

ويمكن في شكل المعادلتين (4.108) و(4.109) معالجة الجزء الحراري لمسألتي الإجهاد الحراري والميكانيكي كحمولات ميكانيكية مكافئة تعرَّف بـــ N^T و M^T في المعادلتين (4.105) و(4.107) على التوالي بالإضافة إلى الحمولات الميكانيكية N وM.

وتخضع القوى والعزوم الوهمية $\overline{N}$ و $\overline{M}$ إلى نفس القواعد مثل N وM من أجل مسائل التحميل الميكانيكي فقط. ويمكن كتابة المعادلتين (4.108) و (4.109) على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix} \overline{N} \\ \hline \overline{M} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ \hline B & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon^\circ \\ \hline \kappa \end{bmatrix} \quad (4.110)$$

وذلك بالتناظر مع المعادلة (4.62). وبعد قلب المعادلة (4.110):

$$\begin{bmatrix} \varepsilon^\circ \\ \hline \kappa \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A' & B' \\ \hline H' & D' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{N} \\ \hline \overline{M} \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

وذلك بالتناظر مع المعادلة (4.73). وبهذا، يكون قد تحقق صياغة عالية المزايا.

وبعد الحل العادي لمسائل التحميل الميكانيكي أو التحميل الميكانيكي والحراري، يمكن تحديد الإجهادات في الرقاقات بواسطة المعادلة (4.102). تستعمل إجهادات الرقاقات في معيار إخفاق الرقاقة لتحديد جساءة الصفيحة الطبقية حتى الحمل الأعظمي الذي يمكن أن تأخذه الصفيحة الطبقية. تعتبر نظرية التصفيح التقليدية بما في ذلك الآثار الحرارية، بوضوح، جوهرية من أجل الوصف الصحيح لسلوك الصفيحة الطبقية وذلك بسبب عدم التجانس وعملية الشي لتصنيع الصفائح الطبقية. وتنشأ التفاعلات بين الرقاقات كنتيجة

للطريقة التي تتوضع فيها الرقاقات في الصفيحة الطبقية وتشوى. وسيتم وصف ومناقشة هذه التفاعلات في أمثلة حول الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتعامدة والمائلة.

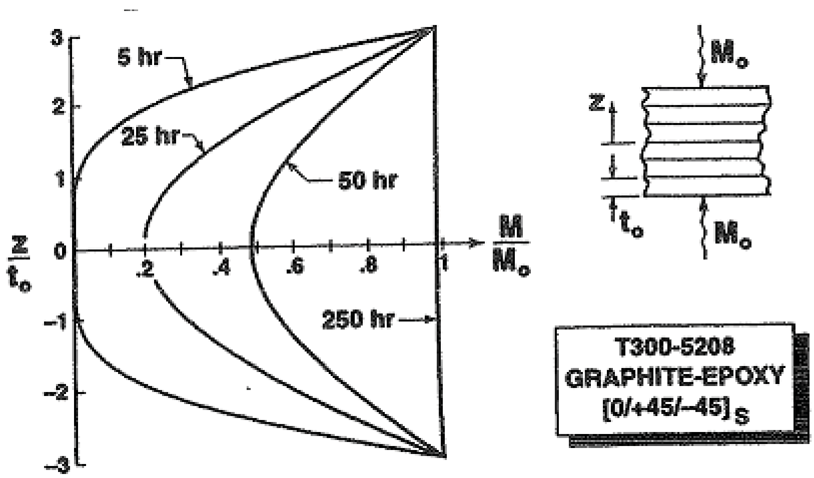
4.5.4 تحليل الإجهاد الاسترطابي

تنشأ الآثار الاسترطابية (Hygroscopic) للمواد البوليميرية مثل الإيبوكسيدات التي تمتص الرطوبة كيميائياً بعد الشي ولذلك تتمدد. وتتشابه هذه الآثار مباشرة مع الآثار الحرارية، ويتم تمييزها بواسطة معاملات تمدد الرطوبة β_1 و β_2 في الإحداثيات الرئيسية للمادة بالتشابه مباشرة مع α_1 و α_2 من أجل معاملات التمدد الحراري. كما يمكن استبدال أو استكمال كل الحسابات للتاثيرات الحرارية التي تستعمل α_i بحدود مشابهة من أجل التمدد الرطب.

يختلف سلم الزمن تماماً من أجل انتشار أو تبعثر التأثيرات الآثار الحرارية مقابل تأثيرات الرطوبة. وعلى العموم، تكون التغيرات حرارية المنشأ في الانفعالات والإجهادات سريعةً (ضمن لحظات على الأغلب)، وذلك لأن الانتشار الحراري سريع نوعاً ما. وبالمقابل، تكون التأثيرات الاسترطابية بطيئة جداً لأنها تتعلق بانتشار الرطوبة في المادة، وهي عملية بطيئة جداً (يحتاج الأمر أسابيع إلى أشهر إلى سنوات لتحقيق إشباع منتظم). بين شن وسبرينجر أن قيم الحرارية مقابل قيم انتشار الرطوبة للمواد تؤدي إلى الاستنتاج أن درجة الحرارة داخل جسم يسخن سطحياً تقترب من التوازن (التعريض الحراري) حوالى 10^6 مرة أسرع من اقتراب محتوى الرطوبة من الإشباع [4–7]. على سبيل المثال، تحتاج صفيحة طبقية سميكة، T300-1034، من الإيبوكسي والغرافيت سماكتها 0.5 in (12.5 mm) معرضة عند الدرجة 170 °F (77 °C) لهواء رطوبته 90 % إلى 15 ثانية لبلوغ التوازن الحراري، لكنها تحتاج إلى حوالى 13 سنة لبلوغ إشباع الرطوبة. ويتغير معامل انتشار الرطوبة قليلاً مع محتوى الرطوبة، لكنه يتغير سريعاً مع درجة الحرارة [4–7].

يرتبط حساب تأثيرات كل من العمليات الحرارية والرطبة بمعرفة مجال درجة الحرارة ومجال الرطوبة على التوالي في البنية المعتبرة. وتعتبر المشاكل الحرارية المتعلقة بتدرجات الحرارة شائعة (يمكن للبنية أن تُسخن من جانب واحد وتتوزع الحرارة بشكلٍ غير منتظم قبل شرط التعريض الحراري). كما تعتبر من المشاكل "المألوفة" مشاكل الرطوبة

المتصلة بالتوزعات المعقدة للرطوبة في الصفيحة الطبقية كما هو الحال في الشكل 4-38. وقد تم الحصول على نموذج المنحنيات في الشكل 4-38 من قبل بايبس وفنسون وشو من أجل قيم متعددة لــ Dt (حيث D يمثل معامل الانتشار و t الزمن مع ثبات D في مدى درجة الحرارة والرطوبة المعتبر) [4–8]. وقد تم الحصول على المنحنيات الحالية من منحنيات بايبس وفنسون وشو باستعمال القيمة التقريبية لمعامل الانتشار $D= 2 \times 10^{-6}$ in^2/hr التي اقتبست من عمل براونينغ وهوسمان وواينتي [4–9] للحصول على قيمة زمن من أجل كل منحنى. يلاحظ في الشكل 4-38 أن محتوى الرطوبة يتغير باستمرار عبر سماكة الصفيحة الطبقية. هذا يعني أنه لا يحصل شيء عند حدود الرقاقة لأن انتشار الرطوبة يتم ضمن المصفوفة في المادة المركبة وهو لا يتأثر بتوجه الليف في كل رقاقة. تعطى منحنيات الرطوبة عبر السماكة، من أجل 5، 25، 50 و250 ساعة، لصفيحة طبقية $[0/+45/-45]_S$ T300-3200 حيث يمثل المنحنى الأخير رطوبة الإشباع تقريباً (بعد أسبوع ونصف). ومن الواضح أن انتشار الرطوبة بطيء جداً لكن محتوى الرطوبة متغير جداً، عبر السماكة. ومع هذا التوزع غير الخطي مع الزمن للرطوبة، من الطبيعي أن يكون الحل من أجل الإجهادات معقداً [4–8]. وفي حالة الصفائح الطبقية المشبعة بالرطوبة، لا يبقى الحل أكثر تعقيداً من التأثيرات الحرارية في الفقرة الفرعية التالية.

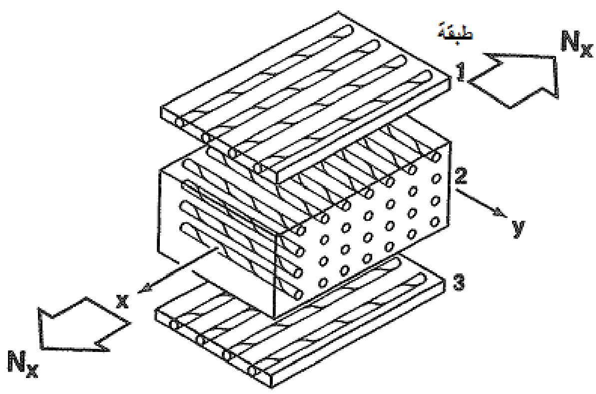


الشكل 4–38: منحنيات الرطوبة الممكنة عبر سماكة الصفيحة الطبقية (مقتبسة من بايبس وفنسون وشو [4–8])

5.5.4 متانة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة

سيتم توضيح منهجية تحليل متانة الصفيحة الطبقية التي عرضت في الفقرة 2.5.4 باستعمال معيار تساي– هيل لإخفاق الرقاقة وذلك بتطبيقها على الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة التي تمّ شيّها عند درجة حرارة فوق درجة حرارة استعمالها أو خدمتها وفق طريقة تساي [4–10]. لهذا، يجب أيضاً اعتبار التأثيرات الحرارية التي نوقشت في الفقرة 3.5.4. وبما أن تحولات خصائص الرقاقة بديهية في حالة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة، فإن منهجية تحليل متانة الصفيحة الطبقية تكون سهلة التفسير.

بما أن الصفيحة الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة التي سيتم تفحصها [4–10] تشتمل على ثلاث طبقات، فهي متناظرة بالنسبة إلى السطح الأوسط. لهذا، لا يوجد إقران بين الانحناء والاستطالة. ومن أجل الشرط $N_x=N$ وجميع الحمولات والعزوم مساوية الصفر، تكون الإجهادات في الطبقات الخارجية (المتناظرة) متماثلة. تسمى إحدى الطبقات الخارجية الطبقة–1 وتكون أليافها وفق الاتجاه x (انظر الشكل 4–39). وتسمى الطبقة الداخلية الطبقة–2، وتكون أليافها وفق الاتجاه y. كما تسمى الطبقة الخارجية الأخرى الطبقة–3 وبسبب التناظر، ليس هناك حاجة إلى الإشارة إليها. بما أن نسبة التصالب M تساوي 0.2، تكون سماكة الطبقة الداخلية عشر مرات سماكة كلٍّ من الطبقات الخارجية (فعلياً، "الطبقة" الداخلية عشر رقاقات متماثلة التوجيه). تبلغ سماكة كل رقاقة 0.005 in (0.1270 mm) وسماكة الصفيحة الطبقية الكلية 0.060 in (1.524 mm).



الشكل 4–39: منظر لثلاث طبقات منفصلة حيث M=2 لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة تحت تحميل شد

تكون خصائص مثال رقاقة من الإيبوكسي المقوى بألياف زجاجية−E:

$$E_1 = 7.8 \times 10^6 \text{ psi } (53.78 \text{ GPa}) \qquad X_t = X_c = 150 \text{ ksi } (1035 \text{ MPa})$$

$$E_2 = 2.6 \times 10^6 \text{ psi } (17.93 \text{ GPa}) \qquad Y_t = 4 \text{ ksi } (27.6 \text{ MPa})$$

$$\nu_{12} = 0.25 \qquad Y_c = 20 \text{ ksi } (138 \text{ MPa}) \qquad (4.112)$$

$$G_{12} = 1.25 \times 10^6 \text{ psi } (8.62 \text{ GPa}) \qquad S = 6 \text{ ksi } (41.4 \text{ MPa})$$

$$\alpha_1 = 3.5x10^{-6} /{}^\circ F(6.3x10^{-6}{}^\circ C) \qquad \alpha_2 = 11.4x10^{-6} /{}^\circ F(20.52x10^{-6}{}^\circ C)$$

حيث يتجاوز عدد الأرقام المعنوية (significant figures) الممارسة الهندسية المعقولة لتحويل النتائج الأمريكية US المعيارية إلى نتائج النظام الدولي SI في هذا المثال. ويكون أكبر معامل في اتجاه الألياف وأكبر معامل تمدد حراري في الاتجاه العمودي على الألياف. علاوة على ذلك، وعلى الرغم من كون المتانات العمودية على الألياف مختلفة، تعتبر معاملات الجساءة متماثلة في الشد وفي الضغط.

الانفعال قبل الإخفاق

قبل أي إخفاق، تكون معاملات الجساءة المختزلة للرقاقة:

$$Q_{11}^{(1)} = Q_{22}^{(2)} = 7.9660x10^6 \, psi(54.92GPa)$$

$$Q_{11}^{(1)} = Q_{22}^{(2)} = 0.6638x10^6 \, psi(4.578GPa)$$

$$Q_{22}^{(1)} = Q_{11}^{(2)} = 2.6550x10^6 \, psi(18.31GPa) \qquad (4.113)$$

$$Q_{66}^{(1)} = Q_{66}^{(2)} = 1.250x10^6 \, psi(8.620GPa)$$

$$Q_{16}^{(1)} = Q_{16}^{(2)} = Q_{26}^{(1)} = Q_{26}^{(2)} = 0$$

وتكون معاملات التمدد الحراري الظاهرية:

$$\alpha_x^{(1)} = \alpha_y^{(2)} = 3.5x10^{-6} /{}^\circ F(6.3x10^{-6} /{}^\circ C)$$

$$\alpha_y^{(1)} = \alpha_x^{(2)} = 11.4x10^{-6} / ^\circ F (20.52x10^{-6} / ^\circ C) \quad (4.114)$$

$$\alpha_{xy}^{(1)} = \alpha_{xy}^{(2)} = 0$$

وتكون معاملات جساءة الاستطالة للصفيحة الطبقية:

$$A_{11} = 0.21243x10^6 lb/in (0.037207 GN/m)$$

$$A_{12} = 0.03983x10^6 lb/in (0.0069767 GN/m) \quad (4.115)$$

$$A_{22} = 0.42485x10^6 lb/in (0.074405 GN/m)$$

$$A_{66} = 0.07500x10^6 lb/in (0.013137 GN/m)$$

والمعاملات المقلوبة لجساءة الاستطالة للصفيحة الطبقية:

$$A'_{11} = 4.7918x10^{-6} lb/in \left[0.27358x10^{-7} (N/m)\right]$$

$$A'_{12} = -0.44923x10^{-6} lb/in \left[-0.256530x10^{-7} (N/m)\right] \quad (4.116)$$

$$A'_{22} = 2.3959x10^{-6} lb/in \left[0.13680x10^{-7} (N/m)\right]$$

$$A'_{66} = 13.333x10^{-6} lb/in \left[0.76122x10^{-7} (N/m)\right]$$

بهذا، تكون كل الأعداد متوفرة لحساب الإجهادات في مثال الصفيحة الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة.

لنعتبر درجة حرارة الصفيحة الطبقية ثابتة ومختلفة، لكن، مقترنة بدرجة حرارة الشيّ عديم الإجهاد. عندئذ، تكون القوى الحرارية وفق المعادلة (4.105):

$$N_X^T = 33.1 t \Delta T psi / ^\circ F (0.41049 t \Delta T MPa / ^\circ C)$$

$$N_Y^T = 35.0 t \Delta T psi / ^\circ F (0.43407 t \Delta T MPa / ^\circ C) \quad (4.117)$$

$$N_{XY}^T = 0$$

والعزوم الحرارية وفق المعادلة (4.107) تساوي الصفر.

وباستعمال التعويضات المتتالية ذات الصلة على الأغلب للمعادلة (4.108) في (4.111) وفي (4.13) وأخيراً في (4.103)، يمكن تبيان أن الإجهادات في الطبقات الداخلية والخارجية تكون:

$$\sigma_X^{(1)} = 2.27\frac{N_X}{t} + 35.5\Delta T psi/{}^\circ F\left[2.27\frac{N_X}{t}\Delta T + 0.4409\Delta T MPa/{}^\circ C\right] \quad (4.118)$$

$$\sigma_Y^{(1)} = 0.12\frac{N_X}{t} - 16.0\Delta T psi/{}^\circ F\left[0.12\frac{N_X}{t}\Delta T - 0.1977\Delta T MPa/{}^\circ C\right]$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = 0$$

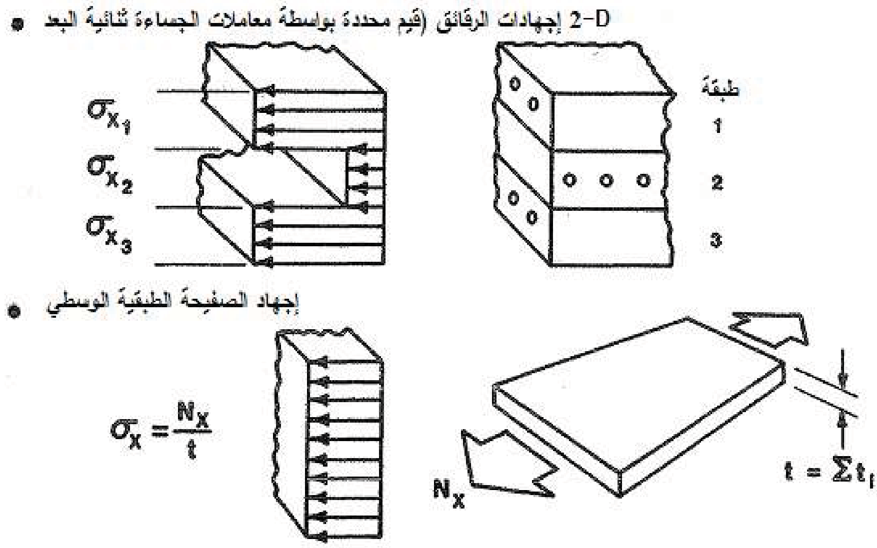
$$\sigma_X^{(2)} = 0.75\frac{N_X}{t} - 7.1\Delta T psi/{}^\circ F\left[0.75\frac{N_X}{t}\Delta T - 0.8819\Delta T MPa/{}^\circ C\right] \quad (4.119)$$

$$\sigma_Y^{(2)} = -0.024\frac{N_X}{t}\ _\ 3.2\Delta T psi/{}^\circ F\left[-0.024\frac{N_X}{t}\Delta T\ _\ 0.03954\Delta T MPa/{}^\circ C\right]$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = 0$$

تم تحديد الإجهادات الآن كدالة خطية للحمولات المطبقة N_X و ΔT. لاحظ أنه تم التعبير عن إجهادات الرقاقات كدالة لمتوسط إجهاد الصفيحة الطبقية، $\frac{N_X}{t}$. وتختلف إجهادات الصفيحة الطبقية عن بعضها البعض بسبب اختلاف اتجاه الليف في كلّ رقاقة. يبيّن الشكل 4–5 ترسيماً لتوزع الإجهاد في صفيحة طبقية افتراضية. ويبيّن الشكل 4-40 ترسيماً أبسط لثلاث طبقات في صفيحة طبقية منتظمة ذات رقاقات متصالبة خاضعة للقوة N_X. وهنا، من الواضح أن إجهادات الرقاقات يجب أن تكون مختلفة من واحدة إلى أخرى. ويتمتع مفهوم متوسط إجهاد الصفيحة الطبقية ببعض الحسنات كمؤشر إلى حمل الصفيحة الطبقية المنظّم. ومع ذلك، يجب الحذر لدى تفسير متوسط إجهاد الصفيحة الطبقية لأنه ببساطة معيار حسابي، وكما هو واضح من الشكل 4-40، فإن متوسط إجهاد الصفيحة

الطبقية لا يحتاج إلى التواجد في أية طبقة. ومع ذلك، استعمل متوسط إجهاد الصفيحة الطبقية الوسطي في هذا التحليل، وفي التحليل التالي من أجل الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة.



الشكل 4-40: متوسط إجهاد الصفيحة الطبقية الوسطي

تطبيق معيار إخفاق الرقاقة

يجب تطبيق معيار الإخفاق لتحديد القيم العظمى لـــ N_X و ΔT التي يمكن تحملها بدون إخفاق أيّ طبقة. ويطبق حالياً معيار الإخفاق على كل طبقة بمفردها. ومن أجل التوجيه الخاص للصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة، يمكن التعبير عن معيار إخفاق تساي- هيل لكل طبقة على النحو التالي:

$$\left[\frac{\sigma_X}{X}\right]^2 - \frac{\sigma_X \sigma_Y}{X^2} + \left[\frac{\sigma_Y}{Y}\right]^2 + \left[\frac{\tau_{XY}}{S}\right]^2 = 1 \qquad (4.120)$$

وبما أن $\tau_{XY} = 0$ ، يُبسَّط هذا المعيار في الطبقة الخارجية إلى:

$$\sigma_X^2 - \sigma_X \sigma_Y + \left[\frac{X}{Y}\right]^2 \sigma_Y^2 = X^2 \qquad (4.121)$$

وينتج من ذلك، بعد تعويض الإجهادات معادلة تربيعية ذات حل:

$$\frac{N_X}{t} = 110\Delta T psi/°F + \left[57.5Y^2 - 3000\Delta T^2(psi/°F)^2\right]^{1/2} = \\ 1.365\Delta T MPa/°C + \left[57.5Y^2 - 3000\Delta T^2(psi/°F)^2\right]^{1/2} \qquad (4.122)$$

فإذا كانت درجة حرارة الشي $270\,°F$ ($132\,°C$) ودرجة حرارة العمل للصفيحة الطبقية 70 $°F$ ($21\,°C$) (درجة حرارة الغرفة)، يكون $\Delta T = -200°F$ (-111 $°C$) ، يصبح:

$$\frac{N_X}{t} = 6300 psi(43.37 MPa) \qquad (4.123)$$

وبالمقابل، إذا تم شي الصفيحة الطبقية في درجة حرارة الغرفة، $\Delta T = 0$ ، يصبح:

$$\frac{N_X}{t} = 30.400 psi(209.3 MPa) \qquad (4.124)$$

وتعطي مجموعة مماثلة من المراحل في الطبقة الداخلية:

$$\frac{N_X}{t} \cong 9.6\Delta T psi/°F + 5320 psi(0.1191\Delta T MPa/°C + 36.68 MPa) \qquad (4.125)$$

أي إذا كانت درجة حرارة الشي $270\ °F$ ($132\ °C$) ودرجة حرارة الاستعمال $70\ °F$ ($21\,°C$)، يصبح:

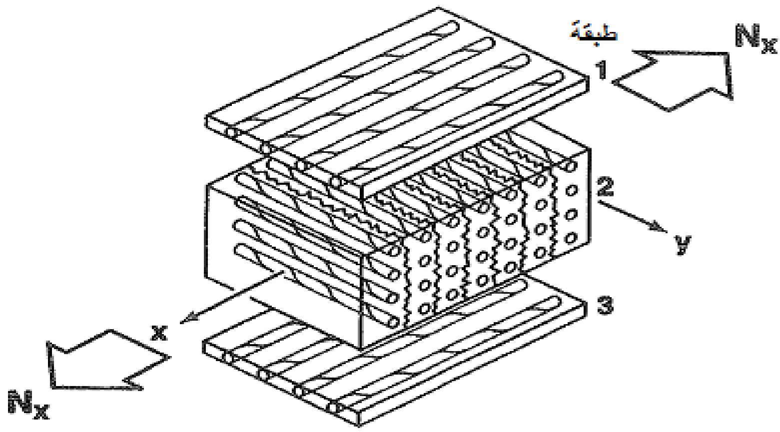
$$\frac{N_X}{t} = 3400 psi(23.44 MPa) \qquad (4.126)$$

أو إذا تم الشي والاستعمال عند الدرجة $70\ °F$ ($21\,°C$) :

$$\frac{N_X}{t} = 5300 psi(36.68 MPa) \qquad (4.127)$$

ومن الواضح أنه إذا كانت درجة حرارة شيّ الصفيحة الطبقية $270\,°F$ ($132\,°C$) ، تخفق في البداية الطبقة الداخلية بفعل التصدع وفق الاتجاه y بسبب الإجهاد الكبير $\sigma_X^{(2)}$ الذي يبلغ Y_t. لماذا يوجد تصدعات بين جميع الألياف المشار إليها في الطبقة الوسطى

(90°)، في الشكل 4–41؟ لقد بلغ مستوى الإجهاد المطبق أو المستحث المتانة الذاتية للطبقة الوسطى، لهذا، ينتظر أن تتكسر هذه الطبقة في موقع واحد فيما لو كانت رقاقة أحادية معرضة لإجهاد الإخفاق، كما هو في الفصل الثاني. ومع ذلك، فالطبقة الوسطى محاطة ومرتبطة من الأعلى والأسفل إلى طبقتين حاملتين. وتفرض هاتان الطبقتان إجهاداً (وانفعالاً) في الاتجاه –x على جميع نقاط الطبقة الوسطى، وذلك على طولها في الاتجاه –x. بهذا، إذا حصل كسرٌ، ستبقى، عندئذ، المواقع الأخرى في الطبقة الوسطى خاضعةً لإجهاد (أو انفعال) الإخفاق، ويجب أيضاً أن تخفق. وستستمر الإخفاقات الإضافية حتى تتكسر جميع المواقع في الاتجاه –x بحيث لا يتبقى في الطبقة الوسطى أيُّ حملٍ في هذا الاتجاه.



الشكل 4–41: منظر لثلاث طبقات منفصلة لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة مع طبقة وسطى متصدعة

تخفق الطبقة الداخلية حالياً في مثالي درجتي حرارة الشيّ، على الرغم من إخفاق الطبقة الخارجية أولاً إذا كانت درجة حرارة الشي عالية بشكلٍ كافٍ. من جهة أخرى، إذا تم تخفيض درجة حرارة الشيّ، فإن الصفيحة الطبقية يمكن أن تُظهر متانة أعلى. وتكون قيم N_X/t من أجل حالتي شروط الشي القيم عند إخفاق الطبقة الداخلية. كما تتوافق هذه القيم

مع النقطة المشار إليها N_1 في الشكل 4–34، أي ما يطلق عليه "الركبة" في مخطط الحمل– انفعال. يكون المخطط حمل– انفعال خطياً حتى الحمل الموافق للركبة حيث تبقى كل الطبقات سليمة, ويكون الانفعال المحوري عند الركبة:

$$\varepsilon_X^{\circ} = A'_{11} N_X = 0.098\% \qquad (4.128)$$

في حال تجاهُل الانفعالات المتبقية، أي يقاس ε_X° من الحمل الذي يساوي الصفر، وهو ليس بحالة انعدام الإجهاد.

السلوك بعد إخفاق الطبقة الأولى

بعد إخفاق طبقة، يتعلق سلوك الصفيحة الطبقية بكيفية فك إقران التفاعلات الميكانيكية والحرارية. وفي الواقع، لا يعني إخفاق طبقةٍ أنها لا تستطيع بعد تحمل أيِّ حمل. في مثال الصفيحة الطبقية الحالية ذات الرقاقات المتصالبة، أخفقت الطبقة الداخلية مع الألياف زاوية °90 بالنسبة إلى المحور x، وبما أن اتجاه الألياف (العمودي على الإجهاد الرئيسي الذي يسبّب الإخفاق)، فإن الإخفاق لا بد أن يكون فقط تصدعات متسلسلة موازية للألياف. لهذا، ما يزال يمكن تحمل الإجهاد من قبل الطبقة الداخلية في اتجاه الليف (الاتجاه y).

وتمتلك الصفيحة الطبقية المتهالكة عندئذٍ معاملات جساءة تعتمد على الخصائص الأساسية للطبقة الخارجية والخصائص التالية للطبقة الداخلية:

$$\begin{aligned} Q_{11}^{(2)} &= 0 \qquad & Q_{22}^{(2)} &= 7.9660x10^{6}\, psi(54.92GPa \\ Q_{12}^{(2)} &= 0 \qquad & Q_{66}^{(2)} &= 0 \end{aligned} \qquad (4.129)$$

حيث تمثل الأصفار حالياً أرقاماً صغيرةً لتحاشي الصعوبات الرقمية في التحليل الحاسوبي. وتمتلك المصفوفة المقلوبة لمعاملات جساءة الاستطالة للصفيحة الطبقية القيم:

$$A'_{11} = 0.7542x10^{-6} /(tpsi)[109.4x10^{-6} /(tMPa)]$$

$$A'_{12} = -0.01178x10^{-6} /(tpsi)[1.7x10^{-6} /(tMPa)] \qquad (4.130)$$

$$A'_{22} = 0.1414x10^{-6} /(tpsi)[20.5x10^{-6} /(tMPa)]$$

لاحظ أن A'_{22} هو تقريباً نفسه في الحالة غير المتهالكة.

وتكون الإجهادات:

$$\sigma_X^{(1)} = 6.00\frac{N_X}{t}$$

$$\sigma_Y^{(1)} = 0.47\frac{N_X}{t} - 19.3\Delta T psi/°F\left[0.47\frac{N_X}{t} - 0.23953\Delta T MPa/°C\right] \quad (4.131)$$

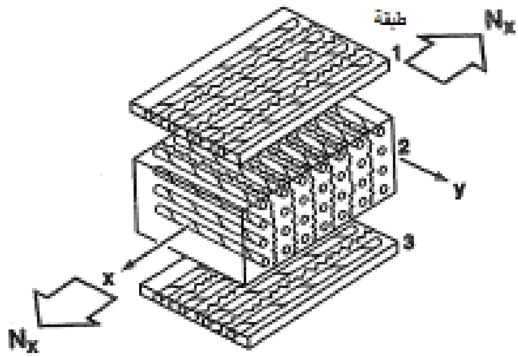
$$\tau_{xy}^{(1)} = 0$$

$$\sigma_X^{(2)} = 0$$

$$\sigma_Y^{(2)} = -.09\frac{N_X}{t} + 3.9\Delta T psi/°F\left[-.09\frac{N_X}{t} + .04840\Delta T MPa/°C\right] \quad (4.132)$$

$$\tau_{xy}^{(2)} = 0$$

من الواضح أنه لا يوجد إقران حراري وفق الاتجاه x، إلاّ أن الإقران الحراري وفق الاتجاه y قد ازداد من الحالة غير المتهالكة [قارن بين المعادلتين (4.118) و (4.119) والمعادلتين (4.131) و (4.132)]. ويكون الإقران الحراري كبيراً عند الشروط ΔT = -200 °F (-111°C) و N_x/t=3400 psi (23.44 MPa) بحيث تخفق الطبقات الخارجية عبر تطور تصوعات متعددة موازية للألياف، كما في الشكل 4−42. ويمكن التحقق من هذا الارتباط بتعويض الإجهادات الناتجة في معيار إخفاق الطبقة الخارجية. هكذا، وكما يشار إلى إمكانية ذلك في إجرائية تحليل المتانة في الجانب الأيمن من الشكل 4−36، تخفق أكثر من رقاقة بشكل متزامن، أي تحت نفس الحمل.



الشكل 4–42: منظر لثلاث طبقات منفصلة لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة مع اهتلاك كل الطبقات (تشققها)

السلوك بعد الاهتلاك

أصبحت الصفيحة الطبقية متهالكة (degraded) حتى الحد الذي تتحمل فيه الطبقات الخارجية الإجهاد فقط في الاتجاه x وتتحمل الطبقات الداخلية الإجهاد فقط في الاتجاه y. وفي كلتا الحالتين، يكون الإجهاد موازياً للألياف، وتكون الصفيحة الطبقية، إذاً، عديمة الإقران تماماً حرارياً وميكانيكياً على السواء. وتكون معاملات الجساءة المختزلة التي لا تساوي الصفر هي:

$$Q_{22}^{(1)} = Q_{11}^{(2)} = 7.9660x10^6\ psi(54.92GPa) \qquad (4.133)$$

وتكون معاملات جساءة الاستطالة المعاكسة والمرافقة للصفيحة الطبقية:

$$A'_{11} = 0.7532x10^{-6}/(tpsi)[0.10925/(tGPa)]$$

$$A'_{12} = 0 \qquad (4.134)$$

$$A'_{22} = 0.1506x10^{-6}/(tpsi)[0.002185/(tGPa)]$$

بناءً على ذلك، يكون إجهاد الرقاق:

$$\sigma_X^{(1)} = 6.00\frac{N_X}{t} \qquad (4.135)$$

كما يكون معامل جساءة استطالة الصفيحة الطبقية الناتج في الاتجاه x فوق "الركبة" في منحنى الحمل– انفعال:

$$\frac{N_X/t}{\varepsilon_X^{\circ}} = \frac{1}{A'_{11}t} = 1.3x10^6\, psi(8.96GPa) \qquad (4.136)$$

وهو ما يساوي ثلث معامل الجساءة، غير المتهالك.

حمل الصفيحة الطبقية الأعظمي

نصل الآن إلى مرحلة تحديد أكبر حملٍ تستطيع الصفيحة الطبقية تحمّله. وبعد نقطة "الركبة" على منحنى الحمل– انفعال، تقاوم الطبقات الخارجية فقط الحمل N_X. وهنا، يكون الإجهاد في الطبقات الخارجية وفق المعادلة (4.118):

$$\sigma_X^{(1)} = 618\, psi(4.26MPa) \qquad (4.137)$$

وتكون القيمة الممكنة الأكبر لـــ σ_X تحت شروط أحادية المحور 150 ksi (1035 MPa). لهذا، يمكن إجهاد الطبقة الخارجية بشكلٍ إضافي حوالى 149.4 ksi (1030.7 MPa). ويتم الحصول على التغير في القوة الناتجة من المعادلة (4.135) على النحو التالي:

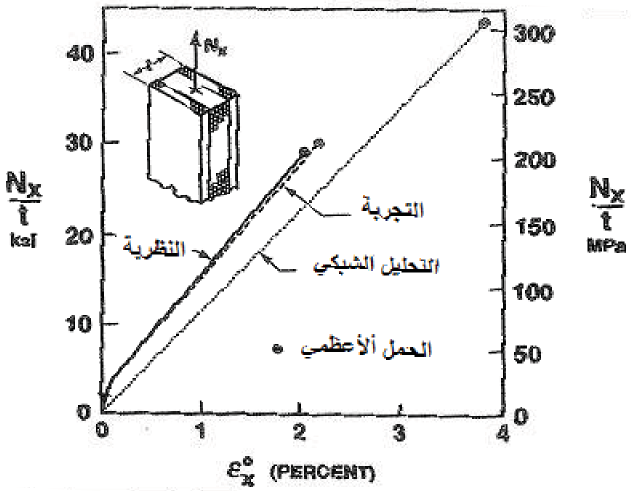
$$\frac{\Delta N_X}{t} = \frac{\Delta\sigma_X^{(1)}}{6.00} = 149.400\, psi/6 = 24.900\, psi(171.8MPa) \qquad (4.138)$$

عندما يضاف تغير القوة الناتجة إلى القوة الناتجة عند "الركبة"، يُحدد إجهاد الصفيحة الطبقية الوسطي الأعظم على النحو التالي:

$$\frac{N_X}{t} = 3400\, psi + 24.900\, psi = 28.300\, psi(194.5MPa) \qquad (4.139)$$

وهذا ما يقارب بشكلٍ معقولٍ الحمل ألأعظمي المقاس في الشكل 4-43. لاحظ أن "ركبة" لوحظت في التجارب. يظهر الشكل 4-43 أيضاً نتائج نظرية أخرى تسمى التحليل الشبكي، ومن الواضح عدم صحة هذه النظرية من أجل المواد المقواة بألياف. يركّز التحليل الشبكي

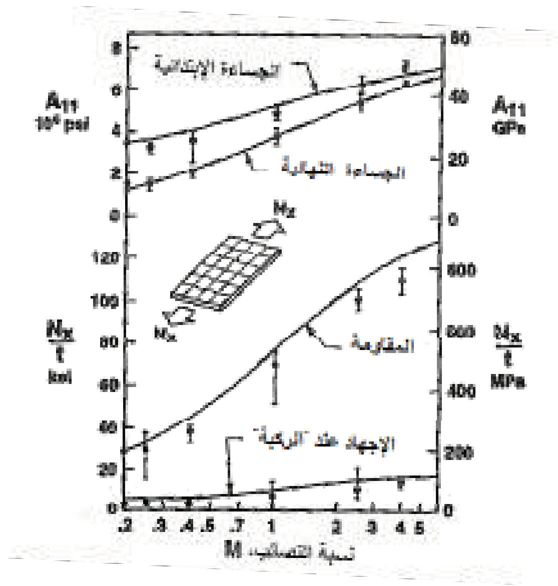
على كل الحمولات التي تتحملها الألياف، ويعتبر ذلك مناسباً في النسيج المحبوك حيث لا يوجد مصفوفة تتحمل الأحمال.



الشكل 4−43: متانة صفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة مع M=0.2 (عن تساي [4−10])

المتانة والجساءة من أجل نسب تصالب

يُظهر الشكل 4-44 المتانات ومعاملات الجساءة لصفائح طبقية ذات ثلاث طبقات متصالبة مع نسب تصالب ضمن المجال 0.2 إلى 4. يعزى التبعثر في المعطيات جزئياً إلى صعوبة تصنيع عيّنات شد جيدة، حيث ميزة شكل عظمة الكلب التي تتشكل بواسطة طريق ملتوية (routing) تضرّ غالباً الطبقة ذات زاوية 90°.



الشكل 4–44: متانة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة (عن تساي وآدامز ودونر [4–11])

تقع المتانات المتوقعة هي عموماً فوق القيم المُقاسة. وتتوافق معاملات الجساءة المتوقعة والمقاسة في الحالة الابتدائية (قبل الركبة) والنهائية. بهذا، تتحقق جوانب الجساءة لنظرية التصفيح التقليدية ولإجرائية تحليل المتانات الحالية على السواء.

6.5.4 متانة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة

تمتلك الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة مصفوفات جساءة أكثر تعقيداً منها في الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة لأن الأمر يتعلق بتحويلات إحداثيات ليست بديهية. ومع ذلك، سيتبين أن سلوك الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة سيكون (زاوية واحدة فقط، أي $\pm\alpha$) أسهل منه في الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة لأنه لا يحصل "ركبة" في مخطط الحمل– انفعال في حالة التحميل المحوري. وفي ما عدا هذين الاختلافين، يعتبر تحليل الطبقية ذات الرقاقات المائلة مبدئياً مماثلاً لما هو في الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة.

كمثالٍ لتوضيح إجرائية تحليل المتانة، نعتبر صفيحة طبقية من ثلاث طبقات ذات تتابع تنضيد [+15°/-15°/+15°] [4–10]. وتكون الرقاقات، كما هو الحال في مثال الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة، من الإيبوكسي المقوى بألياف زجاج – نوع E

ذات سماكة 0.005 in (0.1270 mm) بحيث تكون سماكة الصفيحة الطبقية الإجمالية 0.015in (0.381mm). تكون معاملات الجساءة المختزلة المحولة في إحداثيات الصفيحة الطبقية على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
Q_{22}^{(1)} &= Q_{11}^{(2)} = 7.9660x10^{6}\,psi(54.92GPa) \\
\overline{Q}_{12}^{(1)} &= \overline{Q}_{12}^{(2)} = 0.932x10^{6}\,psi(6.428GPa) \\
\overline{Q}_{22}^{(1)} &= \overline{Q}_{22}^{(2)} = 2.743x10^{6}\,psi(18.91GPa) \\
\overline{Q}_{16}^{(1)} &= -\overline{Q}_{16}^{(2)} = -1.129x10^{6}\,psi(-7.781GPa) \qquad (4.140) \\
\overline{Q}_{26}^{(1)} &= -\overline{Q}_{26}^{(2)} = -0.199x10^{6}\,psi(-1.372GPa) \\
\overline{Q}_{66}^{(1)} &= \overline{Q}_{66}^{(2)} = 1.518x10^{6}\,psi(10.47GPa)
\end{aligned}$$

وتكون معاملات التمدد الحراري الظاهرية على النحو التالي:

$$\begin{aligned}
\alpha_x^{(1)} &= \alpha_y^{(2)} = 4.029x10^{-6}/{}^\circ F(7.253x10^{-6}/{}^\circ C) \\
\alpha_y^{(1)} &= \alpha_x^{(2)} = 10.871x10^{-6}/{}^\circ F(19.57x10^{-6}/{}^\circ C) \qquad (4.141) \\
\alpha_{xy}^{(1)} &= -\alpha_{xy}^{(2)} = 1.975x10^{-6}/{}^\circ F(3.555x10^{-6}/{}^\circ C)
\end{aligned}$$

ويمكن بيان أن المصفوفة المعاكسة لجساءة الاستطالة تكون:

$$A' = \begin{bmatrix} 9.603 & -3.210 & 2.239 \\ & 25.41 & 0.3148 \\ (symmetric) & & 44.48 \end{bmatrix} x10^{-6}/(lb/in) \qquad (4.142)$$

أو

$$A' = \begin{bmatrix} 0.5483 & -0.01832 & 0.01278 \\ & 25.41 & 0.001797 \\ (symmetric) & & 0.2539 \end{bmatrix} x10^{-6} /(N/m) \qquad (4.142)$$

ومن أجل درجة حرارة تصفيح ثابتة:

$$N_X^T = 37.5t\Delta Tpsi/°F(0.4655t\Delta TMPa/°C)$$

$$N_Y^T = 33.2t\Delta Tpsi/°F(0.4118t\Delta TMPa/°C) \qquad (4.143)$$

$$N_{XY}^T = -1.24t\Delta Tpsi/°F(0.1535t\Delta TMPa/°C)$$

وتساوي العزوم الحرارية الصفر. وعندما تتعرض الصفيحة الطبقية لـــ N_x فقط، تكون الإجهادات:

$$\sigma_X^{(1)} = 0.97\frac{N_X}{t} - 0.44\Delta Tpsi/°F\left[0.97\frac{N_X}{t}\Delta T - 0.00551\Delta TMPa/°C\right]$$

(4.144)

$$\sigma_Y^{(1)} = -0.005\frac{N_X}{t} - 0.08\Delta Tpsi/°F\left[-0.005\frac{N_X}{t}\Delta T - 0.00097\Delta TMPa/°C\right]$$

$$\tau_{xy}^{(1)} = -0.1\frac{N_X}{t} - 1.79\Delta Tpsi/°F\left[-0.10\frac{N_X}{t}\Delta T - 0.0222\Delta TMPa/°C\right]$$

$$\sigma_Y^{(2)} = 0.01\frac{N_X}{t} + 0.16\Delta Tpsi/°F\left[0.01\frac{N_X}{t}\Delta T - 0.000194\Delta TMPa/°C\right]$$

(4.145)

$$\tau_{xy}^{(2)} = 0.20\frac{N_X}{t} + 3.58\Delta Tpsi/°F\left[0.20\frac{N_X}{t}\Delta T - 0.0445\Delta TMPa/°C\right]$$

لاحظ أن الإجهادات تكون صغيرةً جداً مقارنة بإجهادات القص. لهذا، يمكن اختصار معيار تساي–هيل لإخفاق الرقاقة لهذه الرقاقة إلى:

$$K_1\sigma_X^2 - K_2\sigma_X\tau_{XY} + K_3\tau_{XY}^2 = X^2 \qquad (4.146)$$

حيث:

$$K_1 = \cos^4\theta + 624\cos^2\theta\sin^2\theta + 1406\sin^4\theta$$

$$K_2 = -(1244\cos^3\theta\sin\theta + 4386\cos\theta\sin^3\theta) \qquad (4.147)$$

$$K_3 = 625\cos^4\theta + 4382\cos^2\theta\sin^2\theta + 625\sin^4\theta$$

تكون قيم K_i من أجل $\theta = -15°$، هي:

K_3=821.00 K_2=363.91 K_1=46.20 (4.148)

و من أجل $\theta = +15°$

K_3=821.00 K_2=-363.91 K_1=46.20 (4.149)

هكذا، يكون متوسط الإجهاد الأعظمي للصفيحة الطبقية في الطبقة الخارجية:

$$\frac{N_X}{t} = 11.14\,psi/°F + 37{,}400\,psi(0.1383\Delta TMPa/°C + 257.9MPa)$$

(4.150)

فإذا شُويت الصفيحة الطبقية عند الدرجة $270\,°F$ ($132\,°C$) واستعملت عند الدرجة 70 $°F$ ($21\,°C$)

$$\frac{N_X}{t} = 35.170\,psi(242.5MPa) \qquad (4.151)$$

وبشكلٍ مشابه في الطبقة الداخلية:

$$\frac{N_X}{t} = 52{,}600\,psi(262.7MPa) \qquad (4.152)$$

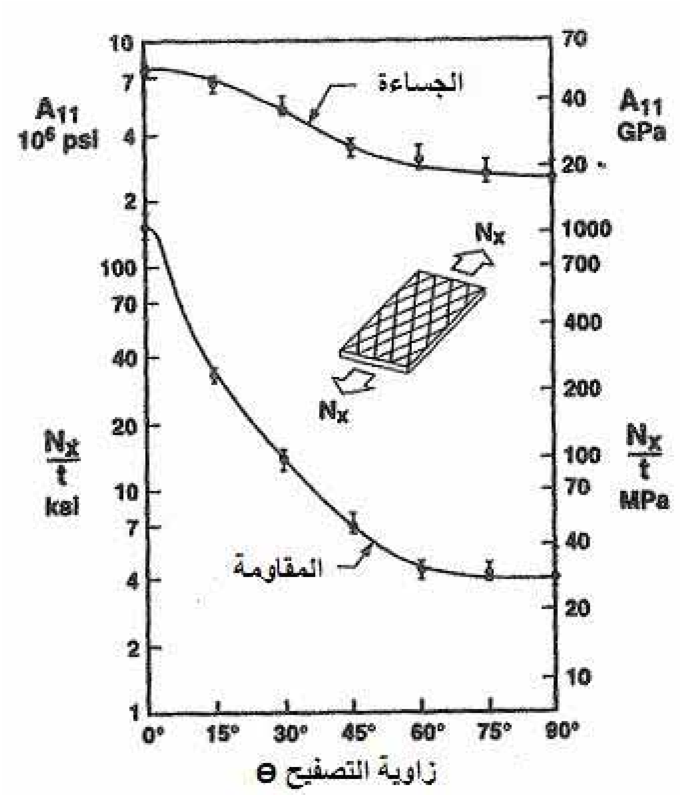
وبهذا، تخفق أولاً الطبقة الخارجية، وذلك بكسر الليف، وبحيث لا يمكن تحمّل أي حمل أو إجهاد في أي اتجاه بواسطة الطبقة الخارجية. وإذا تذكرنا أنه يوجد في الواقع طبقتان خارجيتان، فإنهما تخفقان كلياً معاً وبشكلٍ متزامن. وبما أن الطبقة الداخلية الباقية لا يمكن أن تتحمل بنفسها متوسط الإجهاد للصفيحة الطبقية الذي يساوي 35,170 psi (242,5 MPa)، فإنها تخفق مباشرةً بعد الطبقات الخارجية. بناءً عليه، يكون متوسط الإجهاد الإجهاد الأعظمي للصفيحة الطبقية هو:

$$\frac{N_X}{t} = 35{,}170\,psi(242.5\,MPa) \qquad (4.153)$$

ولا يوجد، كما يُدعى، ركبة في سلوك الحمل− انفعال.

يظهر الشكل 4-45 متانات متوقعة مشابهة ونتائج تجريبية تم الحصول عليها من أجل زوايا أخرى للتصفيح ذي الرقاقات المائلة. يعتبر التوافق بين التوقع والقياس جيداً. وكدليلٍ إضافي على تقانات طرائق التوقع بالجساءة في الفقرة 4.4، تم رسم معاملات الجساءة النظرية والمقاسة في الشكل 4-45 وظهر التوافق بينها جيداً جداً. مع ذلك، وبسبب السلوك إجهاد− انفعال غير الخطي، تكون، عموماً، الانفعالات عند الإخفاق، من أجل زاوية تصفيح قدرها 45° عدة مرات الانفعالات المتوقعة.

لا يعتبر السلوك غير الخطي مفاجئاً لأن إجهادات القص الكبيرة التي تتطور تعمل على تشويه المصفوفة (غير الخطية) في المادة المركبة المقواة بالألياف أكثر من تشويه الألياف. وترتبط الملاحظة الأخرى الهامة في مقارنة معطيات الصفيحة الطبقية ذات الرقاقات المائلة الحالية بمعطيات الرقاقات أحادية الاتجاه عند توجيهات مختلفة في الشكل 2−25 والفقرة 9.2. فمن أجل زوايا أكبر من 0° لكن أصغر من 45°، تمتلك الرقاقات المائلة متانة أعلى بحدود 45% من الرقاقات أحادية الاتجاه. وتنتج هذه الفوارق من التفاعلات الميكانيكية والحرارية بين الطبقات، الأمر الذي لا يحصل في الرقاقات.



الشكل 4-45: متانة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة (عن تساي [4-10])

7.5.4 ملاحظات تلخيصية

لقد تم تحليل متانة فئات خاصة من المواد المركبة الصفائحية المقواة بالألياف بناءً على عدة فرضيات:

- يحصل السلوك المرن الخطي حتى الإخفاق في الرقاقة المنفردة،
- تُطبق فرضية كيرشوف للتغير الخطي للمتانة عبر سماكة الصفيحة الطبقية (قبل التهالك، إذا حصل؛ بعد التهالك، خطّيّ فقط عبر سماكة كل الرقاقات).
- تكون متانات ومعاملات جساءة الرقاقة نفسها في الشدّ وفي الضغط.
- يتحكم معيار تساي- هيل بإخفاق الرقاقات (يمكن لإجرائية تحليل المتانة، بالتأكيد، أن تنطوي على معيار آخر).

- يمكن أن يعني إخفاق الرقاقات مثلاً فقط غياب الجساءة والمتانة العموديتين على الألياف مع عدم تهالك قدرة الرقاقات في اتجاه الليف.

في حالة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة، تظهر "ركبة" في منحنى الحمل- انفعال، وذلك بعد زوال إقران التفاعلات الميكانيكية والحرارية بين الطبقات بسبب الإخفاق (الذي يمكن أن يكون تهالكاً فقط، وليس بالضرورة كسراً). وتنتج التفاعلات الميكانيكية من تأثيرات بواسون و/ أو الإقران قص- استطالة. كما تنتج التفاعلات الحرارية من معاملات التمدد الحراري في الطبقات المختلفة بسبب التوجيهات الزاوية المختلفة للطبقات (حتى في حال وجود نفس المواد ثلاثية المناحي في كل رقاقة). وإذا انفصلت الطبقات في الصفيحة الطبقية تختل التفاعلات.

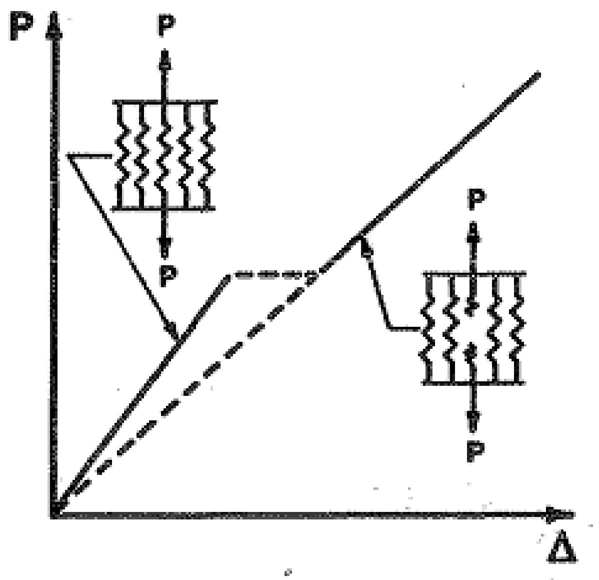
في حالة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة، لا يحصل مثل تلك "الركبة" أو تغير في الميل في سلوك الحمل- انفعال. ويحصل إخفاق متزامن (كسر) لكل الطبقات.

صنف تساي [4-10] في جدول جميع معاملات الجساءة ومعاملات الجساءة والقوى والعزوم الحرارية، إلخ، وذلك من أجل الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة والمائلة في حالة طبقتين أو ثلاث طبقات. وقد تم الحصول على النتائج من أجل نسب تصالب- ميل مختلفة وزوايا تصفيح وفق المناسب ومن خلال برنامج حاسوبي قصير يمكن استعماله من أجل موادّ أخرى.

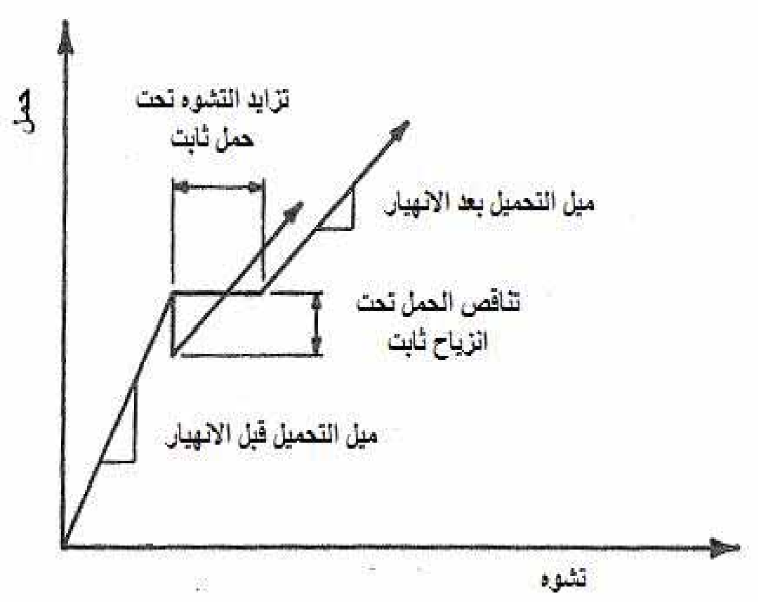
لم يتم مراعاة الزيادة الممكنة للانحراف الذي يحصل عندما تخفق طبقة في إجرائية تحليل المتانة التي نوقشت في هذه الفقرة. هذا يعني أنه إذا تم تمثيل الصفيحة الطبقية ببساطة بواسطة مجموعة من النوابض على التوازي (يمثل نابض واحد رقاقة واحدة) كما في الشكل 4-46، فعندما ينقطع نابض، يجب أن يمتلك كلٌ من النوابض الباقية حملاً أعلى، وبالتالي انحرافاً أعلى. بناءً على ذلك، تحصل قفزة أفقية (في الانفعال أو الانحناء) في سلوك الحمل- انحراف للصفيحة الطبقية، كما يتبين بيانياً في الشكل 4-46. إن مثل هذا السلوك المرحلي حمل- انحراف لم يتم ملاحظته تجريبياً، كما لم يتم تحليله حسب معرفة المؤلف. ويعتبر نموذج النوابض المتوازية لإخفاق الصفيحة الطبقية في الشكل 4-46 شديد البساطة لتمثيل كل الوقائع والشروط الهامة. وعلى سبيل المثال، لا يتم نمذجة شروط

التحميل بشكلٍ مرضٍ في الشكل 4-46. ويمكن أن يكون التحميل في إطار التحميل إما حملاً ثابتاً (كما يُنصح) أو انزياحاً ثابتاً (كما يُنصح) على رأس التحميل. ويمكن أن يُنتج الحمل الثابت سلوكاً في الشكل 4-46، لكن الانزياح الثابت (كما في حال إطار التحميل لولبي النموذج) يمكن أن يولّد قفزةً شاقوليةً (انزياحاً ثابتاً) في سلوك الحمل- انفعال كما في الشكل 4-47، وهنا، تكون ميول التحميل ما بعد الإخفاق متماثلة، لكن المنحنيات تتوازن (offset) من واحدٍ إلى آخر.

في الواقع، لا تحصل الإخفاقات بين الألياف على الأرجح تماماً عند نفس الحمل. لهذا، يمكن أن يكون منحنى الحمل- انفعال الحالي مكوناً من وقائع صغيرة متسلسلة (انزياحات للأسفل أو نحو اليمين) متوزعة على مجال حملٍ معيّن ينحو ببساطةٍ لتغيير المنحنى تدريجياً. ولا تحل المنحنيات المتوفرة لسلوك الحمل- انفعال المقاس هذه المسألة. ويكون السلوك الحالي في البنية الحقيقية على الأرجح ليس حملاً مفروضاً، بل انزياحاً مفروضاً، وإنما شيئاً بينهما.



الشكل 4-46: التماثل النابضي للسلوك حمل- انحناء للصفيحة الطبقية



الشكل 4-47: السلوك بعد إخفاق الطبقة الأولى

مجموعة المسائل 5.4

1.5.4 اشتقْ علاقات الإجهاد- انفعال الحرارية المرنة لرقاقة ثلاثية المناحي تحت إجهاد مستوي (plane stress)، المعادلة (4.102) من علاقات الإجهاد- انفعال الحرارية المرنة غير متماثلة المناحي في ثلاثة أبعاد، المعادلة (4.101) [أو من المعادلة (4.100)].

2.5.4 اشتقْ عبارات α_x و α_y و α_{xy} في المعادلة (4.103) كدالة لـ α_1 و α_2 و θ . تحقق من أن α_{xy} يتلاشى في المواد متماثلة المناحي. ما هو α_{xy} في حالة رقاقة محبوكة ثنائية الاتجاه ومتساوية عدد الألياف في كلّ اتجاه؟

3.5.4 تحقّقْ من أن N'_x و N'_y و N'_{xy} تعطى بالمعادلة (4.117) في حالة صفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة من ثلاث طبقات و M=0.2.

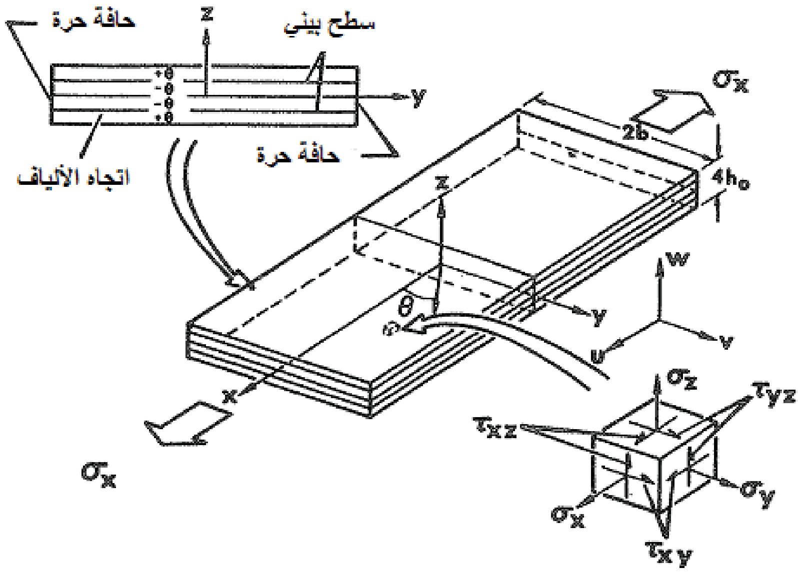
4.5.4 تحققْ من أن القوى الحرارية $\sigma_x^{(1)}$ تعطى بالمعادلة (4.118) في حالة صفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة من ثلاث طبقات و M = 0.2.

5.5.4 تحققْ من أن الإجهادات الميكانيكية والحرارية في المعادلتين (4.118) و(4.119) في حالة صفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة من ثلاث طبقات و M = 0.2 تستوفي شروط التوازن في صفيحة طبقية.

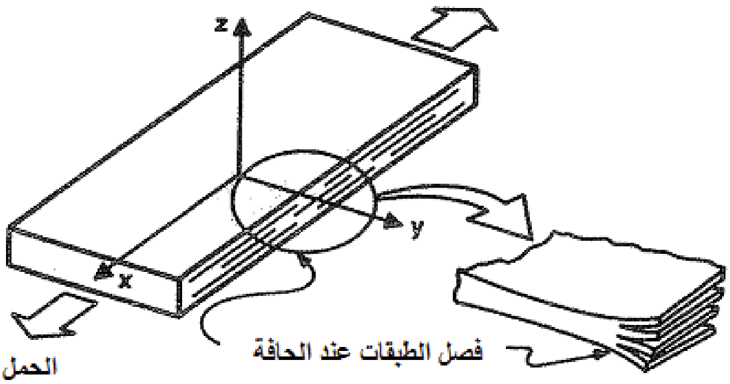
6.4 الإجهادات ما بين الطبقات

في نظرية التصفيح التقليدية (classical lamination theory-CLT)، لا تُؤخذ بعين الاعتبار الإجهادات مثل σ_z و τ_{zx} و τ_{zy} التي تظهر في عنصرٍ لصفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة خاضعةٍ للحمل N_x في الشكل 48.4. تسمّى هذه الإجهادات بالإجهادات ما بين الطبقات (interlaminar stresses)، وتوجد على السطوح بين الطبقات المتجاورة. على الرغم من وجودها ضمن الطبقات، إلا أنها تكون عموماً أكبر على السطوح البينية للطبقة. هكذا، تعتبر نظرية التصفيح التقليدية (CLT) فقط الإجهادات في مستوي الصفيحة الطبقية σ_x و σ_y و τ_{xy}، أي أنه يُفترض وجود حالة إجهادٍ مستوٍ.

بناءً على ذلك، لا تشتمل نظرية التصفيح التقليدية بعض من الإجهادات التي تسبّب فعلاً إخفاق الصفيحة الطبقية المركبة. وتشكل الإجهادات العالية ما بين الطبقات أساساً لواحدة من آليات الإخفاق المميزة على نحو فريد للصفائح الطبقية المركبة، أي، فصل الطبقات حرّة الحافة ونمو فصل الطبقات لاحقاً كما في الشكل 4-49. ويمكن أن تخضع ببساطةٍ أيضاً لصدع بينها والانزلاق على طول الصدع وفق أحد الاتجاهين x أو y. انظر الفقرة 5.6 لمناقشة الانفتاح والقص الموازي وأنماط القص الأمامي لاستطالة الشق.



الشكل 4–48: هندسة وإجهادات صفيحة طبقية متناظرة ذات رقاقات مائلة (عن بايبس Pipes وباغانو Pagano [4–12])



الشكل 4–49: فصل الطبقات حر الحافة

تنطوي نظرية التصفيح التقليدية غالباً على قيمٍ لـــ σ_y و τ_{xy} حيث لا يمكنها، على الأرجح، أن توجد، وخاصة عند حافة الصفيحة الطبقية. وستستعمل الأسس الفيزيائية لإقامة الدليل على ذلك:

- عند الحواف الحرة للصفيحة الطبقية (جوانب الصفيحة الطبقية أو الثقوب)، تكون إجهادات القص بين الطبقات و/ أو الإجهاد الناظمي بين الطبقات عالية جداً (وربما حتى فريد)، ويمكنها، إذاً، أن تسبب فصل الترابط الذي لوحظ في مثل هذه المناطق.
- تُحدث تغيرات تتابع تنضيد الطبقات فوارق في متانة الشد للصفيحة الطبقية حتى إذا لم تتغير توجيهات كل طبقة (في نظرية التصفيح التقليدية، لا تمتلك مثل هذه التغيرات أية تأثيرات في معاملات جساءة الاستطالة). ويُعتقد أن الإخفاقات الناتجة من إجهادات القص بين الطبقات τ_{zx} و τ_{zy} و/أو الإجهاد الناظمي بين الإخفاقات σ_z والتغيرات قرب حدود الصفيحة الطبقية توفر الإجابة عن مثل هذه الفوارق في المتانة.

سيتم في هذه الفقرة أولاً تحديد الإجهاد بين الطبقات في الحالة البسيطة لحوافٍ حرةٍ لصفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة. وسيتم، بعدئذ، وصف مفهوم الإجهادات بين الطبقات باستعمال مقاربة المرونة. ويتم فيما بعد تقديم الإثبات التجريبي للنظرية. وفيما بعد، سيتم تحليل صفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة، يليها صفيحة طبقية مختلطة الزوايا. أخيراً، سيتم تفحص التفاعل بين الإجهادات بين الطبقات وتتابع التنضيد وتأثيرها في متانة الصفيحة الطبقية مع بعض المقترحات حول كيفية إزالة فصل طبقات الحافة الحرة.

1.6.4 نظرية التصفيح التقليدية

لنعتبر صفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة مؤلفة من رقاقات ثلاثية المناحي منضدة بشكلٍ متناظر حول السطح الأوسط، كما في الشكل 4-48. وبسبب التناظر في كلٍّ من خصائص المادة والشكل الهندسي، لا يحصل إقران بين الانحناء والاستطالة. هذا يعني أنه يمكن تعريض الصفيحة الطبقية في الشكل 4-48 لــ N_x مما يؤدي فقط إلى استطالتها وفق الاتجاه x وتقلصها وفق الاتجاهين y و z وعدم انحنائها.

يتركز تحليل مثل هذه الصفيحة الطبقية باستعمال نظرية التصفيح التقليدية حول علاقات الإجهاد- انفعال للرقاقة المنفردة ثلاثية المناحي تحت حالة إجهادٍ مستوي وفق اتجاهات المادة الرئيسية:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\end{bmatrix}_k=\begin{bmatrix}Q_{11} & Q_{12} & 0\\ Q_{12} & Q_{22} & 0\\ 0 & 0 & Q_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1^{\circ}\\ \varepsilon_2^{\circ}\\ \gamma_{12}^{\circ}\end{bmatrix} \tag{4.154}$$

وهو ما يمكن تحويله إلى محاور الصفيحة الطبقية باستعمال المعادلة (2.85):

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}_k=\begin{bmatrix}\overline{Q}_{11} & \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{16}\\ \overline{Q}_{12} & \overline{Q}_{22} & \overline{Q}_{26}\\ \overline{Q}_{16} & \overline{Q}_{26} & \overline{Q}_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x^{\circ}\\ \varepsilon_y^{\circ}\\ \gamma_{xy}^{\circ}\end{bmatrix} \tag{4.155}$$

وتكون معاملات جساءة الاستطالة للصفيحة الطبقية:

$$A_{ij}=\sum_{k=1}^{N}(\overline{Q}_{ij})_k(Z_k-Z_{k-1}) \tag{4.156}$$

وتكون علاقات القوة– انفعال:

$$\begin{bmatrix}N_x\\ 0\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12} & 0\\ A_{12} & A_{22} & 0\\ 0 & 0 & A66\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x^{\circ}\\ \varepsilon_y^{\circ}\\ \gamma_{xy}^{\circ}\end{bmatrix} \tag{4.157}$$

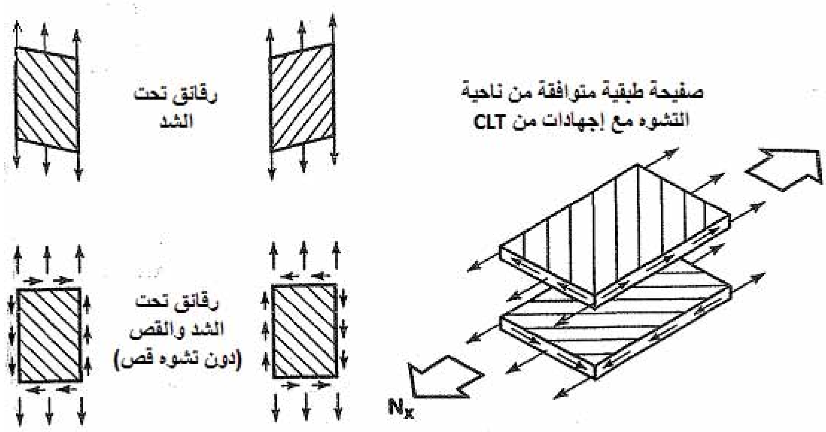
ويكون انفعال الغشاء:

$$\varepsilon_y^{\circ}=\frac{-A_{12}N_x}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}\qquad \varepsilon_x^{\circ}=\frac{A_{22}N_x}{A_{11}A_{22}-A_{12}^2} \tag{4.158}$$

لا يوجد قص إجمالي (γ_{xy}°) للصفيحة الطبقية. ومع ذلك، يوجد انفعال قص في جملة إحداثيات المادة الرئيسية لكل رقاقة، بالإضافة إلى الانفعالات الناظمية، كما يبرهن استعمال المعادلة (2.75):

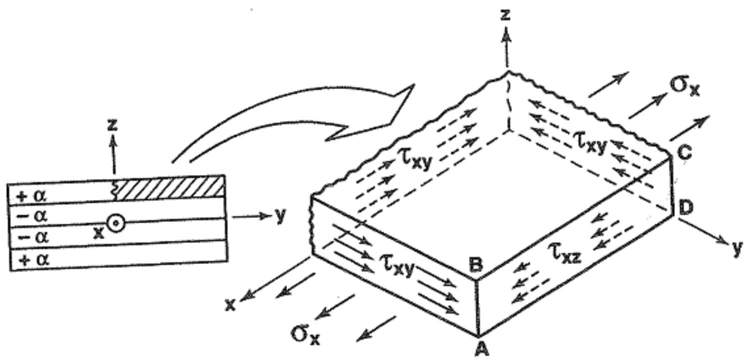
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \cos^2\theta - \frac{A_{12}}{A_{22}}\sin^2\theta \\ \sin^2\theta - \frac{A_{12}}{A_{22}}\cos^2\theta \\ -2\cos\theta\sin\theta\left[1 + \frac{A_{12}}{A_{22}}\right] \end{bmatrix}_k \frac{A_{22}N_x}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2} \qquad (4.159)$$

نتفحص تنضيد رقاقتين لبناء صفيحة طبقية ذات طبقتين مائلتي الزاوية ودراسة انعكاسات الإجهاد في نظرية التصفيح التقليدية. نُعرّض أولاً رقاقتين منفصلتين تتوضع أليافهما على الزاويتين α + و α- على التوالي إلى نفس الإجهاد σ_x. يجب أن تنفعل الرقاقتان المنفصلتان ضمن متوازيي أضلاع موجهين ومتعاكسين كما يبين الشكل 4-50. ولتحضير هاتين الرقاقتين للترابط وتشكيل صفيحة طبقية (دون انفعال قص)، يجب تطبيق إجهادي قص متعاكسين، τ_{xy}، على الرقاقتين لإعادتها إلى الشكل المستطيل وتشكيل صفيحة طبقية متوافقة من ناحية الانفعال. تمتلك الرقاقتان المبيّنتان في الشكل 4-50 إجهادات قص على طول الحواف الحرة. ولا يمكن لإجهادات القص تلك، مع أنها متوازنة لمجمل الصفيحة الطبقية، أن توجد ببساطة على أية حافة حرة. لهذا، تظهر نظرية التصفيح التقليدية (CLT) تناقضها المتأصل في شروط الإجهاد الحدودية الواضحة على كل طبقة.



الشكل 4-50: مقاربة نظرية التصفيح التقليدية (CLT) لتحليل صفيحة طبقية من طبقتين مائلتي الزاوية

وكبديل، لنعتبر مخطط الجسم الحر (القوى المطبقة) لنصف الطبقة العلوية للصفيحة الطبقية من أربع طبقات مائلة الزاوية في الشكل 4-51. هنا، يكون الجانب الأيسر للمستوي x-z بعيداً عن الحافة الحرة. لهذا، يمكنه امتلاك τ_{xy} وفق توقع نظرية التصفيح التقليدية. بالمقابل، يبيّن الشكل 4-51 أنه عند الحافة الحرة، لا يمكن لـ τ_{xy} أن توجد على الوجه ABCD. هذا يعني أنه يجب أن يكون ABCD عديم الإجهاد لأنه حافة حرة. إضافة إلى ذلك، يجب أن يسعى τ_{xy}، على الوجهين الأمامي والخلفي، نحو الصفر على AB وCD. ولتحقيق توازن القوى وفق الاتجاه x، يجب تحديد الإجهاد الذي يمكنه أن يحل محل فعل الإجهاد τ_{xy} الذي يجب ألّا يوجد على الوجه ABCD. يكون الإجهاد الوحيد الممكن τ_{xz} الذي يجب أن يوجد في أسفل مخطط الجسم الحر (القوى المطبقة) للطبقة العلوية. من أجل توازن العزوم حول محور شاقولي، يجب أن يكون τ_{xz} كبيراً جداً، لأنه يوجد فقط قرب الحافة الحرة. وعلى الرغم من أننا نعرف الإجهاد (τ_{xz})، ومن أننا نبحث عن كونه مرتفعاً، فلا يمكننا تحديد درجة ارتفاعه بدون الاستعانة بنظرية المرونة في الفقرة الفرعية التالية.



الشكل 4−51: مخطط الجسم الحر لصفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة

2.6.4 صياغة المرونة

بدلاً من حالة الإجهاد المستوي، يتم، في مقاربة المرونة لبايبس وباغانو [4−12]، اعتبار حالة إجهاد ثلاثية الأبعاد على مسألة الفقرة 1.6.4. تكون علاقات الإجهاد− انفعال لكلّ طبقة ثلاثية المناحي في اتجاهات المادة الرئيسية:

$$\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \tau_{23}\\ \tau_{31}\\ \tau_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0\\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0\\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ \gamma_{23}\\ \gamma_{31}\\ \gamma_{12}\end{bmatrix} \qquad (4.160)$$

ويمكن، بعد تحويل الإحداثيات في المستوي 1-2، التعبير عنها في إحداثيات الصفيحة الطبقية على النحو التالي:

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{13} & 0 & 0 & \overline{C}_{16}\\ \overline{C}_{12} & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{23} & 0 & 0 & \overline{C}_{26}\\ \overline{C}_{13} & \overline{C}_{23} & \overline{C}_{33} & 0 & 0 & \overline{C}_{36}\\ 0 & 0 & 0 & \overline{C}_{44} & \overline{C}_{45} & 0\\ 0 & 0 & 0 & \overline{C}_{45} & \overline{C}_{55} & 0\\ \overline{C}_{16} & \overline{C}_{26} & \overline{C}_{36} & 0 & 0 & \overline{C}_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x\\ \varepsilon_y\\ \varepsilon_z\\ \gamma_{yz}\\ \gamma_{zx}\\ \gamma_{xy}\end{bmatrix} \qquad (4.161)$$

تعطى علاقات الانزياح– انفعال على النحو التالي:

$$\varepsilon_x = U_{`x} \qquad \varepsilon_y = V_{`y} \qquad \varepsilon_z = W_{`z} \qquad (4.162)$$

$$\gamma_{yz} = V_{`z} + W_{`y} \qquad \gamma_{zx} = W_{`x} + U_{`z} \qquad \gamma_{xy} = U_{`y} + V_{`x}$$

حيث تشير البينية إلى الاشتقاق الجزئي للرمز الرئيسي بالنسبة إلى الرمز اللاحقة السفلية.

إذا تعرّضت الصفيحة الطبقية لاستطالة محورية منتظمة على الأطراف x = ثابت، تكون، عندئذ، الإجهادات مستقلة عن x. ويتم الحصول على علاقات الإجهاد– انزياح باستبدال علاقات الانفعال– انزياح، المعادلة (4.162)، في علاقات الإجهاد– انفعال، المعادلة (4.161). بعد ذلك، يمكن تكامل علاقات الإجهاد– انزياح تحت الشرط أن الإجهادات تابعة لـــ y و z فقط، وذلك للحصول، بعد فرض شروط التناظر وعدم التناظر، على شكل مجال الانزياح للمسألة الحالية:

$$u = Kx + U(y,z) \qquad v = V(y,z) \qquad w = W(y,z) \qquad (4.163)$$

وتُختزل، عندئذ، معادلات توازن الإجهاد إلى:

$$\tau_{xy,y} + \tau_{zx,z} = 0$$

$$\sigma_{y,y} + \tau_{yz,z} = 0 \qquad (4.164)$$

$$\tau_{yz,y} + \sigma_{z,z} = 0$$

بعد استبدال مجال الانزياح، المعادلة (4.163)، في علاقات الإجهاد– انزياح وفيما بعد في المعادلات التفاضلية لتوازن الإجهاد، المعادلة (4.164)، تكون المعادلة التفاضلية لتوازن الانزياح لكل طبقة:

$$\overline{C}_{66}U_{,yy} + \overline{C}_{55}U_{,zz} + \overline{C}_{26}V_{,yy} + \overline{C}_{45}V_{,zz} + (C_{36} + C_{45})W_{,yz} = 0$$

$$\overline{C}_{26}U_{,yy} + \overline{C}_{45}U_{,zz} + \overline{C}_{22}V_{,yy} + \overline{C}_{44}V_{,zz} + (C_{23} + C_{44})W_{,yz} = 0 \qquad (4.165)$$

$$(\overline{C}_{45} + \overline{C}_{36})U_{,yz} + (\overline{C}_{44} + \overline{C}_{23})V_{,yz} + \overline{C}_{44}W_{,yy} + \overline{C}_{33}W_{,zz} = 0$$

لا تمتلك هذه المعادلات التفاضلية القرنة من المرتبة الثانية حلاً مغلق الشكل. لهذا، يتم استعمال الطريقة العددية التقريبية للفروقات المنتهية. ويتطلب الأمر أولاً تحديد الشروط الحدودية لاستكمال صياغة المسألة. ويسمح تناظر الصفيحة الطبقية حول عدة مستويات بتقليص المنطقة المعتبرة إلى ربع مقطع الصفيحة الطبقية في المستوي y-z عند أية قيمة لـــ x، كما يبيّن الشكل 4–52. عند ذلك، يكون على السطح العلوي عديم الإجهاد:

$$\tau_{yz} = 0 \qquad \sigma_z = 0 \qquad \tau_{xz} = 0 \qquad (4.166)$$

وعلى الحافة الخارجية عديمة الإجهاد:

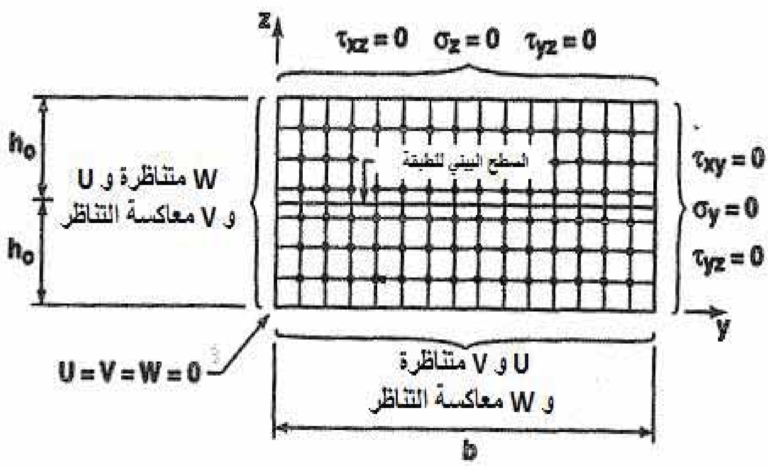
$$\tau_{xy} = 0 \qquad \sigma_y = 0 \qquad \tau_{yz} = 0 \qquad (4.167)$$

وعند السطح الأوسط، z = 0، لأنه يجب أن تكون U و V متناظرة و W معاكسة التناظر:

$$V_{,z}(y,0) = 0 \qquad U_{,z}(y,0) = 0 \qquad (4.168)$$
$$W(y,0) = 0$$

وعند السطح الأوسط، الخط y=0، لأنه يجب أن تكون U و V معاكسة التناظر و W متناظرة:

$$V(0,z) = 0 \qquad U(0,z) = 0 \qquad (4.169)$$
$$W_{,y}(0,z) = 0$$



الشكل 4-52: تمثيل الفوارق المنتهية والشروط الحدودية (عن بايبس وباغانو [4-12])

عند زاوية المنطقة ($b, 2h_o$)، تتحكم بالسلوك، على ما يبدو، خمسة شروط إجهاد. ومع ذلك، يمكن أن تكون المسألة مفرطة التحديد إذا ما تم فرض الشروط الخمسة في نفس الوقت. يتم، بالأحرى، تحديد ثلاثة، ويظهر الاثنان الباقيان بالتالي محققين تلقائياً مما يجعلهما بالنتيجة كتحقيق داخلي للنتائج العددية. لقد أظهرت التجارب العددية (numerical) أن اختيار الشروط الثلاثة ليس مادياً، فالاثنان الباقيان يتحققان دائماً.

تم، كما ذُكر سابقاً، الحصول على الحل العددي بطريقة الفوارق المنتهية. وقد تم تمثيل المنطقتين (الطبقتين) المشار إليهما في الشكل 4-52 بواسطة من النقاط المادية منتظمة التباعد ومتسلسلة كما هو مبين. وتُقرّب المعادلات التفاضلية في كل نقطة بواسطة

عامل فارق منتهٍ (عوامل فارق مركزية داخل المنطقة وعوامل أمامية وخلفية تستعمل عند الحدود). عند السطح البيني بين الطبقات، يتم، تقريباً، تحقيق شروط الاستمرار لـــ τ_{xz} ,σ_z, W, V, U, و τ_{yz} بتحديد نقاط مادية متناظرة حول السطح البيني.

تشكل معادلات الفوارق المنتهية الناتجة مجموعة معادلات جبرية خطية غير متجانسة. وحيث يوجد ثلاثة متحولات مترابطة، يكون عدد المعادلات في المجموعة ثلاث مرات عدد النقاط المادية. ومن الواضح أنه إذا احتاج الأمر عدداً أكبر من النقاط من أجل تمثيل الجسم المرن المستمر، يصبح الحاسوب ضرورياً.

3.6.4 نتائج حلّ المرونة

من أجل مادة مركبة[3] من الايبوكسي المقوّى بألياف غرافيت عالية عامل يونغ مع:

$$E_1=20 \times 10^6 \text{ psi (138 GPa)} \quad G_{12}=G_{23}=G_{31}=0.85\times10^6 \text{ psi (5.9 GPa)} \quad (4.170)$$

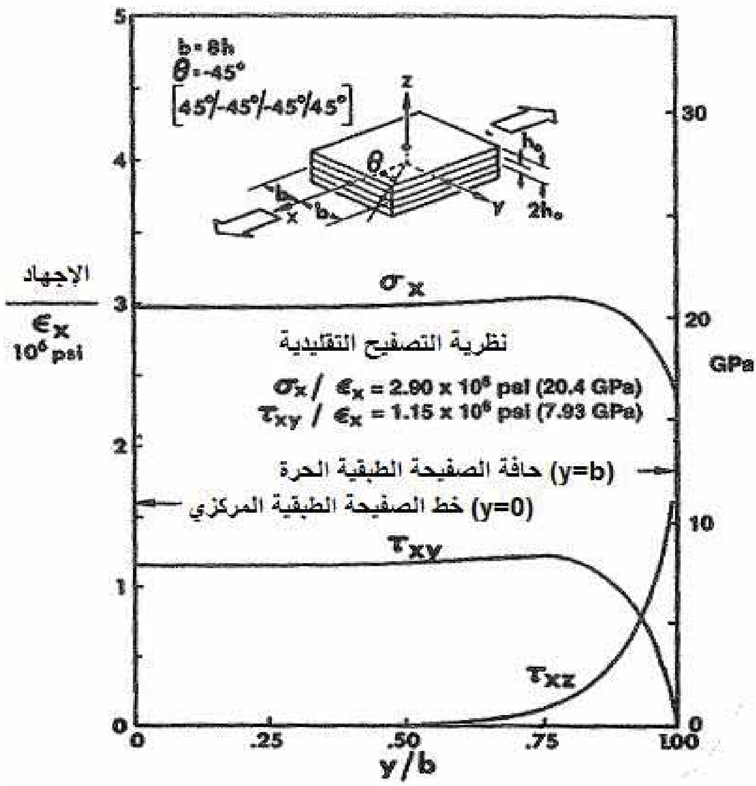
$$E_2=E_3=2.1 \times10^6 \text{ psi (14.5 GPa)} \quad \nu_{12}=\nu_{23}=\nu_{31}=.21$$

في صفيحة طبقية حيث $b= 8h_0$ (يساوي العرض أربع مرات السماكة)، يعطي الشكل 4-53 توزعات الإجهادات σ_x و τ_{xy} و τ_{xz} عند السطح البيني بين الطبقات ($z=h_0$). يتم هنا الحصول على الإجهادات المتوقعة بواسطة نظرية التصفيح التقليدية في الجزء المركزي من الفقرة. إلا أنه مع الاقتراب من الحافة الحرة، يتناقص σ_x ويسعى τ_{xy} نحو الصفر، ويكمن الأهم في تزايد τ_{xz} من الصفر إلى اللانهاية (يوجد عند $y=\pm b$). وباستعمال هندسات أخرى للصفيحة الطبقية، تمّ بيان أن عرض المنطقة التي تختلف فيها الإجهادات عن تلك في نظرية التصفيح التقليدية يقارب سماكة الصفيحة الطبقية، $4h_0$. من هنا، يمكن النظر إلى الانحناء عن نظرية التصفيح التقليدية على أنه طبقة حدودية أو تأثير حافة. فعلى مسافة

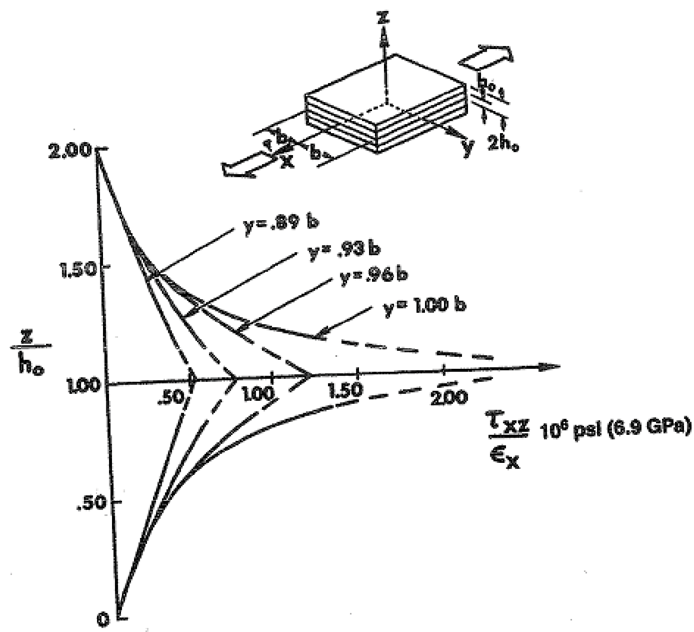
[3] لاحظ أن هذه الأمثلة لخصائص المادة ليست واقعية (أي ليست ممكنة فيزيائياً) وذلك لأن العلاقة العكسية ليست محققة من أجل ν_{23} أو ν_{31}، ولأنه يجب أن يكون G_{23} أصغر من G_{12} ومن G_{31}.

قدرها سماكة صفيحة طبقية بعيداً عن الحافة، يُنتظر أن تكون نظرية التصفيح التقليدية صالحة.

يأخذ إجهاد القص بين الصفائح، τ_{xz}، توزعاً على نصف مقطع السماكة، ويظهر في الشكل 4-54 على شكل عدة منحنيات عند مسافات مختلفة عن منتصف الصفيحة الطبقية تم بيان قيم الإجهاد التي تمّ استخراجها من البيانات الرقمية عند نقاط مادية بخطوط متقطعة. تأخذ قيمة τ_{xz} الصفر عند السطح العلوي للصفيحة الطبقية والسطح الأوسط. وتكون القيمة العظمى لكلّ منحنى دائماً عند السطح البيني بين الطبقتين العلويتين. وتقع القيمة الأكبر لــ τ_{xz}، بالتأكيد، عند تقاطع الحافة الحرة مع السطح البيني بين الطبقات، وتظهر كنقطة غير نظامية، علماً أن هذا الخلاف لا يمكن برهانه باستعمال الطرائق العددية.



الشكل 4-53: الإجهادات عند السطح البيني (عن بايبس وباغانو [4-12])



الشكل 4−54: توزع إجهاد القص بين الطبقات عبر سماكة الصفيحة الطبقية (عن بايبس وباغانو [4−12])

4.6.4 البرهان التجريبي للإجهادات بين الطبقات

أجرى بايبس وباغانو [4−13] تجارب للتأكد من حل بايبس وباغانو للإجهادات بين الطبقات. واستعملا تقانة Moiré لفحص الانزياحات السطحية للصفيحة الطبقية ذات الرقاقات المائلة في حالة الاستطالة المحورية في الفقرة 1.6.4. ترتبط تقانة Moiré بظاهرة الأهداب الضوئية (Fringes) الناتجة من انزياح مجموعتين من شبكات الخطوط بالنسبة إلى بعضهما البعض (انظر بوست وهان وايفجو [4−14]). توضع واحدة من الشبكتين على العينة الخاضعة للانفعال، وتكون الأخرى بقربها كمرجع ثابت. ترسل حزمة ليزرية على الشبكتين لتوليد الأهداب. ويمثل الهدب مكان النقاط التي تتمتع بنفس مركبة الانزياح العمودية على اتجاه شبكة الخطوط. ويتناسب عدد الأهداب مع انزياح السطح. يدل وضع إحدى الشبكتين على سطح العيّنة أنه يمكن فقط قياس انزياحات السطح (لا يمكننا وضع شبكة تحت السطح ورؤيتها أيضاً). ويمكن ملاحظة الأهداب مبدئياً بشكلٍ خشن بواسطة وضع قطعتين من منخل الباب السلكي بالقرب من بعضهما البعض وإنارة الشاشتين

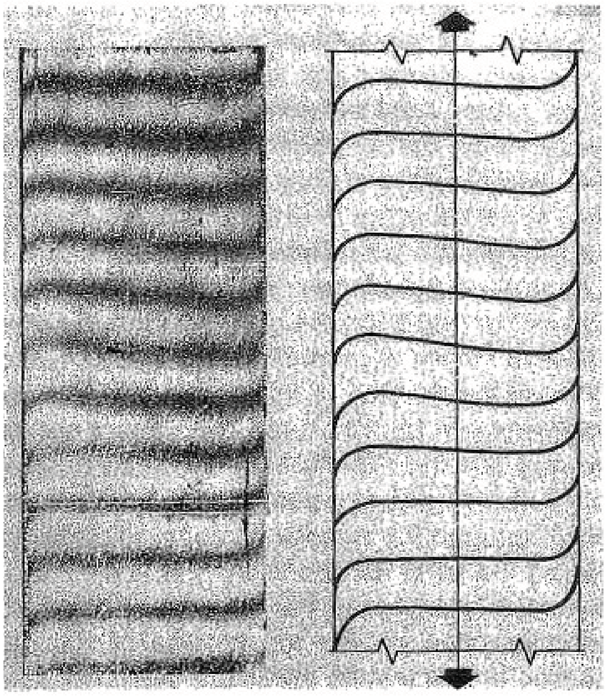
المتوازيتين بوميض ضوئي مع تحريكٍ طفيفٍ لإحدى الشاشتين، مع تثبيت الأخرى في المكان.

تم تصوير أهداب Moiré من أجل عدة مستويات تحميل على السطح العلوي للرقاقة المائلة العلوية لعيّنات مستوية طويلة من الايبوكسي- غرافيت. وتكون الرقاقة على مسافة سماكة رقاقة من المستوي البيني بين الطبقات حيث ينبغي أن تكون الرقاقتان مستطيلتين. وكلما ازداد البعد عن المستوي البيني بين الصفائح، ازداد ميل الرقاقة العلوية للانفعال على شكل متوازي أضلاع، كما يبيّن ذلك النصف الأيسر للشكل 4-55. ويظهر على النصف الأيمن للشكل 4-55 تمثيلاً تخطيطياً لأهداب Moiré على شكل حرف S. يبيّن الشكل 4–56 الانزياحات المحورية الناتجة من تحليلٍ أكثر دقة لهدب Moiré، بالإضافة إلى حل المرونة عن بايبس وباغانو.

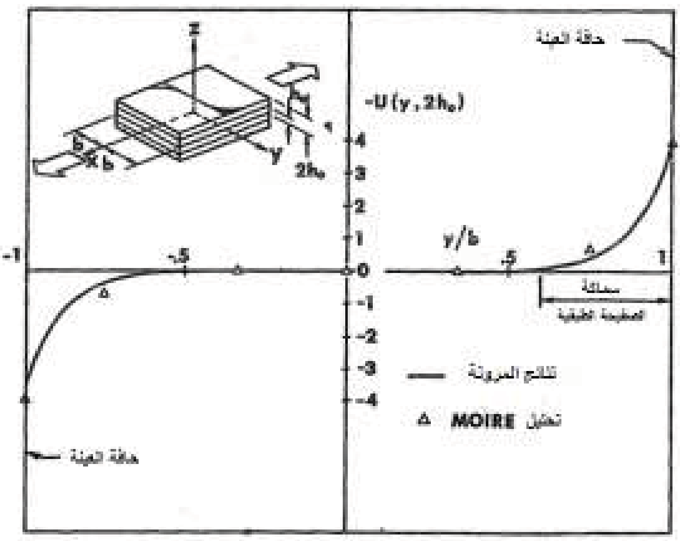
إذا تعرضت رقاقة ثلاثية المناحي خارج المحور لإجهاد شد، ينتج عندئذ إقران قص- استطالة مؤدياً في البداية شكل مستطيل ومع الاستطالة والقص يتحول إلى متوازي أضلاع. إن هذا الشكل هو الشكل الطبيعي الذي تسعى إليه حتى الرقاقة في الصفيحة الطبقية خلال مراقبتنا السلوك ونحن نبتعد عن السطح البيني بين الطبقتين العلويتين (الطبقتان $\pm\alpha$ اللتان يجب أن تكونا مستطيلتين عند السطح البيني بينهما).

هكذا، في الشكل 4-55، يميل خط أفقي قبل التحميل، عبر العيّنة، نحو الانفعال إلى خط قطري (diagonal) مائل، وهذا ما يشير إلى انفعال قص. على الرغم من ذلك، يكون تأثير إجهاد القص τ_{xz}، الذي يكون مرتفعاً عند الحافة الحرة ويتناقص سريعاً في الاتجاه بعيداً عن الحافة وفي الاتجاه نحو السطح الأعلى، تشويه الخط القطري في الطبقة العليا أكثر عند الحافة الحرة منه عند الاقتراب من وسط الصفيحة الطبقية.

وهكذا، يكون انفعال السطح المتوقع مشابهاً لتباعد شكل حرف S عن الخط المستقيم. وقد تمّ رسم هذا التباعد المتوقع مع الانفعال المُقاس في الشكل 4-56 حيث نشاهد توافقاً ممتازاً. بهذا، يكون قد تم البرهان على الوجود الفيزيائي للإجهادات ما بين الطبقات.



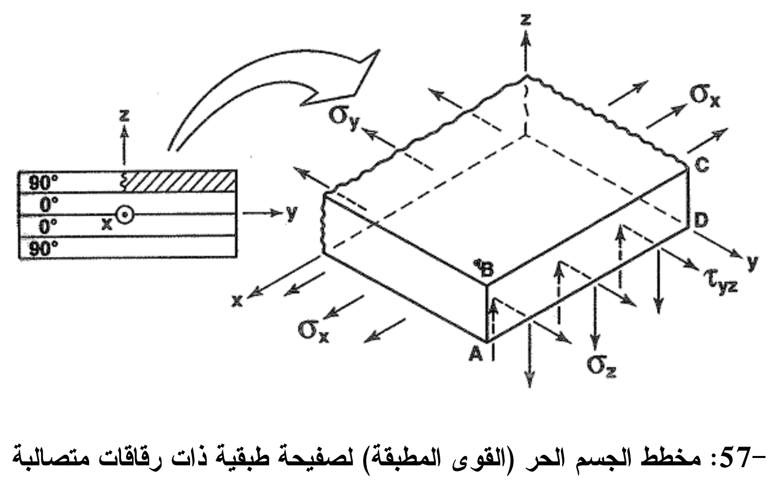
الشكل 4-55: نموذج أهداب Moiré (عن بايبس ودانييل [4-13])



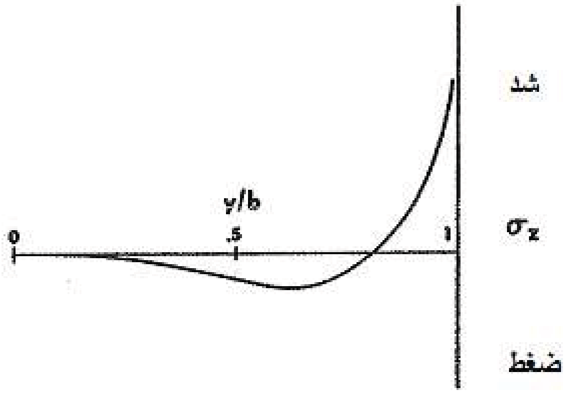
الشكل 4-56: توزع الانزياح المحوري على سطح الصفيحة الطبقية، $z=2h_0$ (عن بايبس ودانييل [4-13])

5.6.4 الإجهادات بين الطبقات في الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة

لنعتبر مخطط الجسم الحر (القوى المطبقة) لنصف الطبقة العلوية لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة $[0°/90°]_s$ في الشكل 4-57. هنا، يمكن أن توجد σ_y، التي بيّنا في الفقرة 1.4 أنها يجب أن توجد وفق نظرية التصفيح التقليدية (بسبب الاختلاف في عامل المرونة ونسب بواسون بين الطبقات °0 و°90 في جملة إحداثيات الصفيحة الطبقية)، على الجانب الأيسر للجسم الحر. لكن مخطط الجسم الحر يمتلك حافة حرة ABCD تشكل حدّه الأيمن، لهذا، لا يمكن أن يوجد σ_y على ABCD. ولتحقيق توازن القوة في الاتجاه y، يكون الإجهاد الوحيد مع مركبة في الاتجاه y هي τ_{yz}. علاوة على ذلك، يجب أن توجد τ_{yz} على الطبقة السفلى والعليا قرب الحافة الحرة (لأن τ_{yz} يمكن أن توجد على الجانب الأيسر لأي مخطط جسم حر لجزءٍ من النصف الأيمن للطبقة العليا). من أجل توازن العزم حول المحور x، يجب توفر مزدوجة وفق اتجاه دوران الساعة كي يتوازن عزم σ_y على الوجه الأيسر. والإجهاد الوحيد الذي يوفر هذا العزم هو σ_z. لكن σ_z يخضع لمتطلب توازن القوة وفق الاتجاه z في عدم وجود محصلة قوة. وقد افترض باغانو وبايبس، كما في الشكل 4-58 توزع σ_z الذي يحقق هذين المتطلبين [4-15]. لاحظ أن σ_z تسعى نحو الصفر في المنطقة التي تنطبق فيها نظرية التصفيح التقليدية، وربما إلى اللانهاية عند الحافة الحرة. وكما تفعل قيم τ_{yz} العالية، يمكن بوضوح أن تتسبب قيم شد عالية σ_z بفصل الطبقات عند الحافة الحرة.



الشكل 4-57: مخطط الجسم الحر (القوى المطبقة) لصفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة



الشكل 4–58: إجهاد ناظمي ما بين الطبقات (عن باغانو وبايبس [4–15])

6.6.4 انعكاسات الإجهادات ما بين الطبقات

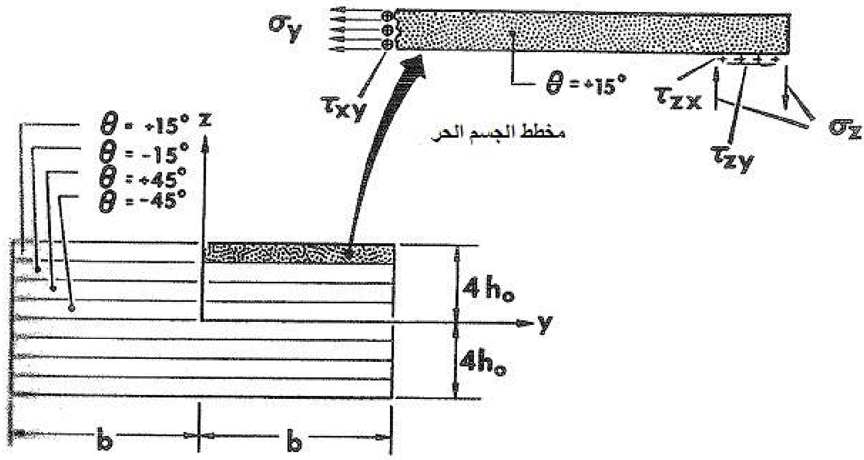
يعني وجود الإجهادات ما بين الطبقات أن المواد المركبة الصفائحية يمكن أن تتعرض لفصل الطبقات قرب الحواف الحرة سواء كانت عند حافة الصفيحة أو حول ثقب أو عند نهايات تشكيل أنبوبي يستعمل للحصول على خصائص المادة. في كل الحالات، يمكن أن يسبّب فصل الطبقات إخفاقاً مبكراً، لهذا يجب اعتباره في تصميم العيّنة، لأنه في الحالة الأخرى، لا تمثل العيّنة الحالة الفيزيائية الحقيقية.

إن كون الإجهادات ما بين الطبقات تتأثر بتتابع تنضيد الصفيحة الطبقية (ترتيب الرقاقات، أي $[+15/-15/+45/-45]_S$ مقابل $[+45/-45/+15/-15]_S$) يشكل أمراً ذا مغزى بالنسبة إلى محلّلي التصميم. افترض باغانو وبايبس [4–15] أن الإجهاد الناظمي ما بين الصفائح، σ_z، يمكن أن يتغير من الشد إلى الضغط بتغيير تتابع التنضيد. تم تحفيز عملهما من ملاحظات فوي وبيكر [4–16] حول متانات التعب التي تختلف بحوالى 25,000 psi (173 Mpa) من أجل صفائح طبقية ذات رقاقات مائلة $[\pm 15°/\pm 45°]_S$ عندما مواقع الرقاقات ±15° والرقاقات ±45° تعكس. وتكشف بيانات أخرى حول المتانة الساكنة كيفياً فوارق متشابهة. ومع ذلك، في نظرية التصفيح التقليدية، لا تتأثر مطلقاً معاملات جساءة الاستطالة والإجهادات بتتابع التنضيد (تُستبعد إجهادات الانحناء من المناقشة لأنه لا يوجد إقران بين الانحناء والاستطالة بسبب وجود تناظر السطح الأوسط).

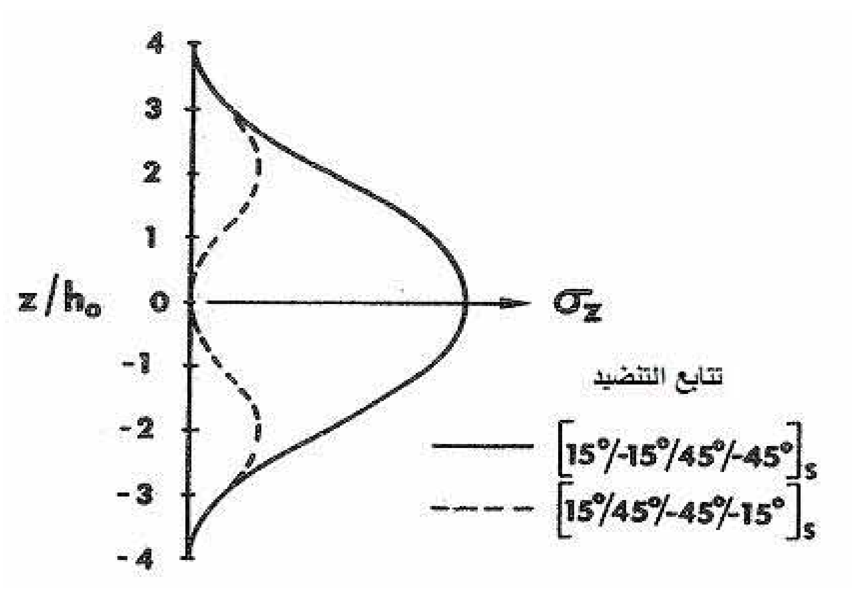
لاحظ فوي وبيكر فصل طبقات تدريجي كنمط الإخفاق في التعب. وتبدو دعوى باغانو وبايبس في أن الإجهاد الناظمي ما بين الصفائح هو المسؤول عن فصل الطبقات معقولة تماماً، وذلك بسبب التحليل التالي.

لنعتبر مخطط جسم حر (القوى المطبقة) لمقطع صفيحة طبقية متناظرة من ثماني طبقات في الشكل 4-59. تتعرض الصفيحة الطبقية لحمل في الاتجاه x، كما في الشكل 4-48. في مخطط الجسم الحر، يؤدي الشد σ_y في الطبقة 15° إلى شد σ_z عند الحافة الحرة، ويصح العكس من أجل إجهاد ضغط σ_y. يفترض باغانو وبايبس أن الإجهاد الناظمي ما بين الطبقات يتمتع بتوزيع، كما في الشكل 4-58 [4−15]. لاحظ أن σ_z تسعى إلى الصفر في المنطقة التي تنطبق فيها نظرية التصفيح التقليدية، وربما إلى اللانهاية عند الحافة الحرة. ويكون توزيع σ_z ذاتي التوازن بالتأكيد. إذا وضعت الطبقات 45° خارج الصفيحة الطبقية، يمكن التوقع بإجهاد ضغط σ_y بواسطة نظرية التصفيح التقليدية، لهذا، يمكن أن يكون σ_z إجهاد ضغط، ويمكن أن لا يحصل فصل في الصفيحة الطبقية.

بناءً على ذلك، برهن باغانو وبايبس أن σ_z تتوزع عبر السماكة، كما في الشكل 4-60 من أجل تتابعي تنضيد $[15°/-15°/45°/-45°]_S$ و $[15°/45°/-45°/-15°]_S$ [4−15]. وبكل وضوح، يجب أن يمتلك التتابع الأخير متانة أعلى من التتابع الأول بسبب الميل الأقل لفصل الطبقات. وبمنطق مشابه، يجب أن يؤدي التتابع $[45°/-45°/15°/-15°]_S$ إلى إجهادات ضغط تكون خيالات مرآة لإجهادات الشد للصفيحة الطبقية $[15°/-15°/45°/-45°]_S$ وتكون أكثر قوة. يمكن بيان أن إجهادات القص ما بين الطبقات في الحالتين تكون نفسها إذا لم تكن متماثلة. يكون، إذاً، الاستنتاج المنطقي الوحيد المستخلص أنه يجب أن يكون الإجهاد الناظمي ما بين الطبقات، σ_z، مفتاح نجاح مثل هذا النوع من الصفيحة الطبقية.



الشكل 4-59: مخطط الجسم الحر لصفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة مختلطة (عن باغانو وبايبس [4-15])



الشكل 4-60: توزيع الإجهاد الناظمي ما بين الطبقات في منطقة طبقة الحدود بدلالة z (عن باغانو وبايبس [4-15])

كخلاصة، يوجد ثلاث فئات من مشاكل الإجهاد ما بين الطبقات:

(1) تُظهر الصفائح الطبقية [$\pm\theta$] إقران قص- استطالة فقط (لا يحصل توافق بواسون بين الطبقات). لهذا، يكون τ_{xz} الإجهاد الوحيد ما بين الطبقات.

(2) تُظهر الصفائح الطبقية [0°/90°] فقط توافق بواسون بين الطبقات (لا يوجد إقران قص- استطالة). لهذا، يكون τ_{xz} و τ_{xz} فقط الإجهادات ما بين الطبقات غير المساوية صفر.

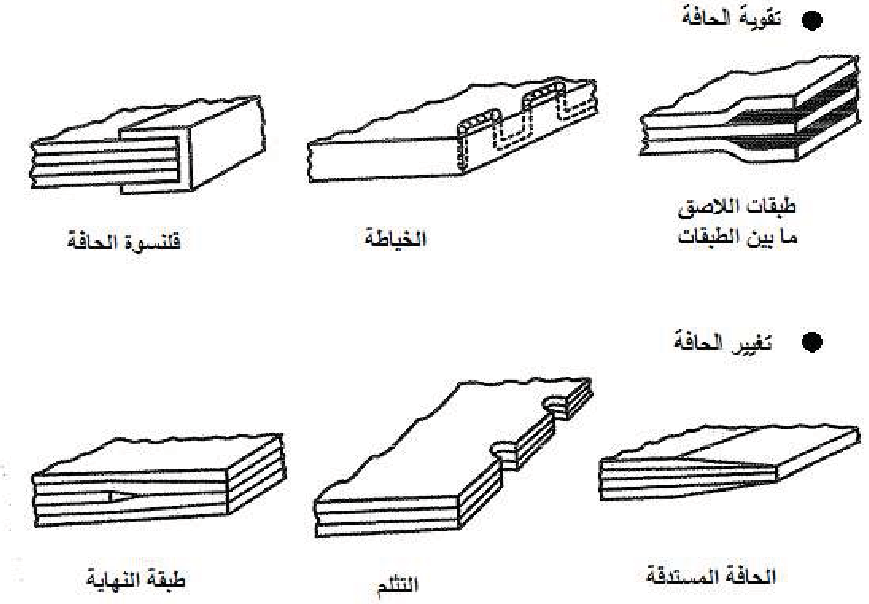
(3) تُظهر تركيبات ما ورد أعلاه مثل الصفائح الطبقية [$\pm\theta_1/\pm\theta_2$] على السواء ترابط قص- استطالة وتوافق بواسون بين الطبقات وتمتلك إجهادات τ_{xz} و τ_{yz} و σ_z ما بين الطبقات.

تتحدد أهمية الإجهادات ما بين الطبقات بالنسبة إلى جساءة ومتانة وحياة الصفيحة الطبقية بواسطة نظرية التصفيح التقليدية، أي إن إجهادات نظرية التصفيح التقليدية تعتبر دقيقة على معظم الصفيحة الطبقية باستثناء طبقة حدودية ضيقة جداً قرب الحواف الحرة. من هنا، تتأثر معاملات جساءة الصفيحة الطبقية بالإجهادات الكلية وليس الموضعية. لهذا، تكون معاملات جساءة الصفيحة الطبقية جوهرياً غير متأثرة بالإجهادات ما بين الطبقات. من جهة أخرى، تهيمن تفاصيل الإجهادات الموضعية العالية على عملية الإخفاق، بينما تكون الإجهادات الكلية الضعيفة غير ذات أهمية. بهذا، تهيمن الإجهادات ما بين الطبقات على متانة الصفيحة الطبقية وحياتها.

7.6.4 مفاهيم إزالة فصل طبقات الحافة الحرة

جوهرياً، تعتبر مفاهيم إزالة فصل طبقات الحافة الحرة السلبية تغيرات تتابع تنضيد الصفيحة الطبقية. يمكن أحياناً إعادة ترتيب تتابع تنضيد الصفيحة الطبقية من أجل تقليل أثر الإجهادات ما بين الطبقات في فصل الطبقات. على سبيل المثال، يجب فصل وبعثرة الرقاقات متماثلة زاوية التوجيه (سواء كانت $+\theta$ أم $-\theta$)، أي استعمال -/15/45/-45] $_S$[15 وليس $_S$[45/-45/15/-15]. على العموم، يتم تحاشي الرقاقات السميكة أو السميكة بفعالية، أي استعمال $_S$[45/-45/45/-45] وليس $_S$[45_2/-45_2]. لاحظ أنه إذا تم تبادل الرقاقات في تتابع التنضيد، لا يتأثر A_{ij} بينما يتأثر كثيراً D_{ij}.

تتضمن مفاهيم إزالة فصل الطبقات الفعالة تدعيم وتغيير الحافة. ويعتبر تدعيم الحافة تقويةً للحافة الحرة مثل قلنسوات الحافة والخياطة وطبقات اللاصق بين الطبقات، كما في الشكل 4-61. تستطيع قلنسوات الحافة والخياطة متانة إجهادات القص والإجهادات الناظمية ما بين الطبقات على السواء. وبالمقابل، لا تستطيع طبقات اللاصق بين الطبقات متانة الإجهادات الناظمية ما بين الطبقات أفضل من الصفيحة الطبقية غير المقواة، لكنها تقاوم إجهادات القص ما بين الطبقات بشكلٍ أفضل.



الشكل 4-61: مفاهيم إزالة فصل طبقات الحافة الحرة

تغيير الحافة هو تغيير طبيعة الحافة الحرة الذي لا يتضمن تقوية مع أمثلة طبقة النهاية والوصل بالنقر والحافة المستدقة، كما يبين الشكل 4-61. تعتبر طبقة النهاية طريقة للتغيير من تتابع تنضيد ذي أداء ضعيف عند الحافة الحرة إلى تتابع تنضيد لا يتأثر بقوة بالإجهادات ما بين الطبقات. ومع أن الوصل بالنقر لا يشكل عوناً واضحاً، إلا أنه "يربك" مجال الإجهاد قرب الحافة الحرة بشكلٍ يكفي لتقليل أثر فصل الطبقات. أخيراً، تعتبر الحافة المستدقة طريقة تغيير تدريجي من صفيحة طبقية غير ملائمة إلى صفيحة طبقية ملائمة عند

الاقتراب من الحافة الحرة. يعطي جونز مراجعة لفعالية مفاهيم إزالة فصل الطبقات هذه [4–17].

6.4 مجموعة المسائل

1.6.4 برهن أن استعمال نظرية التصفيح التقليدية تقود إلى:

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = 2.96x10^6\,psi(20.4GPa) \qquad \frac{\tau_{xy}}{\varepsilon_x} = 1.15x10^6\,psi(7.93GPa)$$

كإجهادات في كل طبقة من الصفيحة الطبقية ذات الطبقات الأربعة غرافيت– إيبوكسي المائلة التي نوقشت في الفقرة 3.6.4. تجاهل إشارة τ_{xy}. ما هو σ_y ؟

2.6.4 استنتج الانزياحات:

$$u = -(C_1 z + C_2)y + (C_4 y + C_5 z + C_6)x + U(y,z)$$
$$v = (C_1 z + C_2)x - \frac{C_4 x^2}{2} + V(y,z)$$
$$w = -C_1 xy + C_7 x - \frac{C_5 x^2}{2} + W(y,z)$$

بتكامل العلاقات إجهاد– انزياح عندما تتعلق الإجهادات بـــ y و z فقط. تنتج هذه الانزياحات قبل تطبيق شروط التناظر المختلفة للحصول على المعادلة (4.163). (تلميح: أنظر تيموشينكو وغودير [4–18]).

المراجع

4-1 K. S. Pister and S. B. Dong, "Elastic Bending, of Layered Plates." *Journal of the Engineering Mechanics Division,* ASCE, October 1959, pp. 1-10.

4-2 E. Reissner and Y.Stavsky, "Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneus Aeoiotropic Elastic Plates." *Journal of Applied Mechanics:* September 1961, pp. 402-408.

4-3 J. E. Ashton. J. C. Halpin, and P. H. Petit, *Primer on Composite Materials: Analysis,* Technomic Westport, Connecticut, 1969. see also: J. C. Halpin, *Primer on Composite Materials: Analysis,* Technomic, Lancaster, Pennsylvania, 1984.

4-4 Terrence J. Hertz, Michael H. Shirk, Rodney H. Ricketts, and Terrence A. Weisshaar, "On the Track of Practical Forward-Swept Wings." *Aeronautics and Astronautics* (American Institute for Aeronautics and Astronautics, Washington, DC): January 1962, pp. 40-52.

4-5 Michael F. Card and Robert M. Jones, *Experimental and Theoretical Results for Buckling of Eccentrically Stiffened Cylinders,* NASA TN D-3639, October 1966.

4-6 Stephen W. Tsai, *Structural Behavior of Composite Materials,* NASA CR-71, July 1964.

4-7 Chi-Hung Shen and George. S. Springer, "Moisture Absorption and Desorption of Composite Materials." *Journal of Composite Materials*: January 1976, pp. 2-20.

4-8 R. Byron Pipes, Jack R. Vinson, and Tsu-Wei Chou, "On the Hygrothermal Response of Laminated Composite Systems." *Journal of Composite Materials*: April 1976, pp. 129-148.

4-9 C. E. Browning, G. E. Husman, and J. M. Whitney, "Moisture Effects in Epoxy Matrix Composites." Paper presented at: *Composite Materials: Testing and Design (Fourth Conference),* J. G. Davis, Jr. (Chairman), Valley Forge, Pennsylvania, 3-4 May 1976, ASTM STP 617, American Society for Testing and Materials, 1977, pp. 481-496.

4-10 Stephen W. Tsai, *Strength Characteristics of Composite Materials,* NASA CR-224, April 1965.

4-11 Stephen W. Tsai, Donald F. Adams, and Douglas R. Doner, *Analysis of Composite Structures,* NASA CR-620, November 1966.

4-12 R. Byron Pipes and N. J. Pagano, Interiaminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Extension." *Journal of Composite Materials:* October 1970, pp. 538-548.

4-13 R. Byron Pipes and I. M. Daniel, "Moiré Analysis of the Interiaminar Shear Edge Effect in Laminated Composites." *Journal of Composite Materials:* April 1911, pp. 255-259.

4-14 Daniel Post, Bongtae Han, and Peter Ifju, *High Sensitivity Moiré: Experimental Analysis for Mechanics and Materials.* New York: Springer-Verlag, 1994.

4-15 N. J. Pagano and R. Byron Pipes. "The Influence of Stacking Sequence on Laminate Strength." *Journal of Composite Materials:* January 1971, pp. 50-57.

4-16 R. L. Foye and D. J. Baker, "Design of Orthotropic Laminates." Paper presented at: *AIAA/ASME 11th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference,* Denver, Colorado, 22-24 April 1970 (presentation only-no paper).

4-17 Robert M. Jones, Delamination-suppression Concepts for Composite Laminate Free Edges, Composite *Design. Manufacture, and Application, Proceedings of the Eighth, International Conference on Composite Materials,* Stephen W. Tsai and George S. Springer (eds.), Honolulu, Hawaii,15-19 July 1991, Society for the Advancement of Material and Process Engineering, Covina, California, 1991, pp. 28-M-1 to 28-M-10.

4-18 S. P. Timoshenko and J. N. Goodier, *Theory of Elasticity.* 3rd ed. New York: McGraw-Hill, 1970, pp. 240 and 280.

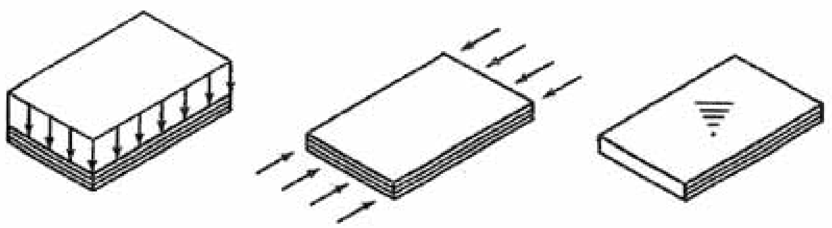
الفصل الخامس

انحناء وانبعاج واهتزاز الصفائح متعددة الطبقات

1.5 مقدّمة

تُعدّ الصفائح متعددة الطبقات أحّدَ أبسطِ وأكثر التطبيقات العملية انتشاراً للصفائح الطبقية المُركَّبة. بالتأكيد، إن العارضات متعددة الطبقات أبسطُ من الصفائح الطبقية، ولكن هذه العناصر الإنشائيّة أحاديّة البعد – أي العارضات – لا تُظهر جيّداً المقدرات ثنائيّة البعد أو الخصائص المميّزة للصفائح الطبقيّة المُركَّبة.

يهدف هذا الفصل إلى تبيان أثر معاملات جساءة الإقران المتنوّعة (A_{16}, A_{26}, B_{ij}, D_{16}, D_{26}) في سلوك الانحناء والانبعاج والاهتزاز للصفائح متعددة الطبقات. يعني ذلك أن السؤال الأساسي الذي يتعرّض له تحليل الصفيحة متعددة الطبقات هو: ما هي استجابة الصفائح متعددة الطبقات للانحناء، وللانبعاج، وللاهتزاز، كما يُبيّن الشكل 5–1؟ تمثِّل دراسةُ هذه التأثيرات الخاتمةَ المنطقيّةَ لمقرَّرٍ عن ميكانيك الموادّ المُركَّبة المُقوّاة ليفيّاً. لا يشمل الهدفُ هنا دراسةً كاملةً لنظريّة الصفيحة متعددة الطبقات، بل يتضمّن بدلاً من ذلك فحصاً لبعض النتائج المهمّة الناجمة عن هذه النظريّة، بحيث يمكن فهمُ وتقديرُ المعنى الفيزيائيّ التأثيرات معاملات الجساءة. تُعتَبر نظريّة الصفائح متعددة الطبقات مع تقنيّات الحلول الموافِقة موضوعاً مناسباً جدّاً لإجراء دراسةٍ إضافيّة. يمكن الاطّلاع على بيانٍ كاملٍ وتصنيفٍ شاملٍ لمسائل الصفيحة متعددة الطبقات في كتب ويتني (Whitney) [5–1]، ڤينسون (Vinson) وسليراكوفسكي (Slerakowski) [5–2]، ڤاسيليف (Vasiliev) [5–3]، ريدي (Reddy) [5–4].



الشكل 5-1: الأسئلة الأساسية في تحليل الصفيحة متعددة الطبقات

سوف نناقش الاعتباراتِ النظريّةَ التي تقوم عليها النظريّةُ الأساسيّة للصفائح متعددة الطبقات في الفقرة 2.5. سوف نعرض بعد ذلك المعادلاتِ التفاضليّةَ والشروطَ الحدّيّةَ المتعلّقةَ التي تحكم سلوكَ الانحناء، والانبعاج، والاهتزاز للصفائح متعددة الطبقات، مع مناقشةٍ وجيزةٍ لتقنيّات الحلّ الممكنة. نتبع ذلك في الفقرات 3.5 و4.5 و5.5 بعرضٍ لحلول مسائل الانحناء والانبعاج والاهتزاز الموافقة لتشكيلات الصفيحة الطبقيّة المتنوّعة التي تمّ وصفُها في الفقرة 3.4.

نستخدِم وبشكلٍ متّسق صفيحةً مستطيلةَ الشكل بسيطة الاستناد في جميع الفقرات، وذلك من أجل توضيح أنواع النتائج التي يمكن الحصول عليها، أي أثر معاملات الجساءة المتنوّعة في سلوك الصفيحة متعددة الطبقات. علاوةً على ذلك، لن ندرسَ إلاّ الأنواعَ الأبسط من التحميل بهدف تجنُّب الصعوبات الملازمة لحمولاتٍ معقّدة. وفقاً لذلك، وبغرض التبسيط، لن نعرض إلاّ الخيطَ الناظم البسيط لنتائج الصفيحة متعددة الطبقات.

تمتلك الصفائح ثلاثيّة المناحي خاصة، أي الصفائح ذات الطبقاتٍ ثلاثيّةِ المناحي المتعدّدةِ خاصة والمتناظرةٍ بالنسبةإلى السطح الأوسط للصفيحة، محصّلتَي قوة وعزمٍ – كما لاحظنا في الفقرة 3.4 لا تحتويان على إقران انحناء- استطالة- أو إقران قصّ- استطالة أو إقران انحناء- فتل، أي يكون لدينا:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \\ \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} \tag{5.1}$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

لا يُعدّ – من أجل مسائل الصفيحة – امتلاكُ الصفيحةِ الطبقيّةِ ثلاثيّةِ المناحي خاصة لطبقةٍ وحيدةٍ أو لطبقاتٍ متعدّدة أمراً هامّاً؛ إذ يكفي، لتمييز الصفيحة الطبقيّة، تعيينُ $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}$ في المعادلة (5.2) فقط. يعني ذلك أن علاقات القوّة – انفعال (المعادلة 5.1) لا تُستخدَم، بسبب غيابِ الإقران انحناء – استطالة، في تحليل الصفيحة من أجل الحمولة العرضانيّة التي لا تُسبِّب إلاّ انحناء. مع ذلك، لاحظ أنه يحتاج الأمر إلى علاقات القوّة–انفعال في تحليل القوقعة بسبب الاختلافات بين مواصفات انفعال في الصفائح عنها في القواقع.

غالباً، وبسبب كون تحليلِ الصفائح الطبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصة افتراضياً أمراً سهلاً يماثلُ حالةَ الصفائح متماثلة المناحي، فإنه سيتم النظر إلى الصفائح الطبقيّة الأخرى على أنها صفائح طبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصّة، أو أنه يمكن تقريبُها بذلك. سوف ندرس هذا التقريبَ من خلال مقارنةِ نتائجِ كلِّ نوعٍ من الصفائح الطبقيّة بوجود معاملات الجساءة المتنوّعة، التي تميِّزها من الصفائح الطبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصة، أوبغيابها. بشكلٍ خاصّ، سوف نتفحص أهميّةَ حدّي الإقران انحناء – فتل D_{16}, D_{26} من أجل صفائح طبقيّة ذات رقاقات مائلة متناظرة الزوية. سيتم بعد ذلك تحليل الإقران انحناء – استطالة من أجل صفائح طبقيّة ذات رقاقات متصالبة معاكسة التناظر وذات رقاقات

مائلة، ومقارنته بالتقريب ثلاثي المناحي الخاصّ، حيث يتمّ تجاهُل B_{ij}. سيتم إجراء هذه المقارنات بشكلٍ متتالٍ من أجل الانحناء، والانبعاج، والاهتزاز للصفائح بسيطة الاستناد في الفقرات 3.5، 4.5 و5.5 على التوالي. أخيراً، يتم تلخيص الأهميّة الهندسيّة لمعاملات جساءة الإقران المتنوّعة في الفقرة 6.5.

2.5 المعادلات الناظِمة لانحناء وانبعاج واهتزاز الصفائح متعددة الطبقات

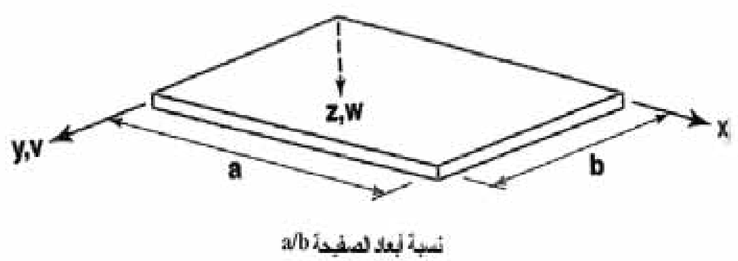
1.2.5 القيود والافتراضيات والنتائج الأساسيّة

تمّ في الفصل الرابع استخدامُ غالبية القيود والافتراضيات التي تقوم على أساسها نظرية الصفيحة متعددة الطبقات. مع ذلك، وبغرض الكمال، سوف نُعيدها هنا بطريقةٍ مختلفةٍ قليلاً. سوف يتم استعمال تسمياتِ القيود والافتراضيات، الثنائية ظاهريّاً، لأن المصطلحات تمتلك معانيَ مختلفة تماماً. تعتبر القيود (restrictions) حدّياً لاستعمال النظريّة، وهي بوضوحٍ إمّا مُحقّقةً أو لا. وهكذا، تتعلّق القيود بالشيء المعلوم. على سبيل المثال، لا يمكن تطبيقُ نظريةٍ عن الصفائح المربّعة على الصفائح الدائريّة. أمّا الافتراضيّات (assumptions) فهي تحديداتٌ على النظريّة لها طبيعةٌ من عدم التيقّن. يعني ذلك أن الافتراضيات تتعلّق بالشيء المجهول. على سبيل المثال، نفترض غالباً أن الإجهادات العموديّة على سطح الصفيحة صغيرةٌ كفايةً لكي نعتبرها معدومةً، أو لكي نفترضها صفراً؛ مع ذلك، فنحن لسنا متأكّدين تماماً من مدى صغر هذه الإجهادات ما لم نستدعِ نظريّةً أكثرَ دقّةً. علاوةً على ذلك، يمكن افتراضُ الانزياحات صغيرةً لتخويلنا باستعمال بعض التقريبات. مع ذلك، لا يمكن الإقرارُ فيما إذا كانت الانزياحاتُ صغيرةً فعلاً إلاّ بعد معرفة النتائج النهائيّة.

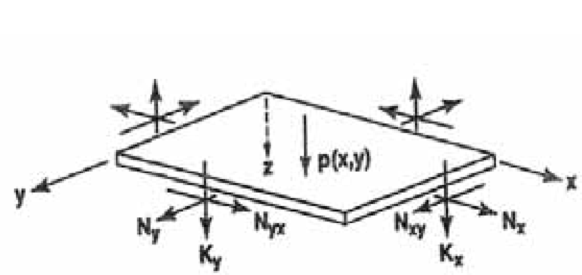
خلاصة القول، يكمن الاختلاف بين القيود والافتراضيات في أن القيودَ تُعنى بما هو معروفاً، بينما تُعنى الافتراضيات بما هو مجهولاً (ما نرغب التخمين عنه). وهكذا، فنحن بالتأكيد لا "نفترض صفيحةً مستطيلةَ الشكل"، ولكننا – بدلاً من ذلك– "نقصر اهتمامنا على الصفائح المستطيلة". تزوِّدنا القيود والافتراضيات التالية بفرصةٍ إضافيّة لإيضاح الفرق بين التصنيفَين الاثنَين، و– بشكلٍ رئيسيّ– لبناء أساسٍ متينٍ من أجل دراسةِ نظريّة الصفيحة متعددة الطبقات. تذكّر من الفصل الثالث أنه ينبغي تعليل

الافتراضيات في الهندسة، أي إننا يجب أن نعرفَ لماذا نعتقد بصحّة الافتراضيات من وجهة نظرٍ فيزيائيّة.

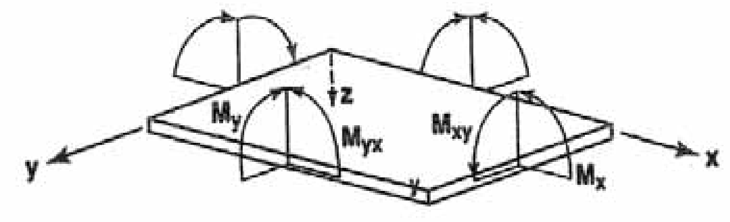
تُبيّن الأشكالُ 5–2، 5–3 و5–4 على التوالي الهندسةَ والقوى والعزومَ المتعلّقة بالصفيحة. لاحظ في الشكل 5–2 أن النسبةَ الباعية (aspect ratio) للصفيحة a/b هي عبارة عن مجرّد طريقة رائجة لتوصيف شكل الصفيحة المستطيلة كمّيّاً. تذكّر أن N_x, N_y,N_{xy} و M_x, M_y, M_{xy} هي القوى والعزوم في وحدة العرض للصفيحة. ما هو جديدٌ هنا هو قوّتا القصّ K_x, K_y لكيرشوف (Kirchhoff) في الشكل 5–3، بالإضافة إلى الحمولة العرضانيّة المتوزّعة p(x,y). تذكّر أيضاً أن هندسة الصفيحة الطبقيّة تُعرَّف في الشكل 4–8.



الشكل 5– 2: الشكل الهندسي للصفيحة وانزياحاتها



الشكل 5– 3: قوى الصفيحة



الشكل 5– 4: عزوم الصفيحة

القيود

- كلُّ طبقة هي ثلاثيّةُ المناحي (ولكن الاتجاهات الرئيسيّة للمادّة في كلّ طبقة لا تحتاج أن تصطف مع محاور الصفيحة)، وخطيّةُ المرونة، وذات سماكةٍ ثابتةٍ (بحيث تكون الصفيحة الإجماليّة ذاتَ سماكةٍ ثابتةٍ).
- سماكةُ الصفيحة صغيرةٌ جداً مقارنةً بطولها وعرضها (يُدعى مثلُ هذا التشكيل عادةً باسم صفيحةٍ رقيقةٍ، بالرغم من أن تسمية الصفيحة نفسها تقتضي مثلَ هذه الهندسة).
- لا توجد أيّ قوى جسميّة داخليّة.

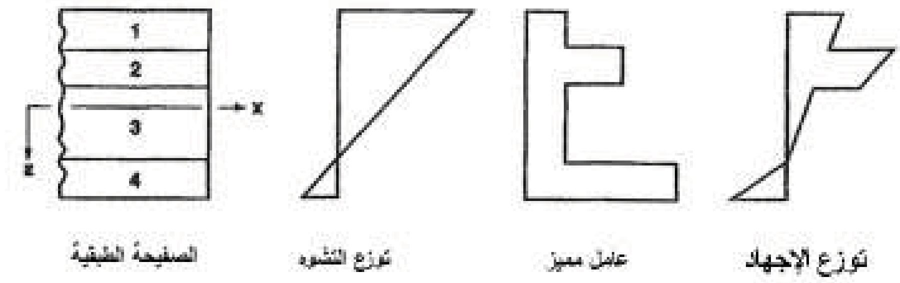
الافتراضيات

- تسيطر الإجهادات المُطبَّقة في المستوي x-y (مستوي الصفيحة) على سلوك الصفيحة. نفترض كذلك أن $\sigma_z,\tau_{xz},\tau_{yz}$ معدومة بحيث يمكن القول بوجود حالةِ إجهادٍ مستوٍ (لا نعتبر فيها إلاّ الإجهادات σ_x, σ_y و τ_{xy}).
- تُشكِّل فرضيةُ كيرشوف عن انفعالي قصٍّ عرضانيَّين γ_{xz} , γ_{xz} مهملَين، وعن انفعال عرضاني ناظميّ ε_z مهمل، إفادةً (statement) عن نواظِم على السطح الأوسط غير قابلة للانفعال، بالرغم من وجود تناقضٍ ملازم – وإن تمّ تجاهلُه عادةً مع فرضيّة الإجهاد العرضانيّ الناظِميّ المعدوم σ_z (سوف يتم تلطِّيف هذه الفرضية في الفقرة 6–6).

- الانزياحات u,v,w صغيرةٌ مقارنةً بسماكة الصفيحة (ممّا يُعدّ عموماً، وإن كان بشكلٍ غير لازمٍ – إشارةً إلى نظرية الانحرافات الصغيرة).
- انفعالات $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ صغيرةٌ مقارنةً بالوحدة (نظريّة انفعالات الصغيرة).
- حدّا عزوم العطالة (inertia) الدورانية مهملة.

النتائج

- إذا تمّ تجاهُل انفعالات القصّ العرضانيّة، أو تمّ افتراضُها مساويةً للصفر، فإن إجهادات القصّ العرضانيّة تكون معدومةً أيضاً في جميع أرجاء الصفيحة بفضل علاقات الإجهاد– انفعال. من ناحية أخرى، حتى ولو لم نقلْ شيئاً عن انفعالات القصّ، فإننا لا نزال نعرف أن إجهادات القصّ العرضانيّة معدومةٌ على كلا السطحَين العلوي والسفلي للصفيحة في حال عدم وجودِ حمولة قصّ. يُنظَر عادةً – في نظرية الصفيحة الكلاسيكيّة – على أن إجهادات القصّ العرضانيّة مساوية للصفر، ومع ذلك يتمّ حسابُ هذه الإجهادات انطلاقاً من اعتباراتٍ متعلّقةٍ بالتوازُن. سوف يتم تجاهل مثلَ هذه الإجرائيّات في هذا الكتاب في سبيل التبسيط عبر تقديم برهان فقط عن وجود تأثيرٍ لمعاملات جساءة الإقران المتنوّعة.
- تكون، بفضل فرضيّة كيرشوف، الانفعالاتُ المتبقيّة $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$، بالإضافة إلى الانزياحين u, v، دالتين خطّيّةً للإحداثيّة العرضانيّة z. بالإضافة إلى ذلك، تكون الإجهاداتُ وفقاً لذلك دالة خطية، ولكن غيرَ مستمرّة، للإحداثيّة العرضانيّة z. يبيّن الشكلُ 5–5 تخطيطيّاً كلتا هاتَين النتيجتَين.
- مع تخفيف القيد على الصفائح الرقيقة – أي عندما تغدو الصفيحةُ أكثر سماكة– تصبح فرضيّة الإجهاد المستوي $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$ أقلَّ دقّةً وصحّةً.



الشكل 5-5: توزع الإجهاد والانفعال عبر سماكة الصفيحة الطبقية

لاحظ غيابَ أيّ فرضيّاتٍ تتعلّق صراحةً بالموادّ المُركَّبة المُقوّاة ليفيّاً. بدلاً من ذلك، وحدَه القيد على الموادّ ثلاثيّة المناحي عند اتّجاهاتٍ متنوّعة يكون مهمّاً، ويعود ذلك إلى أننا نعالج السلوكَ الماكروي لرقاقة منفردةٍ ثلاثيّة المناحي (ويمكن تعميم ذلك بسهولة إلى حالة رقاقة غير متماثلة المناحي). لذلك، ما يلي هو أساساً نظريّةٌ كلاسيكيّة للصفيحة من أجل الموادّ متعددة الطبقات. في الحقيقة، لا يمكن إهمالُ الإجهادات ما بين الطبقات بشكلٍ كامِلٍ في الصفائح متعددة الطبقات، لكن هذا التهذيب لن يعالج ضمن هذا الكتاب أكثر مما دُرس في الفقرة 6.4. سيتم، بشكلٍ موجز، مناقشة تأثيرات القصّ العرضانيّ بعيداً عن الحواف في الفقرة 6.6.

2.2.5 معادلات التوازن في الصفائح متعددة الطبقات

تكون معادلات التوازُن التفاضليّة بدلالة محصّلات القوى والعزوم التي تم اشتقاقها في الفصل الرابع والحمولة العرضانيّة p(x,y):

$$N_{x,x} + N_{xy,y} = 0 \qquad (5.3)$$

$$N_{xy,x} + N_{y,y} = 0 \qquad (5.4)$$

$$M_{x,xx} + 2M_{xy,xy} + M_{y,yy} = -p \qquad (5.5)$$

حيث تعني الفاصلة اشتقاقاً للرمز الرئيسي بالنسبة إلى اللاّحقة السفليّة التي تلي الفاصلةَ. ليست معادلاتُ التوازُن في هذا الشكل إلاّ مجرّد معادلاتِ نظريةِ الصفيحة الكلاسيكيّة

التي يتمّ اشتقاقُها من توازنِ عنصرٍ تفاضليّ في الملحق د. عندما نشترط وجودَ صفيحةٍ متعددة الطبقات عبر الاستخدام الصريح لمحصّلات القوى والعزوم في المعادلتَين (4.22) و(4.23)، وعبر استعمال تعريفَي الانفعال والتقوس من المعادلتَين (4.14) و(4.15)، فإن معادلات التوازُن – من (5.3) إلى (5.5)– تغدو – عند إسقاط لاحقة الصفر السفليّة والمُستعمَلة للإشارة إلى انزياحات السطح الأوسط– ما يلي:

$$\begin{aligned} & A_{11}u_{,xx} + 2A_{16}u_{,xy} + A_{66}u_{,yy} + A_{16}v_{,xx} + (A_{12} + A_{66})v_{,xy} + A_{26}v_{,yy} \\ & - B_{11}w_{,xxx} - 3B_{16}w_{,xxy} - (B_{12} + 2B_{66})w_{,xyy} - B_{26}w_{,yyy} = 0 \end{aligned} \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} & A_{16}u_{,xx} + (A_{12} + A_{66})u_{,xy} + A_{26}u_{,yy} + A_{66}v_{,xx} + 2A_{26}v_{,xy} + A_{22}v_{,yy} \\ & - B_{16}w_{,xxx} - (B_{12} + 2B_{66})w_{,xxy} - 3B_{26}w_{,xyy} - B_{22}w_{,yyy} = 0 \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$\begin{aligned} & D_{11}w_{,xxxx} + 4D_{16}w_{,xxxy} + 2(D_{12} + 2D_{66})w_{,xxyy} + 4D_{26}w_{,xyyy} \\ & + D_{22}w_{,yyyy} - B_{11}u_{,xxx} - 3B_{16}u_{,xxy} - (B_{12} + 2B_{66})u_{,xyy} - B_{26}u_{,yyy} \\ & - B_{16}v_{,xxx} - (B_{12} + 2B_{66})v_{,xxy} - 3B_{26}v_{,xyy} - B_{22}v_{,yyy} = p \end{aligned} \quad (5.8)$$

يمكن إجراءُ تبسيطاتٍ واضحةٍ – وأحياناً حاسمة– عندما تكون الصفيحة الطبقيّة متناظرةً بالنسبة إلى السطح الأوسط ($B_{ij}=0$)، وثلاثيّةَ المناحيّ خاصّة (تختفي جميعُ الحدّي ذات اللاحقة السفليّة 16 أو 26، بالإضافة إلى الحدّ B_{ij})، ومتجانسةً ($B_{ij}=0$ و$D_{ij}=A_{ij}t^2/12$)، أو متماثلةَ المناحي. تكون المعادلتان (5.6) و(5.7) مقترنتَين ببعضهما البعض في جميع هذه الحالات، ولكنهما منفصلتان عن المعادلة (5.8). يعود ذلك إلى أن المعادلة (5.8) تحتوي على مشتقّاتٍ للانزياح العرضانيّ w فقط لا غير، بينما تحتوي المعادلتان (5.6) و(5.7)، على السواء، على u, v بدون أن تحويا w. وفقاً لذلك، ينبغي حلّ المعادلة (5.8) فقط من أجل تحديد الانحرافات العرضانيّة لصفيحةٍ تتمتّع بالتبسيطات المذكورةِ أعلاه؛ بينما يمكن إيجادُ الانزياحات في مستوي الصفيحة عبر حلّ المعادلتَين (5.6) و(5.7). تستلزم الحالةُ الأعمُّ لصفائحَ طبقيّةٍ غيرِ متناظرةٍ

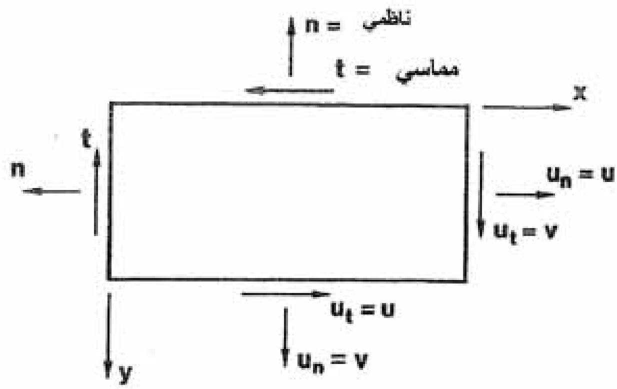
الحلَّ الآنيَّ لثلاث معادلات المقترنة ببعضها البعض، المعادلات من (5.6) إلى (5.8)، من أجل إيجاد الانزياحات العرضانيّة والانزياحات ضمن المستوي.

جرت العادةُ فيما سبق على التفكير بالشروط الحدّيّة كخيارٍ مناسبٍ بين الاستناد البسيط (simply supported)، أو التثبيت بملزَم (clamped)، أو الحواف الحرّة (free edges) في حال إهمال جميع فئات الحواف المُقيّدة بشكلٍ مرن. إن الوضعَ الحقيقيّ للصفائح متعددة الطبقات أعقدُ بكثيرٍ من حالة الصفائح المتماثلة المناحي، لأن هناك الآن في الواقِع أربعة أنواع من الشروط الحدّيّة يمكن تسميتُها حوافَّ بسطة الاستناد. تنشأ هذه الشروط الحدّيّة الأكثر تعقيداً، لأننا ينبغي الآن أن نعتبرَ u,v,w بدلاً من w وحدها. وبشكلٍ مماثل، توجد أربعة أنواع موافقة لحوافّ مُثبّتة بملزَم. يمكن إيجازُ وصفِ جميع هذه الشروط الحدّيّة كمقدارٍ، يمثّل انزياحاً أو اشتقاقَ انزياحٍ أو، بشكلٍ بديل، قوّةً أو عزماً، مساوٍ لقيمةٍ مُحدّدةٍ مُسبقاً (الصفر غالباً)، يُشار إليها بخطٍّ فوقيّ، عند الحافة:

$$
\begin{aligned}
u_n &= \bar{u}_n & \text{أو} \quad & N_n = \bar{N}_n \\
u_t &= \bar{u}_t & \text{أو} \quad & N_{nt} = \bar{N}_{nt} \\
w,_n &= \bar{w},_n & \text{أو} \quad & M_n = \bar{M}_n \\
w &= \bar{w} & \text{أو} \quad & M_{nt,t} + Q_n = \bar{K}_n
\end{aligned}
\qquad (5.9)
$$

في الإحداثيّات n وt، حيث n الاتّجاه العمودي على الحافة وt الاتجاه المماسّ للحافة، كما يبيّن الشكل 5-6. أمّا Q_n فيدلّ على قوة القصّ، بينما K_n يرمز إلى قوّة كيرشوف المعروفة في نظرية الصفيحة الكلاسيكيّة (انظر تيموشينكو Timoshenko ووينوفسكي- كرايغر Woinowsky-Krieger [5-5]). على سبيل المثال، لدينا عند الحافة x=0 في الشكلَين 5-2 و5-3:

$$u = 0 \quad \text{أو} \quad N_x = 0 \qquad (5.10)$$



الشكل 5- 6: ترميز شرط الحدّي

تُصنَّف عادةً الأنواعُ الثمانية الممكنة لشروط الحافة الحديّة بسيطة الاستناد (البادئة S) والمُثبَّتة بملِزَم (البادئة C) [وهي تركيباتٌ من الشروط في المعادلة (5-9)] كما يلي (انظر ألمروث Almroth [5-6]):

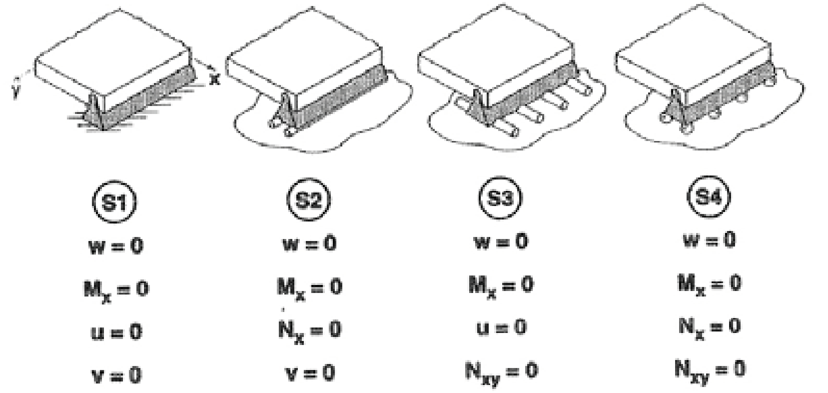
$$\begin{array}{lllll} S1: & w=0 & M_n=0 & u_n=\bar{u}_n & u_t=\bar{u}_t \\ S2: & w=0 & M_n=0 & N_n=\bar{N}_n & u_t=\bar{u}_t \\ S3: & w=0 & M_n=0 & u_n=\bar{u}_n & N_{nt}=\bar{N}_{nt} \\ S4: & w=0 & M_n=0 & N_n=\bar{N}_n & N_{nt}=\bar{N}_{nt} \end{array} \qquad (5.11)$$

$$\begin{array}{lllll} C1: & w=0 & w,_n=0 & u_n=\bar{u}_n & u_t=\bar{u}_t \\ C2: & w=0 & w,_n=0 & N_n=\bar{N}_n & u_t=\bar{u}_t \\ C3: & w=0 & w,_n=0 & u_n=\bar{u}_n & N_{nt}=\bar{N}_{nt} \\ C4: & w=0 & w,_n=0 & N_n=\bar{N}_n & N_{nt}=\bar{N}_{nt} \end{array} \qquad (5.12)$$

وبالتالي يمكن تمييز الصفيحة المستطيلة بأنها أيّ صفيحة تمتلك أيّاً من الشروط الثمانية في المعادلتَين (5.11) و(5.12) عند كلٍّ من حوافها الأربعة. يكون إذن مجالُ الإمكانيّاتِ كبيراً فعلاً (اثنا عشر شرطاً ممكناً على كلٍّ من الحواف الأربعة، إذا تمّ إدراجُ

شروط الحافة الحرةّ). تتضمّن أبسطُ الحالات على التحليل وبشكلٍ طبيعيّ أنواعاً متماثلةً من الشروط الحدّيّة على الحواف المتقابلة، إن لم يكن على جميعها- نُركِّز في هذا الكتاب على صفائح ذات أربع حواف بسيطة الاستناد، وبالتالي يتمّ اختيارُ الحالات من بين تلك الموافِقة للمعادلة (5.11). لاحظ أن الحواف بسيطة الاستناد لا يكون لها أيُّ تقييدٍ دورانيّ (rotational restraint)، ولكن عندما نستخدم هذه المصطلحات المُبسَّطة للحواف بسيطة الاستناد، فإنه لا يمكن عندها تحديدُ الشروط خاصة بالإجهادات في المستوي. من الواضح أنه ينبغي تحديدُ مجمل الشروط الحدّيّة – بما فيها شروط وجود الإجهادات في المستوي- من خلال التصريح مثلاً بأن حلاًّ ما قد تمّ الحصول عليه من أجل الشروط الحدّيّة S1.

اعتبرْ، من أجل تقدير أفضلَ للشروط الحديّة الممكنة الأربعة الموافِقة للحافة بسيطة الاستناد، نظامَ الاستناد عند حافة صفيحةٍ مُوضَّحة في الشكل 5-7 بدلالة حدّي شبه فيزيائيّة مع آليّاتٍ يمكن للقارئ فهمُها بسهولة. لاحظ أن آليّات الاستناد المُصوَّرة هي فقط لفهم كيفيّة عمل الدعامات المختلفة. لا يستطيع القارئ وحدَه أن يُقرِّر ماهيّةَ شروط الاستناد القابلة للتطبيق من أجل إنشاءٍ خاصّ ذي أهمية. تكون آليّةُ الاستناد الرئيسيّة في الشكل 5-7، من أجل حافة صفيحة بسيطة الاستناد – عبارةً عن موشورٍ مثلّث الشكلِ مع نتوءٍ موشوريّ ذي مقطعٍ دائريّ على قمّته، يحقّق آليّةً واقعيّةً للاستناد الاعتياديّ – المسمّى باستناد حافّة السكين- من أجل دورانٍ حرّ، أي $M_x=0$. يبدو المنظر الخلفيّ للموشور المثلثيّ مماثلاً لاستناد العارضة المألوف، ولكن مع آليّاتٍ أكثر واقعيّةٍ تسمح بالحركة المطلوبة. من أجل صفيحة، يكون النتوء مسند كرات تسمح بدورانٍ (محدّي) حول المحور y المارّ عبر مركز النتوء المتوضِّع في السطح الأوسط للصفيحة (ولكن ليس تماماً على حافة الصفيحة). يتلاءم وضعُ النتوء في تجويفٍ ضمن الصفيحة بحيث يكون الدوران حول المحور y ممكناً، بينما يتمّ منعُ الحركة العرضانيّة بالنسبة إلى سطح الصفيحة ($w=0$)، وكذلك لا يُسمَح بالحركة الانتقالية (translation) على طول المحور – y للموشور الدائريّ. إن الطرائق الأربع لاستناد الموشور المثلّثـــي هـــي:



الشكل 5– 7: شروط حدّي الحافة بسيطة الاستناد

(1) من أجل الشرط S1: يتمّ تثبيت الموشور المثلّثيّ بسطحٍ أفقيّ بحيث لا يمكن انتقال الموشور في أيّ من الاتّجاهَين x أو y. وهكذا يكون u=0 وv=0، وبالتالي ينبغي وجودُ القوّتَين N_x وN_{xy}.

(2) من أجل الشرط S2: يتمّ دعمُ وإسنادُ الموشور المثلّثي على مِحمَلٍ ذي اسطوانات مغمورٍ جزئيّاً وفق الاتّجاه y، يسمح بالحركة الانتقاليّة في الاتّجاه x، ولكن يمنعها في الاتّجاه y. وهكذا يكون u≠0 وv=0. وبالتالي ينبغي أن تكون القوّة N_x مساويةً للصفر، بينما تكون القّوة N_{xy} موجودةً.

(3) من أجل الشرط S3: يتمّ دعمُ وإسنادُ الموشور المثلّثي على مِحمَل ذي اسطوانات مغمورٍ جزئيّاً وفي الاتّجاه x، يسمح بالحركة الانتقاليّة في الاتّجاه y، ولكن يمنعها في الاتّجاه x. وهكذا يكون v≠0 وu=0. وبالتالي ينبغي أن تكون القوّة N_x موجودةً، بينما تكون القّوة N_{xy} مساويةً للصفر.

(4) من أجل الشرط S4: يتمّ دعمُ وإسنادُ الموشور المثلّثي على مِحمَل ذي كريّات مغمورٍ جزئيّاً، يسمح بالحركة الانتقاليّة في أيّ اتّجاهٍ في المستوي xy. وهكذا يكون v≠0 وu≠0. وبالتالي ينبغي أن تكون كلتا القوّتَين N_x و N_{xy} مساويتَين للصفر.

تكون آليّةُ الدعم الرئيسيّة من أجل حافة صفيحة مُثبَّتة بمِلزَم عبارة عن كتلة صندوقيّة تقيِّد الدورانَ حول حافة الصفيحة ($w_{,x}$)، والحركةَ العرضانيّةَ بالنسبة إلى سطح الصفيحة (w=0). إن الطرائقَ الأربع لدعم وإسناد الكتلة الصندوقيّة مماثلةٌ للطرائق الأربع الموافِقة للحافة بسيطة الإسناد، والمُبيَّنة في الملحق د.

3.2.5 معادلات الانبعاج في الصفائح متعددة الطبقات

تنبعج الصفيحة عندما تبلغ حمولة الضغط في المستوي قيمةً كبيرةً جداً بحيث تتوقّف حالة التوازُن الأصليّة – الموافِقة لسطحٍ مستوٍ– عن كونها واقفة، فتنحني الصفيحةُ نحو تشكيلٍ غير مستوٍ (متموِّج). تُدعى الحمولة التي يحدث عندها الابتعادُ عن حالة السطح المستوي بحمولة الانبعاج (buckling load). لا تحتوي حالة توازُن السطح المستوي إلاّ على قوى في المستوي، فلا تُعاني إلاّ الاستطالة أو الضغط أو القصّ. وهكذا، تُدعى عموماً حالةُ توازن السطح المستوي بحالة الغشاء السابقة للانبعاج، وتتألّف فقط من انفعالاتٍ في المستوي. بشكلٍ شمولي، تُدعى الحمولةُ التي يتغيّر عندها فجأةً التشكيلُ المنفعل للصفيحة إلى تشكيلٍ مختلفٍ بحمولة الانبعاج. لاحظ أنه مع الإقران انحناء–استطالة، تنحني الصفيحة المستويةُ أصلاً (أي عند غياب الحمولة) تحت تأثير ضغط محوريّ في المستوي عند جميع قيم الحمولات، وذلك قبل الانبعاج التشعبي (bifurcation) (ازدواجيّ الاتّجاه)[1]. وهكذا، لا تكون في الواقع حالةُ غشاءٍ (مستوٍ وخاضعٍ لإجهادٍ منتظَم) مسبق الانبعاج ممكنةً. مع ذلك، يكمن التقريبُ الأوّليّ لحمل الانبعاج التشعبي في تجاهُل الانحرافات خارج المستوي قبل الانبعاج. درس جونز (Jones) وهينيمان (Hennemann) هذا التقريبَ من أجل القواقع متعددة الطبقات ووجدا أن حمولات الانبعاج التشعبي – من أجل قوقعة ذات تشوهات انبعاجٍ مُسبَق محرّضة بالإقران انحناء– استطالة– تقلّ بمقدار يصل لــ 15% عنها في قوقعة تُهمل فيها مثلَ هذه الانفعالات السابقة للانبعاج [5–7].

يتضمّن تحليلُ انبعاجِ الصفائح تحت تأثير الحمولات في مستوي حلَّ مسألة قيمٍ ذاتيّة (eigenvalue) بخلاف مسألة الشروط الحدّيّة الموافِقة لتحليل التوازُن. إن الاختلافات بين مسائل القيمة الحدّيّة ومسائل القيم الذاتيّة معقّدةٌ جداً لكي نناقشها هنا. بدلاً من ذلك، نورد فيما يلي المعادلاتِ التفاضليّةَ الناظِمة لسلوك الانبعاج انطلاقاً من حالةِ غشاءٍ مسبق الانبعاج (يتمّ تجاهُل الانفعالات خارج المستوي السابقة للانبعاج):

---

[1] يحدث الانبعاج التشعبي عند الحمولة التي يتشعّب فيها مسار الحمولة إلى مسارَي حمولةٍ اثنَين. يكون المسار الجديد مستقرّاً، أمّا المسار الآخر، استمرار المسار القديم، فيكون غيرَ مستقرٍّ، بقطع النظر عن نوع مسار التشوّه قبل حصول الانبعاج (سواءَ أكان خطّيّاً أم لا خطّيّاً).

$$\delta N_{x,x} + \delta N_{xy,y} = 0 \quad (5.13)$$

$$\delta N_{xy,x} + \delta N_{y,y} = 0 \quad (5.14)$$

$$\delta M_{x,xx} + 2\delta M_{xy,xy} + \delta M_{y,yy} + \bar{N}_x \delta w,_{xx} + 2\bar{N}_{xy} \delta w,_{xy} + \bar{N}_y \delta w,_{yy} = 0 \quad (5.15)$$

حيث يدلّ δ على تغيُّرٍ في الرمز الرئيسيّ عن قيمته في حالة التوازُن السابِق للانبعاج. وهكذا، تدلّ الحدّي ... δM_x, ... δN_x, على التغيّرات في القوى والعزوم، على التوالي، عن قيمها في حالة توازُن الغشاء السابِق للانبعاج. تُشير الحدّي δw، واقتضاءً، الحدّي δu, δv إلى تغيّراتٍ في الانزياحات عن نفسِ الحالةِ المستوية السابقة للانبعاج. يبدو ظاهريّاً أن المعادلات التفاضليّة للانبعاج تُشبه معادلاتِ التوازُن التفاضليّةَ، باستثناء التمثيلِ الرمزي التغيّراتي الفائق الأهميّة وحقيقةِ كون الحدود الواقعة على الأطراف اليمينيّة من معادلات الانبعاج التفاضليّة معدومةً (تساوي صفراً). لاحظ أنه إذا كانت الحالةُ السابقةُ للانبعاج موافقةً لغشاءٍ، فإن $\delta w=w$ بسبب غياب انزياحاتٍ خارج المستوي تسبق الانبعاج. لاحظ أيضاً أن الحمولات المُطبَّقة في المستوي $\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_{xy}$ تدخل الصياغةَ الرياضيّاتيةَ لمسألة القيم الذاتيّة كمعاملات تقوس بدلاً من "حمولاتٍ" على الطرف اليميني لمعادلة التوازُن. يكمن جوهرُ مسألة القيم الذاتيّة في تحديد الحمولات المُطبَّقة الأصغريّة ...,$\bar{N}_x$ التي تُسبِّب الانبعاجَ. هناك نتيجةٌ هامّة لهذا النوع من المسائل تتمثّل في أن مقدارَ الانفعالات بعد الانبعاج لا يمكن تحديدُها بدون اللجوء إلى تحليلٍ لانحراف كبير، ويعني ذلك أن الانفعالات تبقى غير معروفة عند الاقتصار فقط على المعادلات من (5.13) إلى (5.15).

تُعطى التغيّراتُ في محصّلات القوى والعزوم بـــ:

$$\begin{bmatrix} \delta N_x \\ \delta N_y \\ \delta N_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_x^o \\ \delta \varepsilon_y^o \\ \delta \gamma_{xy}^o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \kappa_x \\ \delta \kappa_y \\ \delta \kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\begin{bmatrix} \delta M_x \\ \delta M_y \\ \delta M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B11 & B12 & B16 \\ B12 & B22 & B26 \\ B16 & B26 & B66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\varepsilon^o_x \\ \delta\varepsilon^o_y \\ \delta\gamma^o_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D11 & D12 & D16 \\ D12 & D22 & D26 \\ D16 & D26 & D66 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\kappa_x \\ \delta\kappa_y \\ \delta\kappa_{xy} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

حيث ترتبط التغيّراتُ في الانفعالات في المستوي والتغيّراتُ في التقوس مع التغيّراتِ في الانزياحات عبر:

$$\delta\varepsilon^o_x = \delta u,_x \quad \delta\varepsilon^o_y = \delta v,_y \quad \delta\gamma^o_{xy} = \delta u,_y + \delta v,_x \qquad (5.18)$$

$$\delta\kappa_x = -\delta w,_{xx} \quad \delta\kappa_y = -\delta w,_{yy} \quad \delta\kappa_{xy} = -2\delta w,_{xy} \qquad (5.19)$$

يمكن التعبير عن المعادلات التفاضليّة للانبعاج بدلالة التغيّرات في الانزياحات من خلال تعويضِ تغيُّراتِ الانفعالات والتقوسات في المستوي، المعادلتان (5.18) و(5.19)، في تغيُّرات مُحصّلات القوى والعزوم، المعادلتان (5.16) و(5.17)، وبالتالي في معادلات الانبعاج التفاضليّة بدلالة تغيُّرات القوى والعزوم والانزياحات أثناء الانبعاج، أي المعادلات من (5.13) إلى (5.15). تأخذ المعادلات الناجمةُ شكلاً مماثلاً لمعادلات التوازُن الموافِقة – المعادلات من (5.6) إلى (5.8). وكحالة مسائل التوازُن تماماً، هناك إقران انحناء – استطالة في انبعاج الصفائح متعددة الطبقات العامّة. مع ذلك، لا تُبدي بعض الصفائح الطبقيّة خاصة إقران انحناء – استطالة؛ وبالتالي يمكن الحصول على حمولات انبعاجِها عبر حلّ المعادلة (5.15) فقط، أو مُكافِئها الموافِق لتغيّر التقوسات.

لا تُطبَّق الشروطُ الحدّيّة في مسائل الانبعاج إلاّ على تشوهات الانبعاج، وذلك لأن الانفعالات السابقة للانبعاج قد تمّ افتراضُها في حالة الغشاء (حتى ولو وُجِد إقران انحناء – استطالة). تكمن إحدى السمات المُميِّزة لمسألة قيمٍ ذاتيّة في كون جميع الشروط الحدّيّة متجانسةً أي مساويةً للصفر. وهكذا، تكون الشروط الحدّيّة للحافة بسيطة الاستناد أثناء الانبعاج ما يلي:

$$\begin{array}{lllll} S1: & \delta w = 0 & \delta M_n = 0 & \delta u_n = 0 & \delta u_t = 0 \\ S2: & \delta w = 0 & \delta M_n = 0 & \delta N_n = 0 & \delta u_t = 0 \\ S3: & \delta w = 0 & \delta M_n = 0 & \delta u_n = 0 & \delta N_{nt} = 0 \\ S4: & \delta w = 0 & \delta M_n = 0 & \delta N_n = 0 & \delta N_{nt} = 0 \end{array} \qquad (5.20)$$

$$
\begin{array}{lllll}
C1: & \delta w=0 & \delta w,_{n}=0 & \delta u_{n}=0 & \delta u_{t}=0 \\
C2: & \delta w=0 & \delta w,_{n}=0 & \delta N_{n}=0 & \delta u_{t}=0 \\
C3: & \delta w=0 & \delta w,_{n}=0 & \delta u_{n}=0 & \delta N_{nt}=0 \\
C4: & \delta w=0 & \delta w,_{n}=0 & \delta N_{n}=0 & \delta N_{nt}=0
\end{array} \tag{5.21}
$$

يمكن للشروط الحديّة أن تكون مختلفةً من أجل كلّ حافة للصفيحة، وبذلك يكون عددُ تركيبات الشروط الحديّة الممكنة كبيراً جداً، كما كان الحال في مسائل التوازُن.

4.2.5 معادلات الاهتزاز في الصفائح متعددة الطبقات

إن مسألةَ اهتزاز، أو تذبذب، الصفيحة حول حالةِ توازنٍ ساكِن، كما كان الحال في انبعاج الصفيحة، هي مسألة قيمٍ ذاتيّة. يكمن هدف التحليل في تحديد الترددات الطبيعيّة والأشكال النمطيّة التي تهتزّ وفقاً لها الصفائحُ متعددة الطبقات. مع ذلك، لا يمكن تحديدُ مقدار الانفعالات ضمن نمطٍ معيّن لأن الاهتزازَ هو مسألةُ قيمٍ ذاتيّة. يتمّ الحصول على معادلات الاهتزاز التفاضليّة الناظِمة انطلاقاً من معادلات الانبعاج التفاضليّة عبر إضافة حدّ تسارعٍ إلى الطرف الأيمن من المعادلة (5.15)، ومن خلال إعادة تفسير جميع التغيُّرات الحاصلة خلال الاهتزاز كتغيّراتٍ حول وضعِ حالةِ توازُنٍ (لا صعوبةَ تُذكر في إجراء هذا الأمر لأن التغيّرات أثناء الانبعاج هي أيضاً تغيّراتٌ عن حالةِ توازن):

$$\delta N_{x,x}+\delta N_{xy,y}=0 \tag{5.22}$$

$$\delta N_{xy,x}+\delta N_{y,y}=0 \tag{5.23}$$

$$\delta M_{x,xx}+2\delta M_{xy,xy}+\delta M_{y,yy}+\bar{N}_{x}\delta w,_{xx}+2\bar{N}_{xy}\delta w,_{xy}+\bar{N}_{y}\delta w,_{yy}=\rho\delta w,_{tt} \tag{5.24}$$

حيث تدلّ ρ على الكتلة في وحدة مساحة سطح الصفيحة.

تُعطى التغيّراتُ في القوى والعزوم خلال الاهتزاز بالمعادلتَين (5.16) و(5.17). تُحدَّد حالةُ الغشاء مسبقة الإجهاد (حالة توازن الإجهاد) بـــ $\bar{N}_x, \bar{N}_y, \bar{N}_{xy}$.

تحتوي مسألة اهتزاز الصفيحة – وكحال مسألتَي الانحناء والانبعاج، على الإقران انحناء– استطالة عندما تكون الصفيحةُ متعددة الطبقات بشكلٍ غير متناظر. أمّا من أجل الصفائح متعددة الطبقات المُرتّبة بشكلٍ متناظر، فإن الإقران يضمحل، كما تؤول مسألة الاهتزاز إلى حلّ المعادلة (5.24) فقط لا غير، بسبب تجاهل حدّي العطالة

الدورانية (Rotary Inertia). تكون الشروط الحديّة في مسائل الاهتزاز، بقطع النظر عن السمات المُميِّزة للتصفيح، مطابقةً لها في مسائل الانبعاج. وبشكلٍ بديلٍ، يمكن صياغةُ كلتا مسألتَي الانبعاج والاهتزاز كمسألة اهتزازٍ حيث تتحدّ حمولات الانبعاج عندما يجعل تردد الاهتزاز مساوياً للصفر.

5.2.5 تقنيّات الحلّ

توجد تقنيّات كثيرة لحلّ مسائل التوازُن والانبعاج والاهتزاز التي عُرضت في الفقرات الفرعية السابقة. تغطيّ التقنيّات مدىً واسعاً يمتدّ من حلولٍ صحيحةٍ (دقيقةٍ) تصادفيّةٍ – تمّ الحصول عليها بشكلٍ أساسيّ بواسطة "الملاحظة والمراقبة" عبر التقريبات العدديّة مثل مقاربتَي العناصر المنتهية والفروقات المنتهية إلى طرائق الطاقة التقريبيّة المتنوّعة مثل طرق رايليه – ريتز (Rayleigh-Ritz) وغاليركِن (Galerkin). بما أن الهدف هنا هو تبيان أهميّة معاملات جساءة الإقران المتنوّعة، سوف يتم فقط استعمال تقنياتِ الحل اللازمة من أجل الإيضاحات المثمرة.

يتمثّلُ أحد أبرز الأجزاء في عديدٍ من تقنيّات الحلّ في طريقة فصل المتغيّرات. في هذه الطريقة، نفصل بشكلٍ كيفيّ انحراف المتغيرات، أو تغيّر متحوّلاتِ الانحناء– إلى جداء دالات لإحداثيّة الصفيحة x وحدها في دالات للإحداثيّة y وحدها. برهن وانغ (Wang) [5–8] أن فصلَ المتغيّرات يقود إلى حلولٍ صحيحة (دقيقة) من أجل بعض فئات مسائل الصفيحة، ولكنه لا يفعل ذلك من أجل المسائل الأخرى، أي أن الانحرافات لا تكون دوماً قابلةً للفصل. سوف نناقش مثالاً خاصّاً – يعود إلى أشتون (Ashton) [5–9]– عن الاستعمال التقريبيّ لطريقة فصل المتغيّرات في الفقرة 2.3.5. توجد استعمالاتٌ دقيقةٌ للطريقة منتشرةٌ ضمن الفقرات من 3.5 إلى 5.5.

مجموعة المسائل 2.5:

1.2.5 استنتج المعادلاتِ من (5.6) إلى (5.8).

2.2.5 استنتج المعادلاتِ المماثلةَ للمعادلاتِ من (5.6) إلى (5.8) والموافِقةَ لمعادلات الانبعاج التفاضليّة، أي المعادلات من (5.13) إلى (5.15).

3.2.5 استنتج المعادلاتِ المماثلةَ للمعادلاتِ من (5.6) إلى (5.8) والموافِقةَ لمعادلات الاهتزاز التفاضليّة، أي المعادلات من (5.22) إلى (5.24).

3.5 انحراف الصفائح متعددة الطبقات بسيطة الاستناد والخاضعة لحمولةٍ عرضانيّة موزّعة بانتظام

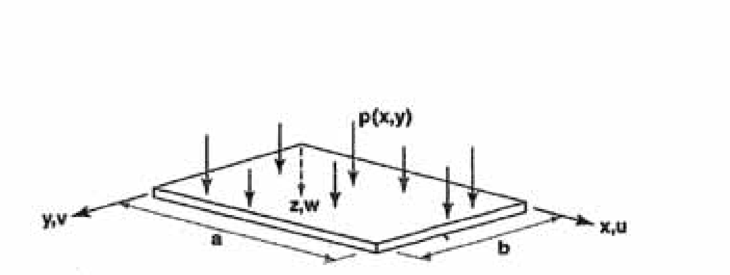
لنعتبر الفئة العامّة للصفائح المستطيلة متعددة الطبقات بسيطة الاستناد عند الحواف x=0, x=1, y=0, y=b، والخاضعة لحمولةٍ عرضانيّة موزّعة p(x,y)، كما في الشكل 5-8. يمكن نشرُ الحمولة العرضانيّة كمتسلسلةِ فورييه جيبيّةٍ مضاعفةٍ (Double Fouriersine Series):

$$P(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\rho_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (5.25)$$

يمكن تمثيل أنواعٍ مختلفة عديدة من الحمولات العرضانيّة بالمعادلة (5.25). على سبيل المثال، تُعطى الحمولة المنتظمة p_0 بالعلاقة:

$$p(x,y)=\sum_{m=1,3,\ldots}^{\infty}\sum_{n=1,3,\ldots}^{\infty}\frac{16p_o}{\pi^2}\frac{1}{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (5.26)$$

انظرْ مؤلَّفَ تيموشينكو ووُينوفسكي-كرايغِر [5-5] من أجل الاطّلاع على أمثلةٍ أخرى.



الشكل 5-8: صفيحة متعددة الطبقات مستطيلة بسيطة الاستناد خاضعة لحمل عرضاني موزع، p(x,y)

سوف نقوم بتحليل بعض أنواع التصفيح المتعددة الممكنة، سواء أكانت موافقة لصفائح طبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصة، أم لصفائح ذات رقاقات مائلة متناظرة، أم لصفائح ذات رقاقات متصالبة معاكسة التناظر، أم لصفائح ذات رقاقات مائلة معاكسة التناظر،

وذلك من أجل الحمولة المُعطاة في المعادلة (5.25). سوف تقارن النتائج بعضها ببعض من أجل تحديد تأثير معاملات جساءة الإقران انحناء–فتل (D_{16} و D_{26}) ومعاملات جساءة الإقران انحناء– استطالة (B_{ij}). تكون كلُّ أطراف الصفيحة بسيطة الاستناد؛ ولكن – كما رأينا في الفقرة 2.5 فإن مثلَ هذا التحديد يبقى مدعاةً للالتباس. وهكذا، انتبهْ بشكلٍ خاصّ إلى الصياغة الدقيقة للشروط الحديّة في كلٍّ من الحالات المعروضة.

1.3.5 الصفائح متعددة الطبقات ثلاثيّة المناحي خاصة

تمتلك الصفيحة الطبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصّة (specially othotropic laminate) إمّا طبقةً وحيدةً لمادّة ثلاثيّة المناحي خاصّة أو عدّةَ طبقاتٍ ثلاثيّة المناحي خاصّة، تنتظم بشكلٍ متناظر حول سطح الصفيحة الطبقيّة الأوسط. في كلتا الحالتَين، تتألّف معاملات جساءة الصفيحة الطبقيّة فقط من $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}, D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}$. يعني ذلك غياب كلٍّ من الإقران قصّ– استطالة والإقران انحناء – فتل والإقران انحناء– استطالة. وهكذا، تُوصَف الانحرافات العرضانيّة، في مسائل الصفيحة، من خلال معادلةِ توازنٍ تفاضليّة واحدةٍ لا غير:

$$D_{11}\, w_{,xxxx} + 2\left(D_{12} + 2\, D_{66}\right) w_{,xxyy} + D_{22}\, w_{,yyyy} = p(x, y) \qquad (5.27)$$

وتكون خاضعةً للشروط الحديّة الموافِقة للطرف بسيط التثبيت التي تُعطى من أجل هذه الصفيحة الطبقيّة بـــ:

$$\begin{aligned} x=0,a: &\qquad w=0 \qquad M_x = -D_{11} w_{,xx} - D_{12} w_{,yy} = 0 \\ y=0,b: &\qquad w=0 \qquad M_y = -D_{12} w_{,xx} - D_{22} w_{,yy} = 0 \end{aligned} \qquad (5.28)$$

لاحظ أن الشرط الحدّي الموافِق للطرف بسيط الاستناد – وبسبب عدم وجود الانفعالات u, v ضمن المستوي في المعادلة التفاضليّة – يأخذ شكلاً بسيطاً بشكلٍ خاص مقارنةً بالمعادلة (5.11).

إذا تمثّلت الحمولةُ العرضانيّة بمتسلسلة فورييه الجيبيّة في المعادلة (5.25)، يكون حلُّ هذه المعادلة التفاضليّة الجزئيّة من المرتبة الرابعة خاضعاً لشروطه الحديّة المقترنة وبسيطاً بشكلٍ لافتٍ للنظر. كما كان الحال مع الصفائح المتماثلة المناحي، يمكن التحقّق من كون الحلّ:

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (5.29)$$

يعني ذلك، أن المعادلةَ (5.29) تُحقِّق المعادلة التفاضليّة – المعادلة (5.27)– والشروط الحديّة، المعادلة (5.28)، وبالتالي تمثِّل الحلَّ الصحيحَ (الدقيقَ) شريطةَ

$$a_{mn}=\frac{\dfrac{p_{mn}}{\pi^4}}{D_{11}\left[\dfrac{m}{a}\right]^4+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\left[\dfrac{m}{a}\right]^2\left[\dfrac{n}{b}\right]^2+D_{22}\left[\dfrac{n}{b}\right]^4} \qquad (5.30)$$

من أجل حمولة عرضانيّة منتظَمة، يمكن بسهولة بيان أن الحلّ يكون:

$$w=\frac{16p_o}{\pi^6}\sum_{m=1,3,5,\dots}^{\infty}\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty}\frac{\dfrac{1}{mn}\sin\dfrac{m\pi x}{a}\sin\dfrac{n\pi y}{b}}{D_{11}\left[\dfrac{m}{a}\right]^4+2\left(D_{12}+2D_{66}\right)\left[\dfrac{m}{a}\right]^2\left[\dfrac{n}{b}\right]^2+D_{22}\left[\dfrac{n}{b}\right]^4} \qquad (5.31)$$

متى ما عُرِفت الانحرافات، غدا الحصولُ على الإجهادات أمراً مباشراً عبر التعويض في علاقات الإجهاد– الانفعال، المعادلة (4.16)، بعد إيجاد الانفعالات من المعادلة (4.12). لاحظ أنه يمكن التعبير عن حلّ المعادلة (5.31) بدلالة معاملات جساءة الصفيحة الطبقيّة $D_{11}, D_{12}, D_{22}, D_{66}$ وحدها. لن يُرسمَ هذا الحلَّ هنا، ولكن سوف يُستعمل كحلٍّ قاعديّ في الفقرات الفرعية التالية، ويُرسم هناك مقارنةً بنتائج أكثر تعقيداً.

2.3.5 الصفائح متعددة الطبقات المتناظرة ذات الرقاقات المائلة

تم في الفقرة 2.3.4 وصف الصفائح الطبقيّة المتناظرة ذات الرقاقات المائلة (symmetric angle-ply laminates)، كما وجد أنها توصف بواسطة مصفوفةٍ كاملةٍ من معاملات جساءة الاستطالة بالإضافة إلى معاملات جساءة الانحناء (ولكن بطبيعة الحال لا وجودَ لمعاملات جساءة الإقران انحناء– استطالة، بسبب التناظر بالنسبة إلى السطح الأوسط). يتمثّل الوجه الجديد في هذا النوع من الصفائح الطبقيّة بخلاف الصفائح

الطبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصّة في ظهور معاملات جساءة الإقران انحناء– فتل D_{16}, D_{26} (لا تُؤثِّر معاملات جساءة الإقران قصّ– استطالة A_{16} وA_{26} في الانحناء العرضانيّ w عندما تكون الصفيحة الطبقيّة متناظرةً). تكون المعادلة التفاضليّة الناظِمة للتوازن:

$$D_{11}w_{,xxxx}+4D_{16}w_{,xxxy}+2(D_{12}+2D_{66})w_{,xxyy}+4D_{26}w_{,xyyy}+D_{22}w_{,yyyy}=p(x,y) \quad (5.32)$$

باعتبار الشروط الحديّة الموافِقة للطرف بسيط الاستناد:

$$\begin{aligned} x=0,a: \quad & w=0 \quad M_x=-D_{11}w_{,xx}-D_{12}w_{,yy}-2D_{16}w_{,xy}=0 \\ y=0,b: \quad & w=0 \quad M_y=-D_{12}w_{,xx}-D_{22}w_{,yy}-2D_{26}w_{,xy}=0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

لاحظ وجودَ معاملات جساءة الإقران انحناء – فتل في الشروط الحديّة وفي المعادلة التفاضليّة كذلك. وكما كان الحال مع الصفيحة متعددة الطبقات ثلاثيّة المناحي خاصّة، فإنه لا يمكن أكثر تمييز الشرط الحدّي الموافِق للطرف بسيط الاستناد من خلال خاصّيّة الشروط الحديّة في المستوي على u وv، وذلك لأن الأخير لا يظهر في أي مسألةِ صفيحةٍ من أجل صفيحة طبقيّة متناظرة.

لا يكون حلُّ المعادلة التفاضليّة الناظِمة – المعادلة (5.32)، بسيطاً، كما كان في حالة الصفائح متعددة الطبقات ثلاثيّة المناحي، خاصّة بسبب وجود D_{16} و D_{26}. يُعدّ النشر (expansion) وفق متسلسلة فورييه للانحراف w في المعادلة (5.29) مثالاً على طريقة فصل المتغيّرات. مع ذلك، وبسبب وجود الحدّي المرتبطة بـــ D_{16} وD_{26}، لا يحقِّق النشرُ المعادلةَ التفاضليّةَ الناظِمةَ لأن المتغيّرات غيرُ قابلةٍ للفصل. إضافة إلى ذلك، لا يحقّق نشرُ الانحراف أيضاً الشروطَ الحديّة المعادلة (5.33)، ويعود ذلك مرّةً أخرى إلى وجود الحدّي المرتبطة بـــ D_{16} وD_{26}.

حلَّ أشتون هذه المسألةَ تقريبيّاً من خلال تعرُّفِه على أن المعادلة التفاضليّة، المعادلة (5.32)، ليست إلاّ نتيجةً واحدةً لمتطلَّب التوازن الذي ينصّ على جعل الطاقة الكامنة الكليّة للنظام الميكانيكيّ واقفة (stationary) بالنسبة إلى المتغيِّر المستقلّ w [5–9]. هناك طريقةٌ بديلةٌ تكمن في التعبير عن الطاقة الكامنة الكلّيّة بدلالة الانحرافات ومشتقّاتِها. بشكلٍ خاصّ، قام أشتون بتقريب الانحراف عبر نشر فورييه في المعادلة (5.29)، ثمّ عوّض هذا التقريب في عبارة الطاقة الكامنة الكلّيّة V:

$$v=\frac{1}{2}\iint[D_{11}(w,_{xx})^2+2D_{12}w,_{xx}w,_{yy}+D_{22}(w,_{yy})^2+4D_{66}(w,_{xy})^2 + 4D_{16}w,_{xx}w,_{xy}+4D_{26}w,_{yy}w,_{xy}-2pw]dxdy \quad (5.34)$$

حيث يُعبِّر الحدّ المرتبط بـــ pw عن الطاقة الكامنة للقوى الخارجيّة (الشغل المبذول مضروباً بإشارة ناقص)، أي الحمولة العرضانيّة p، بينما يُعبِّر الجزء المتبّقي عن طاقة الانفعال الداخليّة للصفيحة. يمكن الاطّلاع على طاقة الصفيحة متعددة الطبقات غير المتناظرة في مرجع ويتني (Whitney) [5–1]. يناقش المؤلَّف الكلاسيكيّ لـــ لانغار (Langhaar) [5–10] المبادئَ الطاقيّة الأساسيّة وتطبيقها في الميكانيك التطبيقي، وخاصّةً الميكانيك الإنشائي.

إذا أخذنا بعين الاعتبار عدداً كافياً من الحدّي في نشر الانحناء، تقاربت الطاقة التقريبيّة نحو الطاقة الصحيحة (exact energy) طالما ظلّ تحقُّق الشروط الحديّة الهندسيّة ($w=0$ و $w,_x=0$) قائماً، حتى لو لم تتحقّق الشروط الحديّة الطبيعيّة ($M_n=\bar{M}_n, N_n=\bar{N}_n$). إن هذه الطريقة هي طريقة رايليه–ريتز المعروفة عندما يتم جعل الطاقةَ واقفة (stationary) بالنسبة إلى المعامِلات نشر الانحراف وفقاً لمبدأ الطاقة الكامنة واقفة. تُكوِّن المعادلاتُ الناجمةُ جملةً من معادلات جبريةٍ خطّيّةٍ متواقتة (ينبغي حلُّها معاً) يمكن حلُّها رقميّاً بمساعدة حاسوبٍ رقميّ. لاحظ أنه من أجل الشروط الحديّة الموافِقة لطرفٍ بسيط الاستناد، يوجد فقط شرطٌ حدّييّ هندسيّ واحد هو $w=0$. كذلك، لا يوجد إلاّ شرطٌ حدّييّ طبيعيّ واحِد $M_n=0$. تحقّق دالة متسلسلة فورييه الجيبيّة المُضاعفة للانحناء – المعادلة (5.29)، الشرطَ الحدّي الهندسيَّ، ولكنه لا يحقّق الشرطَ الحدّي الطبيعيّ. وهكذا، تكون المعادلة (5.29) تقريباً مقبولاً للانحراف في طريقة رايلي–ريتز. مع ذلك، يكون تقارب (convergence) الطريقة بطيئاً لأن الشرط الحدّي الطبيعيّ غيرُ مُحقَّق تماماً.

استعمل أشتون 49 حدّاً (موافقةً لقيمِ m وn لغاية $m=7$ و$n=7$) في تقريب الانحراف، المعادلة (5.29)، ليحصل من أجل صفيحة مُربّعة الشكل خاضعةٍ لحمولةٍ منتَظمة ذات معاملات جساءة $D_{22}/D_{11}=1,(D_{12}+2D_{66})/D_{11}=1.5$ و $D_{16}/D_{11}=D_{26}/D_{11}=-0.5$ على انحراف أعظميّ (عند مركز الصفيحة) [5–9] مساوٍ لــ:

$$w_{max} = 0.00425 \frac{a^4 p}{D_{11}} \qquad (5.35)$$

ولكن إذا تم إهمال D_{16} وD_{26} أي إذا تم تقريب الصفيحةَ الطبقيّة ذات الرقاقات المائلــةَ المتناظِــرة كصفيحــةٍ طبقيّــةٍ ثلاثيّــة المناحــي خاصّــة تحقّــق $D_{22}/D_{11}=1,(D_{12}+2D_{66})/D_{11}=1.5,$ و $D_{16}=D_{26}=0$ ، يكون الانحراف الأعظميّ:

$$w_{max} = 0.00324 \frac{a^4 P}{D_{11}} \qquad (5.36)$$

هكذا، يكون الخطأ الناجم عن تجاهل حدّي الإقران انحناء– فتل بحدّي 24%، وليس هذا بالتأكيد خطأً مهملاً. بالتالي تُعدّ الصفيحة متعددة الطبقات ثلاثيّة المناحي خاصة تقريباً غيرَ مقبولٍ لصفيحة متعددة الطبقات ذات رقاقات مائلة متناظرة. مع ذلك، تذكّر أن نتائج رايلي–ريتز لأشتون هي أيضاً نتائج تقريبيّة، بسبب استخدام عددٍ منتهٍ فقط من الحدود في متسلسلة تقريب الانحناء. يستنتج أن مقارنةً بين نتائج أشتون بنتيجةِ حلّ صحيحٍ يمكنها أن تمنح الثقةَ برفض تقريب الصفيحة متعددة الطبقات ثلاثيّة المناحي خاصة.

لاحظ أشتون أن الصفائح متماثلة المناحي متخالفة التناظر (skew) (ذات الشكل الشبيه بمتوازي الأضلاع) والخاضعة لحمولةٍ ذات توزيع منتظَم $\overline{p}_0$ كما يبيِّن الشكل 5–9 ضمن الإحداثيات X-Y المتعامدة تتبع معادلة التوازن التفاضليّة:

$$\begin{aligned} &w,_{xxxx} - 4\cos\theta \;\; w,_{xxxy} + 2(1+2\cos^2\theta) w,_{xxyy} \\ &- 4\cos\theta \;\; w,_{xyyy} + w,_{yyyy} = \frac{\overline{P_o}\sin^4\theta}{D} \end{aligned} \qquad (5.37)$$

مع الشروط الحديّة الموافِقة لطرفٍ بسيط الاستناد [5–11]

$$\begin{aligned} x = 0, a: \quad & w = 0 \quad w,_{xx} - 2\cos\;\theta\;\; w,_{xy} = 0 \\ y = 0, b: \quad & w = 0 \quad w,_{yy} - 2\cos\;\theta\;\; w,_{xy} = 0 \end{aligned} \qquad (5.38)$$

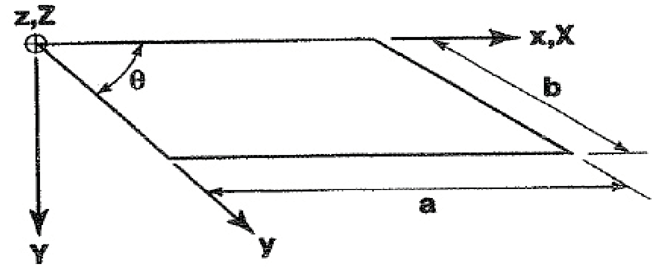
يكمن جوهرُ مساهمة أشتون في أنه عيّن هويّةَ معاملات جساءة الصفيحة متخالفة التناظر على أنها تحويلٌ لمعاملات جساءة الصفيحة ذات الرقاقات المائلة المتناظِرة، أو – بشكلٍ أكثر عموميّةً لمعاملات جساءة الانحناء غير متماثلة المناحي، أي:

$$D_{22} = D_{11} = D \qquad \frac{D_{12} + 2D_{66}}{D_{11}} = (1 + 2\cos^2\theta)$$
$$\frac{D_{16}}{D_{11}} = \frac{D_{26}}{D_{11}} = -\cos\ \theta \qquad p = \bar{p}\sin^4\theta \tag{5.39}$$

تكافئ معاملات الجساءة في المعادلة (5.39) معاملات جساءة مادّة مكافئة ثلاثيّة المناحي ذات محاور رئيسيّة للمادة أو محاور ثلاثية تُشكِّل زاوية 45° مع جوانب الصفيحة. يمكن تبيان أن معاملات جساءة الانحناء ثلاثية المناحي للمادة المكافئة تُعطى بـــ:

$$\begin{aligned} D'_{11} &= D\left(1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) \\ D'_{22} &= D\left(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta\right) \\ D'_{12} + 2D'_{66} &= D\sin^2\theta \end{aligned} \tag{5.40}$$

حيث D'_{16} و D'_{26} بالطبع مساويان للصفر لأنهما يوافقان الاتّجاهات الرئيسيّة للمادة من أجل مادّة ثلاثيّة المناحي. تُعطى قيم D_{ij} وD'_{ij} في الجدول 5-1 من أجل قيمٍ عديدةٍ لزاوية التخالُف (skew angle) المكافئة θ. من المعادلة (5.40)، كلّما تناقصت قيمةُ θ، ازدادت قيمةُ D'_{11} وتناقصت قيمةُ D'_{22}، و بشكلٍ أكثرَ أهميّة كَبُرَت قيمةُ D_{16}، أي إن الصفيحة تغدو غير متماثلة المناحي أكثر.



الشكل 5- 9: هندسة الصفيحة المتخالفة

بما أن حلولاً صحيحةً خاصة لصفائح متماثلة المناحي ومتخالفة التناظر متوفّرةٌ بسهولة، استطاع أشتون الحصولَ على بعض الحلول الصحيحة من أجل صفائح مستطيلة الشكل وغير متماثلة المناحي بواسطة إجرائيّة تعيين الهويّة الخاصّ التي تمّ إيجازها في

الفقرة السابقة. على وجه التخصيص، يُقدِّم الجدول 5−2 قيمَ الانحراف المركزي لصفيحة مربّعة الشكل خاضعةٍ لحمولةٍ منتظَمة. يتم هنا بيان قِيَمِ الحلِّ الصحيح إلى جانب قيم حلّ رايلي−ريتز وقيم الحلِّ الثلاثي المناحي خاصة. من أجل الحالة التي نوقشت سابقاً حيث $D_{22}/D_{11}=1,(D_{12}+2D_{66})/D_{11}=1.5,$ و $D_{16}/D_{11}=D_{26}/D_{11}=-0.5$، يُعطى الحلّ الصحيح بــ:

$$W_{\max} = .00452\ \frac{a^4 p}{D_{11}} \tag{5.41}$$

إذاً، يبلغ خطأ حلّ رايلي−ريتز حوالى 6%، بينما يبلغ هذا الخطأ في الحلّ الثلاثي المناحي حوالى 28%.

الجدول 5−1: نسب جساءة الانحناء المكافئة (عن أشتون Ashton [5−11])

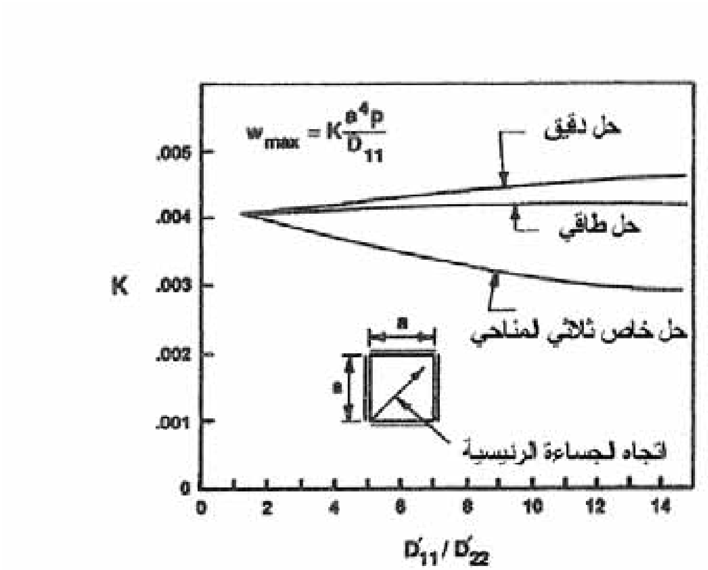
زاوية التخالُف (الانحناء) θ	$\frac{D'_{22}}{D'_{11}}$	$\frac{D'_{12}+2D'_{66}}{D'_{11}}$	$\frac{D'_{16}}{D'_{11}}$	$\frac{D_{22}}{D_{11}}$	$\frac{D_{12}+2D_{66}}{D_{11}}$	$\frac{D_{16}}{D_{11}}$
90°	1.000	1.000	0.0	1.0	1.000	0.0
80°	0.495	0.702	0.0	1.0	1.061	-0.174
63°	0.141	0.376	0.0	1.0	1.412	-0.454
60°	0.111	0.333	0.0	1.0	1.5000	-0.500
54°	0.0675	0.260	0.0	1.0	1.690	-0.587

الجدول 5−2: معاملات الانحناء الأعظمي K من أجل الحلّ الصحيح والحلّ الثلاثي المناحي الخاصّ وحلول رايلي−ريتز(*)

زاوية التخالُف (الانحناء) θ	الحلّ الصحيح K	الحلّ الثلاثي المناحي خاصّ K	حلّ رايلي−ريتز K
90°	0.00406	0.00406	0.00406
80°	0.00411	0.00394	0.00408
63°	0.00444	0.00336	0.00422
60°	0.00452	0.00324	0.00425
54°	0.00476	0.00301	0.00430

(*) عن أشتون Ashton [5−11].

رُسمت النتائجُ المتعلّقة بالانحراف من أجل المقاربات الثلاث في الشكل 5−10 كدالة للنسبة بين معاملات الجساءة الرئيسية D'_{11}/D'_{22} التي تزداد بتناقص θ. وهكذا، كلّما ازدادت قيم D_{26} و D_{16}، تناقصت قيمة θ، وبالتالي قلّت دقّتا مقاربتَي رايلي− ريتز والتقريب ثلاثي المناحي خاصة كلتيهما.



الشكل 5−10: معامل الانحناء العرضاني بدلالة نسبة الجساءة الرئيسية (عن أشتون Ashton [11−5])

3.3.5 الصفائح متعددة الطبقات ذات الرقاقات المتصالبة معاكسة التناظر

تم وصف الصفائح متعدّدة الطبقات المتصالبة معاكسة التناظرة (Antisymmetric Cross-Ply Laminated Plotes) في الفقرة 3.3.4، ووجد أن لها معاملات جساءة استطالةٍ $A_{11}=A_{12}, A_{22}=A_{11}, A_{66}$؛ و معاملات جساءة إقران انحراف − استطالة B_{11} $B_{22}=-B_{11}$، و معاملات جساءة انحناء $D_{11},D_{12},D_{22}=D_{11},$ وD_{66}. تتمثّل الحدّي الجديدة (New Terms) هنا مقارنةً بالصفيحة الطبقية ثلاثيّة المناحي خاصة بـــ B_{11} وB_{22}. بسبب هذا الإقران، تكون معادلات التوازن التفاضليّة الثلاث مرتبطةً بعضها ببعض:

$$A_{11}u_{,xx} + A_{66}u_{,yy} + \left(A_{12} + A_{66}\right)v_{,xy} - B_{11}w_{,xxx} = 0 \quad (5.42)$$

$$\left(A_{12} + A_{66}\right)u_{,xy} + A_{66}v_{,xx} + A_{11}v_{,yy} + B_{11}w_{,yyy} = 0 \quad (5.43)$$

$$D_{11}(w_{,xxx} + w_{,yyy}) + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)w_{,xxyy} - B_{11}\left(u_{,xxx} - v_{,yyy}\right) = p \quad (5.44)$$

قامّ ويتني Whitney وليسّا Leissa بحلّ هذه المسألة من أجل الشرط الحدّي S2 الموافِق لطرفٍ بسيط الاستناد:

$$x = 0, a : w = 0 \quad M_x = B_{11}u_{,x} - D_{11}w_{,xx} - D_{12}w_{,yy} = 0 \quad (5.45)$$

$$v = 0 \quad N_x = A_{11}u_{,x} + A_{12}v_{,y} - B_{11}w_{,xx} = 0 \quad (5.46)$$

$$y = 0, b : w = 0 \quad M_y = -B_{11}v_{,y} - D_{12}w_{,xx} - D_{11}w_{,yy} = 0 \quad (5.47)$$

$$u = 0 \quad N_y = A_{12}u_{,x} + A_{11}v_{,y} + B_{11}w_{,yy} = 0 \quad (5.48)$$

ولاحظا أن الانحرافات:

$$u = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \cos\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

$$v = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \cos\frac{n\pi y}{b} \quad (5.49)$$

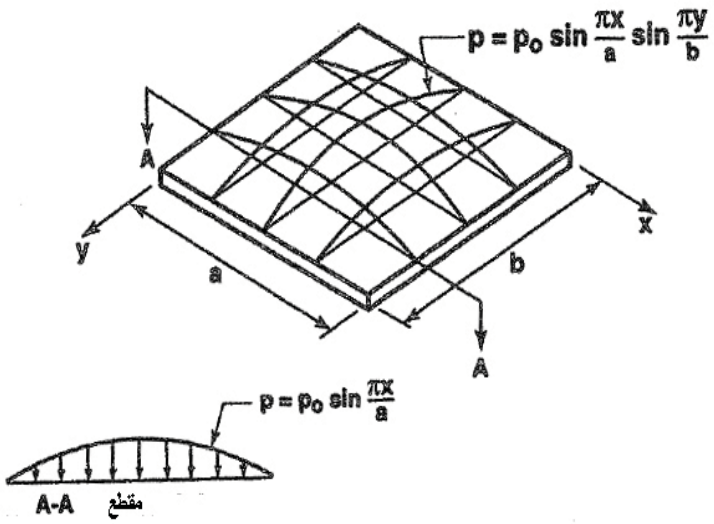
$$w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b}$$

تحقِّق المعادلات التفاضليّة الثلاث الناظمة والشروط الحديّة إذا مُثِّلَت الحمولة العرضانيّة بمتسلسلة فورييه الجيبيّة في المعادلة (5.25)، وبالتالي فهذه الانحرافات هي الحلّ الصحيح (الدقيق) (بدون حاجةٍ إلى تكرار كتابة شكلِه هنا) [5–12].

إذا كانت الحمولة العرضانيّة مجرَّدَ حدٍّ واحدٍ من متسلسلة فورييه، أي:

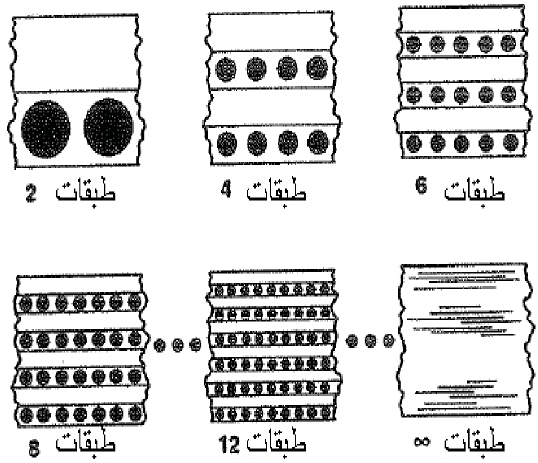
$$p = p_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad (5.50)$$

كحالة m=1, n=1 في الشكل 5-11، فإنه يمكن لحسن الحظّ حلُّ المعادلات التفاضليّة الناظمة والشروط الحديّة بشكلٍ صحيحٍ (دقيق). يمكن التعبير عن A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} في المعادلات (5.49) بدلالة p_{mn} ومعاملات جساءة الصفيحة الطبقيّة بشكلٍ مماثلٍ للمعادلة (5.30). نستنتج أنه من أجل أيّ حمولة عرضانيّة اعتباطية موصوفةٍ عبر متسلسلة فورييه، لا نحتاج إلاّ إلى جمع المساهمات من الحلّ الموافِق للانحراف من أجل كلّ حدّ من المتسلسلة.



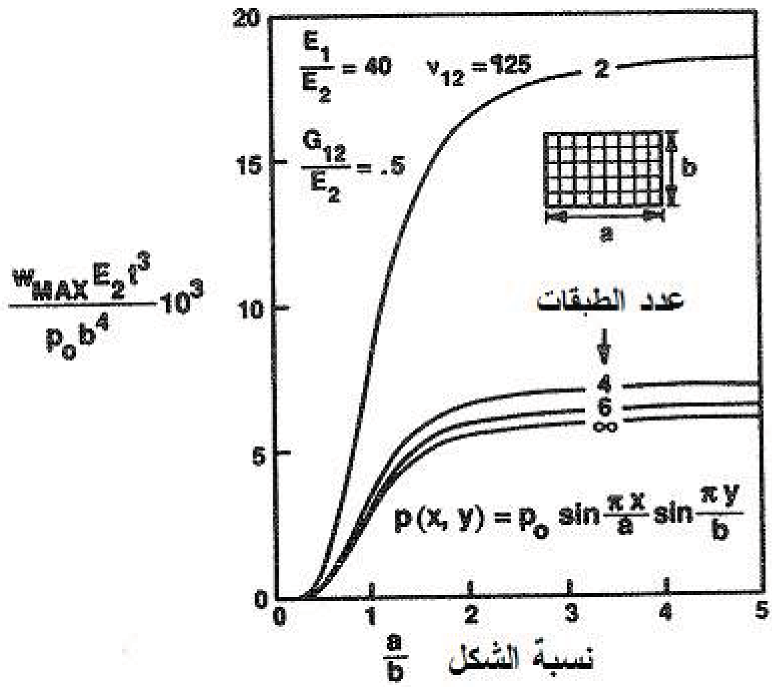
الشكل 5- 11: تحميل عرضاني جيبي للصفيحة

نريد أن ندرس تأثير عدد الطبقات على أداء الصفيحة الطبقيّة. تكمن المقارنةُ العادلةُ في إبقاء سماكة الصفيحة الطبقيّة الكلّيّة ثابتةً لكي نقتصرَ على اعتبار صفائح طبقيّة متساوية الوزن. عندها، نقوم بتغيير عدد الطبقات عبر تقسيم الصفيحة الطبقيّة إلى طبقاتٍ أكثر فأكثر. يعني ذلك أننا ننشئ سلسلة (sequence) من الصفائح الطبقيّة ذات الرقاقات المتصالبة معاكسة التناظر بعددٍ متزايدٍ من الطبقات، ولكن بسماكةٍ ثابتةٍ، كما في الشكل 5-12.



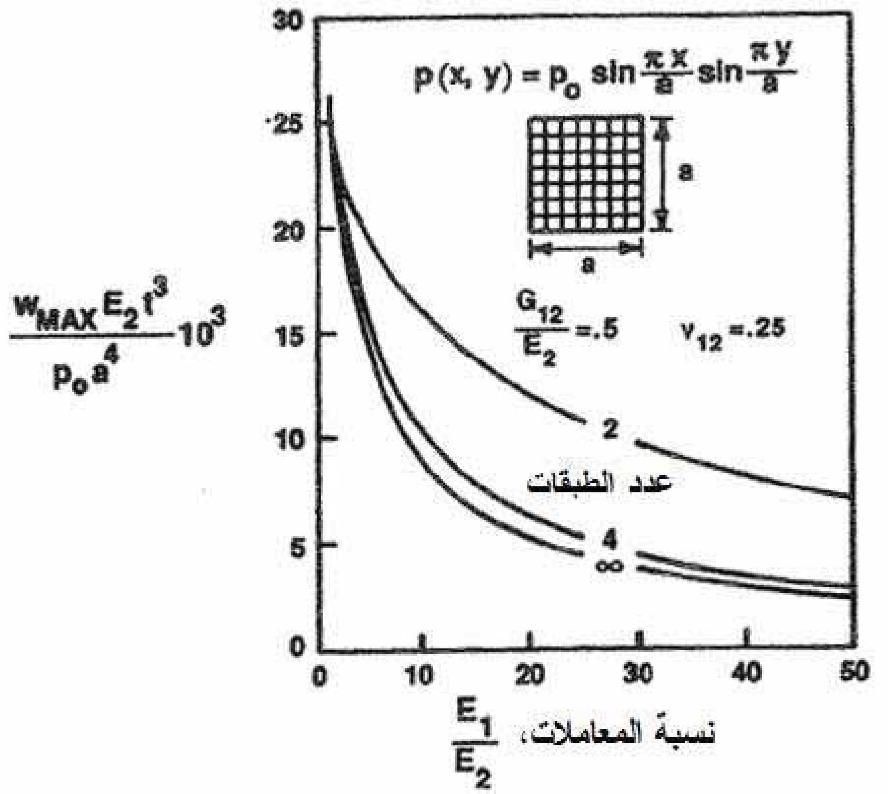
الشكل 5– 12: مثال صفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة معاكسة التناظر

يُقدِّم الشكل 5–13 رسماً بيانيّاً للانحراف الأعظميّ المعيَّر في صفيحةٍ طبقيّةٍ ذات رقاقات متصالبة مستطيلةِ الشكل ومعاكسة التناظر، من غرافيت–إيبوكسي، خاضعةٍ للحمولة العرضانيّة الجيبيّة المُمثَّلة في الشكل 5–11 [m=1, n=1 في المعادلة (5.50)]، من أجل عددٍ من الطبقات مساوٍ لـــ 2، 4، 6 ولقيمةٍ لا نهائيّة. توافِق حالةُ العدد اللامتناهي من الطبقات حلَّ الصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة حيث يتمّ تجاهُل الإقران انحناء– استطالة. أمّا من أجل الصفيحة ثنائيّة الطبقة، فإن إهمالَ نتائجَ الإقران انحناء– استطالة يؤدّي إلى توقع قاصرٍ للانحراف أقلّ من المألوف بمقدار 64%؛ أي أن الانحناء الحقيقي أكبر بحوالى ثلاث مرّات منه في حالةِ تقريب الصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة**!** من الواضح أن تأثير الإقران انحناء – استطالة في الانحرافات يتخامد سريعاً مع تزايُد عدد الطبقات، بغضّ النظر عن قيمة النسبة الباعية a/b للصفيحة. يعني ذلك أن التقاربَ سريعٌ نحو حلِّ الصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة. مع ذلك، لا يمكن تجاهُل الإقران بدون حدوث خطأٍ جسيمٍ إلاّ في حالة وجودِ أكثر من ستّ طبقات.



الشكل 5- 13: انحراف صفيحة متعددة الطبقات متصالبة معاكسة التناظر تحت حمل جيبي عرضاني

في كثيرٍ من الموادّ المُركَّبة متعددة الطبقات، يعتمد أثر الإقران "انحناء- استطالة" في انحرافات الصفيحة بشكلٍ أساسيّ على نسبة المعاملَين ثلاثيَّي المناحي E_1/E_2. لقدّ ثُبّتت قيمَ G_{12}/E_2 وυ_{12} في هذا المثال بسبب كون تأثير تغيّرها في الانحرافات صغيراً جداً مقارنةً بذاك لــ E_1/E_2. عندما يكون $E_1/E_2=1$ في الشكل 5- 14، فإن أثرَ الإقران "انحناء- استطالة" غير موجود، تماماً كما ينبغي له أن يكون. عندما تزداد قيمة E_1/E_2، يزداد تأثيرُ الإقران "انحناء- استطالة". وهكذا، لا تفوق الانحرافات في صفيحةٍ ثنائيّة الطبقة من بورون- إيبوكسي ($E_1/E_2=10$) مثيلاتها في تقريب الصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة بمقدارٍ كبيرٍ، كما هو الحال في صفيحة ثنائيّة الطبقة من غرافيت-إيبوكسي ($E_1/E_2=40$).



الشكل 5- 14: انحناء صفيحة مربعة متعددة الطبقات متصالبة و معاكسة التناظر تحت حمل جيبي عرضاني (عن ويتني ولايسا [5-12])

4.3.5 الصفائح متعددة الطبقات ذات الرقاقات المائلة معاكسة التناظر

تم في الفقرة 3.3.4 وصف الصفائح متعددة الطبقات ذات الرقاقات المائلة معاكسة التناظر (antisymmetric angle-ply laminated plates) والتوصل إلى أن لها معاملات جساءة استطالة A_{11}, A_{12}, A_{22}, وA_{66}؛ ومعاملات جساءة إقران انحناء–استطالة B_{16}, B_{26}، ومعاملات جساءة انحناء D_{11},D_{12},D_{22} وD_{66}. وهكذا، تُبدي هذه الصفيحة الطبقيّة نوعاً مختلفاً من الإقران انحناء–استطالة عمّا تُبديه الصفيحة الطبقيّة ذات الرقاقات المتصالبة معاكسة التناظر. إن معادلات التوازن التفاضليّة الناظِمة والمرتبطة ببعضها البعض، هي:

$$A_{11}u_{,xx} + A_{66}u_{,yy} + (A_{12} + A_{66})v_{,xy} - 3B_{16}w_{,xxy} - B_{26}w_{,yyy} = 0 \qquad (5.51)$$

$$(A_{12}+A_{66})u_{,xy}+A_{66}v_{,xx}+A_{22}v_{,yy}-B_{16}w_{,xxx}-3B_{26}w_{,xyy}=0 \quad (5.52)$$

$$D_{11}w_{,xxxx}+2(D_{12}+2D_{66})w_{,xxyy}+D_{22}w_{,yyyy}-B_{16}(3u_{,xxy}-v_{,xxx})-B_{26}(u_{,yyy}+3v_{,xyy})=p \quad (5.53)$$

قام ويتني بحلّ هذه المسألة من أجل الشرط الحدّي S3 الموافِق للحافة بسيطة الإستناد [5.13 و5.14] (تذكّر أنه تمّ استعمال الشرط S2 من أجل الصفائح متعددة الطبقات ذات الرقاقات المتصالبة معاكسة التناظر في الفقرة 3.3.5):

$$x=0, a:\ w=0\quad M_x=B_{16}(u_{,y}+v_{,x})-D_{11}w_{,xx}-D_{12}w_{,yy}=0 \quad (5.54)$$

$$u=0\quad N_{xy}=A_{66}(u_{,y}+v_{,x})-B_{16}w_{,xx}-B_{26}w_{,yy}=0 \quad (5.55)$$

$$y=0, b:\ w=0\quad M_y=B_{26}(u_{,y}+v_{,x})-D_{12}w_{,xx}-D_{22}w_{,xx}-D_{22}w_{,yy}=0 \quad (5.56)$$

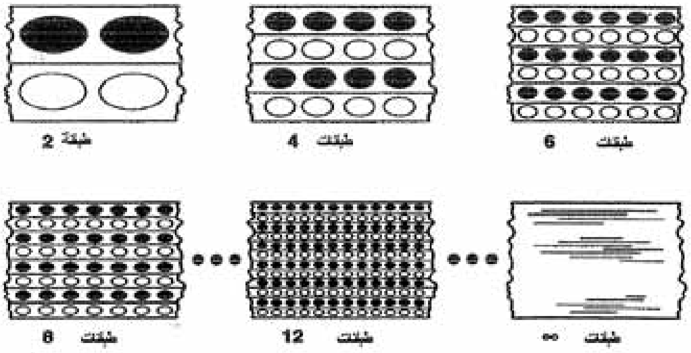
$$v=0\quad N_{xy}=A_{66}(u_{,y}+v_{,x})-B_{16}w_{,xx}-B_{26}w_{,yy}=0 \quad (5.57)$$

لاحظ بعدها أن الانحرافات المُعطاة بـــ:

$$u=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$
$$v=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}B_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (5.58)$$
$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

تحقِّق بشكل متطابق المعادلات التفاضليّة الناظِمة والشروط الحديّة إذا كانت الحمولة العرضانيّة مُمثَّلةً بمتسلسلة فورييه الجيبيّة في المعادلة (5.25)، فهي إذاً الحلول الصحيحة. وهكذا، يمكن التعبير عن A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} في المعادلة (5.58) بدلالة p_{mn} ومعاملات جساءة الصفيحة الطبقيّة بشكلٍ مماثلٍ للمعادلة (5.30). بعد ذلك، ومن أجل حمولةٍ عرضانيّة إعتباطية موصوفةٍ عبر متسلسلة فورييه الجيبيّة، ما علينا إلا أن نجمع المساهمات من حلّ الانحراف من أجل كلّ حدّ من المتسلسلة.

لكي ندرس تأثر عدد الطبقات في أداء الصفيحة الطبقيّة، ننشئ متتاليةً (Sequence) من الصفائح الطبقيّة ذات الرقاقات المائلة متساوية الأوزان (ثابتة السماكة)، مع عدد متزايد من الطبقات، كما في الشكل 5−15.



الشكل 5- 15: مثال صفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة معاكسة التناظر

يبيّن الشكلُ 5-16 نتائجَ الانحراف الأعظمي من أجل صفيحة طبقيّة من غرافيت-إيبوكسي موافِقةٍ لـــ:

$$\frac{E_1}{E_2} = 40 \qquad \frac{G_{12}}{E_2} = .5 \qquad \nu_{12} = 0.25 \quad (5.59)$$

كدالة لزاوية ميل الرقاقة من أجل الحمولة العرضانيّة الجيبيّة:

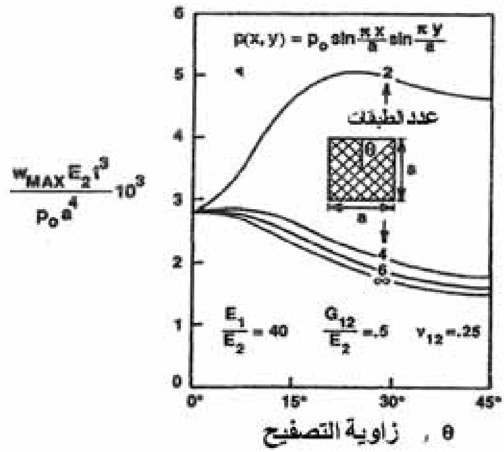
$$P = P_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{a} \quad (5.60)$$

يكون سلوكُ الانحراف متناظراً حول الزاوية θ=45°، أي أن الانحراف الأعظمي من أجل θ=30° مساوٍ له من أجل θ=60°، وهكذا. من الواضح أن الإقران انحناء-استطالة يكون مهماً جداً في الصفائح الطبقيّة ثنائيّة الطبقة، ولكن أهمّيّتَه تتناقص سريعاً بازدياد عدد الطبقات، ليختفيَ تقريباً عندما تمتلك الصفيحة الطبقية ثماني أو عشرَ طبقاتٍ. من الواضح أنه من أجل سماكة ثابتةٍ للصفيحة الطبقيّة، فإن معاملات جساءة الإقران انحناء-استطالة المُعطاة بالعلاقة:

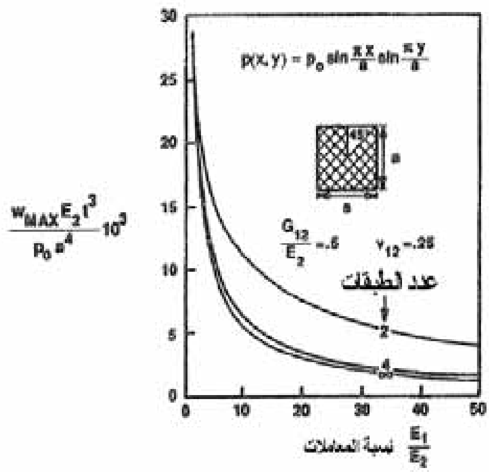
$$\left(B_{16}, B_{26}\right) = \left(Q_{16}, Q_{26}\right)\frac{t^2}{2N} \quad (5.61)$$

تتناقص بازدياد N، وهكذا يتضح مصدرُ التغيُّر في تأثير الإقران انحناء- استطالة.

يُبيّن الشكل 5-17 نتائجَ موافِقةً لصفيحةٍ مربّعةِ الشكل، خاضعةٍ لحمولة عرضانيّة جيبيّة مع نسبةِ معاملات E_1/E_2 متغيّرة، وزاوية تصفيح مساوية لــ$\pm 45°$. يلاحظ هنا أن تأثير الإقران الانحناء- استطالة في الانحرافات مهمّ من أجل جميع قيم نسبة المعاملات، باستثناء تلك القريبة جداً من القيمة $E_1/E_2=1$.



الشكل 5- 16: انحراف صفيحة مربعة متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة وتحت حمل جيبي عرضاني



الشكل 5- 17: انحراف صفيحة مربعة متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة وتحت حمل جيبي عرضاني

مجموعة المسائل 3.5:

1.3.5 استنتج المعادلة (5.30).

2.3.5 تحقّق من صحّة المعادلة (5.31).

3.3.5 احصل على المعامِلات A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} في المعادلة (5.49).

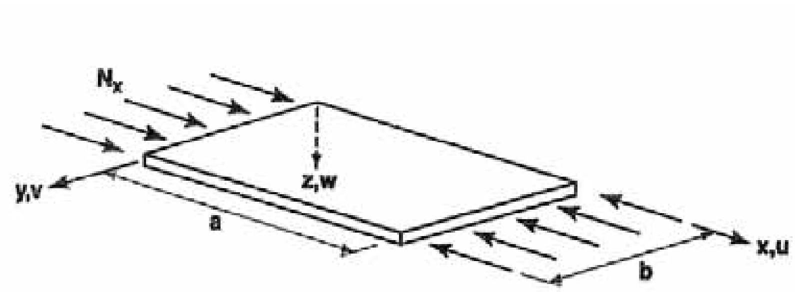
4.3.5 كيف تتغيّر المعامِلات $A_{11},A_{22},D_{11},D_{22}$ بتزايُد عدد الرقاقات في مثال الصفائح الطبقيّة ذات الرّقاقات المتصالبة معاكسة التناظر في الشكل 5−12؟

5.3.5 احصل على المعامِلات A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} في المعادلة (5.58).

6.3.5 كيف تتغيّر المعامِلات $A_{11},A_{22},D_{11},D_{22}$ بتزايُد عدد الرقاقات في مثال الصفائح الطبقيّة ذات الرّقاقات المائلة معاكسة التناظر في الشكل 5−15؟

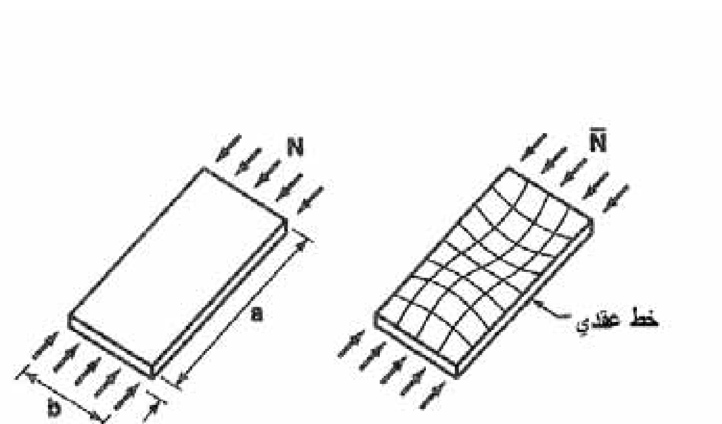
4.5 انبعاج الصفائح متعددة الطبقات بسيطة الاستناد والخاضعة لحمولةٍ في المستوي

لنعتبر الفئة العامّة من الصفائح المستطيلة متعددة الطبقات بسيطة الاستناد عند الحواف $x=0, x=a, y=0, y=b$، والخاضعة لقوّة منتظَمةٍ في المستوي وفق الاتّجاه x كما في الشكل 5−18 يمكن كذلك معالَجةُ حالاتِ حمولات وشروط حدّية أخرى أكثرَ تعقيداً. مع ذلك، تتوضّح جيّداً أهميّةُ معاملات الجساءة المتنوّعة في مسائل الانبعاج من خلال هذا التحميل البسيط. يمكن العودةُ إلى معالَجاتٍ أكثر شموليّةً لانبعاج الصفيحة في الحالة العامّة عند تيموشينكو وغير Gere [5−15]، وفي الحالة خاصة لانبعاج الصفيحة متعددة الطبقات عند ويتني [5−1].



الشكل 5- 18: صفيحة مستطيلة متعددة الطبقات بسيطة الاستناد تحت ضغط محوري منتظم في المستوي

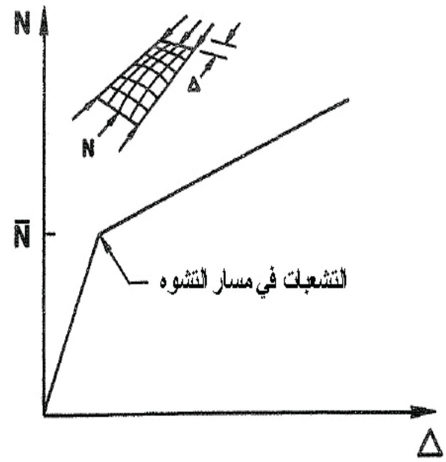
عندما تتبعج الأعمدة، ينشأ – كما هو معروف – انفعال جانبيّ على طول العمود. عندما تتبعج الصفائح، يكون للانفعال العرضاني بالنسبة إلى مستوى الصفيحة طبيعةٌ موجيّةٌ ثنائيّة البعد. فوق ذلك، تمتلك الطبيعة ثنائية البعد موجاتٍ جيبيّةً متعدّدةً في اتّجاه الحمولة، كما يُبيّن الشكل 5-19 في مثالِ حالةِ موجتَي انبعاج. بشكلٍ عامّ، إذا كانت الصفيحةُ طويلةً جداً في اتّجاه الحمولة، فإنه تنشأ عدّة موجاتٍ جيبيّة. لاحظ أن الخطّ العقْديّ (Nodal) في الشكل 5-19 لا يتحرّك أثناء الانبعاج.



الشكل 5- 19: نمط انبعاج صفيحة بسيطة الاستناد نموذجية

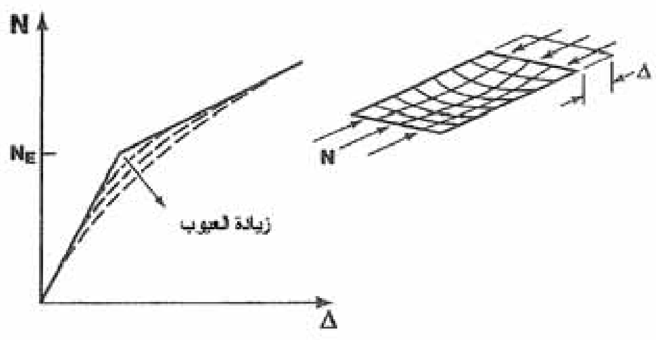
إن سلوكَ الحمولة – انفعال في الصفائح أعقدُ منه في الأعمدة. أوّلاً، كلّما ازدادت الحمولة، فإن طول الصفيحة ينقص ببساطة في اتّجاه الحمولة مع بقائها مستويةً.

بعد ذلك، تتبعج الصفيحةُ عند $\bar{N}$، حيث يتشعب مسار انفعال (يسلك مساراً واحداً من بين اثنَين) من الشكل المستوي إلى الشكل المنبعج في الشكل 5–20. يمكن للصفيحة بعد الانبعاج أن تتحمّل، في الواقع، حمولةً أكبرَ من حمولة الانبعاج، ولكن مع قيم جساءة أقلّ، كما يبيّن الشكل 5–20 بخلاف ذلك، لا تستطيع الأعمدة احتمالَ أيّ حمولةٍ تتجاوز حمولةَ الانبعاج. وهكذا، يُظهر العنصران الإنشائيَّان معنيين مختلفين تماماً بالنسبة إلى حمولة الانبعاج، فهذه تعني الحمولةَ الأعظميّة بالنسبة إلى واحدٍ منهما (العمود)، بينما لا تعني بالنسبة إلى الآخر (الصفيحة) إلاّ انقطاعاً في سلوك الحمولة– انفعال (تغيُّر في الميل يُدعى بالركبة).



الشكل 5– 20: سلوك الحمل– تشوه لصفيحة محملة في المستوي

لا تحدث هذه الركبةُ في منحنى الحمولة – انفعال لصفيحةٍ إلاّ إذا كانت هذه الأخيرةُ مستويةً تماماً قبل الانبعاج. أمّا من أجل الصفائح ذات المقادير (magnitudes) المتزايدة للعيوب الابتدائيّة، فإن الركبة تستدير وتغدو ملساءَ، كما ينخفض منحنى الحمولة–انفعال، كما في الشكل 5–21.



الشكل 5– 21: انبعاج الصفائح مع زيادة العيوب الابتدائية

سيتم تعيين قيمةَ حمولة الانبعاج في صفائح ذات طرائق تصفيح متنوّعة: ثلاثيّة المناحي خاصة، متناظرة وذات رقاقات مائلة، معاكسة التناظر وذات رقاقات متصالبة، معاكسة التناظر وذات رقاقات مائلة. سوف تتمّ مقارنةُ النتائج الموافِقة لطرائق التصفيح المختلفة من أجل إيجاد أثرَي الإقران انحناء– فتل والإقران انحناء– استطالة. وكما كان الحال في مسائل الانحراف في الفقرة 3.5، سيتم استعمال شروط حدّية مختلفةً موافقةً لحافة بسيطة الاستناد في المسائل العديدة المطروقة من أجل تسهيل الإيضاح.

1.4.5 الصفائح متعددة الطبقات ثلاثيّة المناحي خاصة

تمتلك الصفيحة الطبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصة إمّا طبقةً وحيدةً من مادّةٍ ثلاثيّة المناحي خاصّة أو عدّةَ طبقاتٍ ثلاثيّة المناحي خاصّة تُنضد بشكلٍ متناظِر حول السطح الأوسط للصفيحة الطبقيّة (لكي تُشكِّل صفيحةً طبقيّةً متناظرة ذاتَ رقاقات متصالبة). في كلتا الحالتَين، تتألّف معاملات جساءة الصفيحة الطبقيّة فقط من $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66},$ D_{11}, D_{12}, D_{22} و D_{66}. يعني ذلك أنْ لا يحصل إقران قصّ– استطالة أو إقران انحناء– فتل، ولا إقران انحناء– استطالة كذلك. بعد ذلك، ومن أجل مسائل الصفيحة– تتحدّد حمولاتُ الانبعاج بواسطة معادلةِ انبعاجٍ تفاضليّة واحدةٍ فقط:

$$D_{11}\delta w_{,xxxx} + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\delta w_{,xxyy} + D_{22}\delta w_{,yyyy} + \overline{N}_x \delta w_{,xx} = 0 \quad (5.62)$$

وتكون خاضعةً للشروط الحديّة الموافِقة لحافةٍ بسيطة الاستناد:

$$x=0, a: \quad \delta M_x = -D_{11}\delta w,_{xx} - D_{12}\delta w,_{yy} = 0 \tag{5.63}$$
$$y=0, b: \quad \delta M_y = -D_{12}\delta w,_{xx} - D_{22}\delta w,_{yy} = 0$$

لاحظ أنه بسبب غياب التغيّرات في الانزياحات ضمن المستوي δu وδv، فإن الشروط الحديّة هنا أبسط بكثير من الحالة العامّة في المعادلة (5.20).

إن حلَّ هذه المعادلة التفاضليّة من المرتبة الرابعة مع الشروط الحديّة المتجانسة الموافِقة بسيطٌ كما في حالة مسألة الانحراف المشابهة في الفقرة 1.3.5 تتحقّق الشروط الحديّة بالتغيُّر في الانزياحات الجانبيّة (في حالة الصفائح، يعبِّر δw فعلاً عن انزياح الانبعاج الفيزيائي لأن w=0 في حالة الغشاء السابِق للانبعاج؛ ومع ذلك تُمثِّل δu و δv تغيُّراتٍ عن حالةِ توازُنٍ غير عادية. وبالتالي، نُبقي على الترميز التغيُّراتي الأكثر دقّةً واتساقاً):

$$\delta w = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \tag{5.64}$$

حيث m وn عدد أنصاف أطوال موجة الانبعاج في الاتجاهَين x وy على التوالي. بالإضافة إلى ذلك، تتحقّق المعادلةَ التفاضليّةَ الناظِمةَ بواسطة المعادلةُ (5−64) إذا كان:

$$\overline{N}_x = \pi^2 \left[D_{11}\left[\frac{m}{a}\right]^2 + 2(D_{12}+2D_{66})\left[\frac{n}{b}\right]^2 + D_{22}\left[\frac{n}{b}\right]^4\left[\frac{a}{m}\right]^2 \right] \tag{5.65}$$

من الواضح أن أصغرَ قيمةٍ لـــ $\overline{N}_x$ تحدث عندما n=1، وهكذا يتم اختزال عبارة حمولة الانبعاج إلى:

$$\overline{N}_x = \pi^2 \left[D_{11}\left[\frac{m}{a}\right]^2 + 2(D_{12}+2D_{66})\left[\frac{1}{b^2}\right] + D_{22}\left[\frac{1}{b^4}\right]\left[\frac{a}{m}\right]^2 \right] \tag{5.66}$$

أمّا القيمةُ الأصغريّة لـــ $\overline{N}_x$ من أجل قيمٍ متعددة لـــ m فهي غير واضحة، ولكنها تتغيّر من أجل قيمٍ مختلفةٍ لمعاملات الجساءة وللنسبة الباعية (Aspect Ratio) a/b للصفيحة.

على سبيل المثال، إذا كان لدينا $D_{11}/D_{22}=10$ و $(D_{12}+2D_{66})/D_{22}=1$ (قيم مُمثِلة للبورون− إيبوكسي) فإن المعادلةَ (5.66) تصبح:

$$\overline{N}_x = \pi^2 D_{22} \left[10\left[\frac{m}{a}\right]^2 + \frac{2}{b^2} + \left[\frac{a}{m}\right]^2 \frac{1}{b^4} \right] \tag{5.67}$$

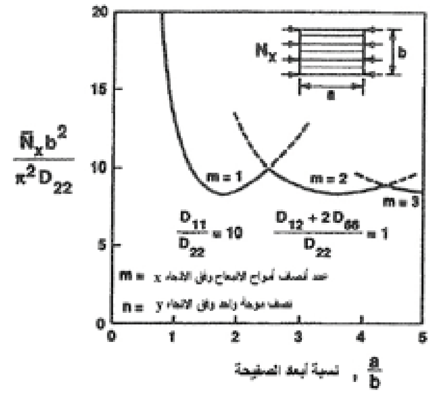
التي تُرسم في الشكل 5−22 بدلالة النسبة الباعية للصفيحة. وهنا، من أجل نسبة باعية صغيرةٍ للصفيحة (أي a/b<2.5)، تتبعج الصفيحةُ وفق نصف موجة في الاتّجاه x. على سبيل المثال، تُعطى حمولةُ الانبعاج لصفيحة مربّعة بالعلاقة:

$$\overline{N}_x = \frac{13\pi^2 D_{22}}{b^2} \tag{5.68}$$

عندما تزداد قيمةُ النسبة الباعية للصفيحة، فإن هذه الأخيرة تتبعج وفق أنصاف موجة انبعاج أكثر فأكثر في الاتجاه x، ويصبح منحنى $\bar{N}_x$ بدلالة a/b أكثرَ تسطحاً، إذ يقترب في الحقيقة من:

$$\overline{N}_x = \frac{8.32456\ \pi^2 D_{22}}{b^2} \tag{5.69}$$

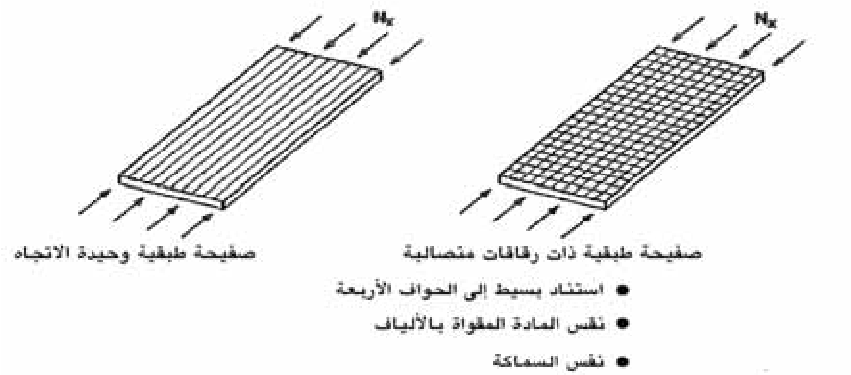
من أجل الموادّ الأخرى، يتمّ الحصول على عائلاتِ منحنيات أخرى −كتلك التي يبيّنها الشكل 5−22 مع قيم حمولات انبعاج موافِقة مختلفة ونقاط تبدُّلٍ مختلفة من نمطٍ انبعاجٍ إلى آخر.



الشكل 5− 22: انبعاج صفائح مستطيلة متعددة الطبقات ثلاثية المناحي خاصة تحت ضغط منتظم، N_X

نحن الآن جاهزون للتعرّض للسؤال المطروح في الشكل 5−23 لنعتبرْ صفيحتَين مستطيلتَي الشكل متساويتي السماكة وبسيطتي الاستناد في جميع الحواف الأربعة، ومن نفس المادّة المُقوّاة بالألياف. تتكوّن إحدى الصفيحتَين في مجملها من مادّة محوريّة (أحاديّة الاتجاه) مع ألياف في اتجاه الحمولة، بينما تحوي الصفيحةُ الأخرى الطبقاتِ نفسَها، ولكن وفق تنضيد متناوِب على شكل صفيحةٍ طبقيّةٍ متناظرةٍ ذاتِ رقاقات

متصالبة. قد يظنّ – أو يتوقّع– الكثير أن الصفيحةَ ذات العدد الأكبر من الألياف وفق اتّجاه الحمولة سوف تمتلك حمولةُ انبعاجٍ أكبر. مع ذلك، يعتمد هذا الرأي على فرضيّة اعتماد حمولة الانبعاج بشكلٍ أساسيّ على مقاومة الانحناء في اتّجاه الحمولة. ولكن حمولة الانبعاج للصفيحة دالة لكل معاملات ــ جساءة الانحناء الأربعة $D_{11}, D_{12}, D_{22},$ D_{66} كما تُبيّن المعادلة (5.66). وهكذا، ينبغي عدم الدهشة من أن الصفيحة ذات الرقاقات المتصالبة تمتلك مقاومة انبعاجٍ أكبر من الصفيحة المقوّاة محوريّاً. في الحقيقة، يعني الاستناد على جميع الحواف الأربعة للصفيحة أن هذه الأخيرة لا يمكنها أن تنفعل ببساطة مثل عمودٍ عريض (كما تكون الصفيحة التي تستند فقط إلى الحافتين المُحمَّلَتين). بالتأكيد، سوف تهيمن جساءةُ الانحناء في اتجاه الحمولة على سلوك العمود العريض.



الشكل 5– 23: أي الصفيحتين تمتلك حمل الانبعاج الأعلى؟

2.4.5 الصفائح متعددة الطبقات المتناظرة ذات الرقاقات المائلة

بيّنت الفقرة 2.3.4 أن الصفائح الطبقيّة المتناظرة ذات الرقاقات المائلة توصف بواسطة مصفوفةٍ كاملةٍ من معاملات جساءة الاستطالة، وكذلك من معاملات جساءة الانحناء، ولكن بدون وجودِ إقران انحناء– استطالة. يتمثّل الاختلاف الأساسيّ بين هذه الصفائح الطبقيّة والصفائح الطبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصة في إدخال معاملات جساءة الإقران انحناء– فتل D_{16} و D_{26} هنا (تُعَدّ معاملات جساءة الإقران قصّ–استطالة A_{16} وA_{26} غيرَ هامّةٍ من أجل الانبعاج في الصفيحة متعددة الطبقات المتناظرة، لأن المعادلات التفاضليّة الثلاث الناظِمة تكون منفصلةً عن بعضها البعض). وفقاً لذلك، تكون المعادلة التفاضليّة الناظِمة للانبعاج:

$$D_{11}\delta w_{,xxxx} + 4D_{16}\delta w_{,xxxy} + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\delta w_{,xxyy} \qquad (5.70)$$
$$+ 4D_{26}\delta w_{,xyyy} + D_{22}\delta w_{,yyyy} + \overline{N}_x \delta w_{,xx} = 0$$

وبفعل الشروط الحديّة للحافة بسيطة الاستناد:

$$x=0,\quad a: \delta w = 0 \quad \delta M_x = -D_{11}\delta w_{,xx} - D_{12}\delta w_{,yy} - 2D_{16}\delta w_{,xy} = 0 \qquad (5.71)$$
$$b: \delta w = 0 \quad \delta M_x = -D_{12}\delta w_{,xx} - D_{22}\delta w_{,yy} - 2D_{26}\delta w_{,xy} = 0$$
$$y=0,$$

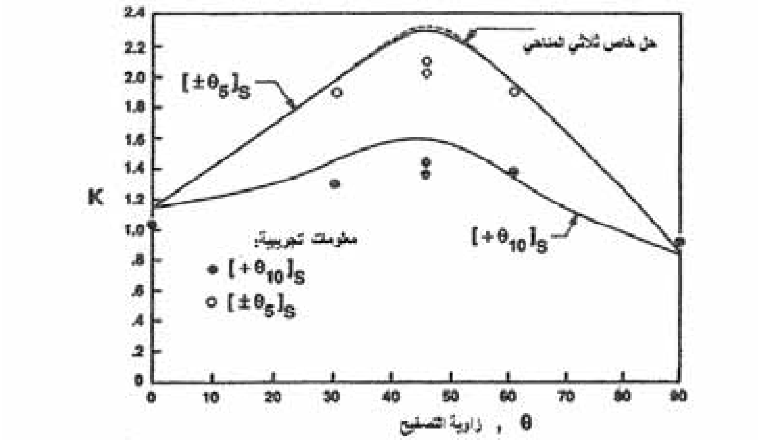
يجعل وجودُ D_{16} وD_{26} في المعادلات التفاضليّة الناظِمة والشروط الحديّة إمكانيّةَ إيجادِ شكلٍ مغلق للحلّ مستحيلةً. يعني هذا الأمر – وبشكلٍ مشابهٍ لانحناء الصفائح متعددة الطبقات المتناظرة ذات الرقاقات المائلة – أن التغيُّرَ في الانزياح الجانبيّ δw لا يمكن فصله لجداء دالة لـــ x وحده بدالة لـــ y فقط، كما في المعادلة (5.64). مع ذلك – ومرّة أخرى بالتشابه مع حالة انحناء الصفائح متعددة الطبقات المتناظرة ذات الرقاقات المائلة – تمّ الحصول على حلّ رايلي–ريتز التقريبي من قِبَل أشتون (Ashton) ووادوبس (Waddoups) [5–16] (أو – بشكلٍ مكافئ– حلّ غاليركِن كما قدّمه شاميس Chamis [5–17]) عبر تعويض التغيّر في عبارة الانزياح الجانبي:

$$\delta w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (5.72)$$

في عبارة التغيُّر الثاني للطاقة الكامنة الكلّيّة، ثم جعْلِها واقفة بالنسبة إلى A_{mn}. لاحظ أن المعادلة (5.72) تحقّق الشروط الحديّة الهندسيّة للمسألة (δw=0 في جميع الحواف)، ولكنها لا تحقق الشروط الحديّة الطبيعيّة ($\delta M_n=0$ على جميع الحواف) أو المعادلات التفاضليّة، وبالتالي يمكن للنتائج أن تتقارب، ولكن ببطءٍ نحو الحلّ الحقيقي.

ليست إجرائيّة إيجاد الحلّ الحقيقي إلاّ عارضيّةً بالنسبة إلى الأهداف الحاضرة، ولذلك سوف نكتفي بعرض النتائج بالنسبة إلى عدّة صفائح طبقيّة من البورون– إيبوكسي حيث $E_1/E_2=10,\ G_{12}/E_2=0.3,\ \upsilon_{12}=3$ يُقدِّم الشكل 5–24 رسوماتٍ بيانيّةً لحمولات الانبعاج المعيَّرة من أجلِ ثلاثِ صفائحَ طبقيّةٍ، واحدةٍ من 20 طبقة وبزاوية +θ، وثانيةٍ من 20 طبقة متناوبة بزاوية ±θ، أمّا الثالثة فهي التقريب ثلاثي المناحي خاصة. تستعمل منحنيات رايلي– ريتز 49 حدّاً (m=7, n=7). يُبيّن الشكل 5–24 أيضاً نتائجَ ماندِل (Mandell) التجريبيّةً [5–18]، حيث يتبين بوضوحٍ أن الاتّفاق بين النظريّة والتجربة مُرضٍ جداً. يبدو أن الإقران انحناء– فتل مهمٌ في مسائل الانبعاج كأهمّيته في مسائل

الانحناء. يكمن التأثير الرئيسي للإقران انحناء- فتل في تخفيض حمولة الانبعاج عن القيمة التي كان سيتم الحصول عليها في التقريب ثلاثيّ المناحي الخاصّ. وهكذا لا يكون التقريب ثلاثيّ المناحي خاصّ محافظاً في تطبيقات التصميم. لا توجد – وفقاً لمعرفة المؤلِّف- نتائجُ تشابُهٍ الصفيحة متخالفة التناظر من أجل انبعاج الصفيحة، مقابل مسألة الانحناء.



الشكل 5- 24: حمولات الانبعاج لصفائح مستطيلة متناظرة ذات رقاقات مائلة تحت ضغط منتظم، N_x (عن ويتني Whitney [1-5])

3.4.5 الصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة

تبيّن في الفقرة 3.3.4 أن الصفائح الطبقيّة معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة تتمتع بمعاملات جساءة استطالة A_{11}, A_{12}, $A_{22}=A_{11}$ وA_{66}؛ ومعاملات جساءة إقران انحناء- استطالة B_{11} و $B_{22}=-B_{11}$ ومعاملات جساءة انحناء D_{11}, D_{12}, $D_{22}=D_{11}$ وD_{66}. مقارنةً بالصفيحة الطبقية الخاصة، تكون الحدّي الجديدة هنا B_{11} و B_{22}. وبسبب هذا الإقران انحناء-استطالة، تكون معادلات الانبعاج التفاضليّة الثلاث مرتبطةً ببعضها البعض:

$$A_{11}\delta u_{,xx} + A_{66}\delta u_{,yy} + \left(A_{12} + A_{66}\right)\delta v_{,xy} - B_{11}\delta w_{,xxx} = 0 \qquad (5.73)$$

$$\left(A_{12} + A_{66}\right)\delta u_{,xy} + A_{66}\delta V_{,xx} + A_{11}\delta v_{,yy} + B_{11}\delta w_{,yyy} = 0 \qquad (5.74)$$

$$D_{11}\left(\delta w_{,xxxx} + \delta w_{,yyyy}\right) + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\delta w_{,xxyy} - B_{11}\left(\delta u_{,xxx} + \delta v_{,yyyy}\right) + \overline{N}_x \delta w_{,xx} = 0 \qquad (5.75)$$

قام جونز (Jones) بحلّ هذه المسألة من أجل الشرط الحدّي S2 الموافِق لحافة بسيطة الاستناد [19.5]:

$$x=0,\ a:\quad \delta w=0 \qquad \delta M_x = B_{11}\delta u,_x - D_{11}\delta w,_{xx} - D_{12}\delta w,_{yy} = 0 \qquad (5.76)$$

$$\delta v = 0 \qquad \delta N_x = A_{11}\delta u,_x + A_{12}\delta v,_y - B_{11}\delta w,_{xx} = 0 \qquad (5.77)$$

$$y=0,\ b:\quad \delta w=0 \qquad \delta M_y = -B_{11}\delta v,_y - D_{12}\delta w,_{xx} - D_{11}\delta w,_{yy} = 0 \qquad (5.78)$$

$$\delta u = 0 \qquad \delta N_y = A_{12}\delta u,_x - A_{11}\delta v,_y + B_{11}\delta w,_{yy} = 0 \qquad (5.79)$$

وتأكّد من أن التغيُّرات في الانحرافات:

$$\begin{aligned}
\delta u &= \bar{u}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}\\
\delta v &= \bar{v}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \qquad (5.80)\\
\delta w &= \bar{w}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}
\end{aligned}$$

تُحقِّق معاً الشروطَ الحديّة والمعادلاتِ التفاضليّةَ الناظمة، إذا كانت حمولة الانبعاج:

$$\overline{N}_x = [\frac{a}{m\pi}]^2\left[T_{33} + \frac{2T_{12}T_{23}T_{13} - T_{22}T_{13}{}^2 - T_{11}T_{23}{}^2}{T_{11}T_{22} - T_{12}{}^2}\right] \qquad (5.81)$$

حيث:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= A_{11}\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + A_{66}\left[\frac{n\pi}{b}\right]^2\\
T_{12} &= \left(A_{12} + A_{66}\right)\left[\frac{m\pi}{a}\right]\left[\frac{n\pi}{b}\right]\\
T_{13} &= -B_{11}\left[\frac{m\pi}{a}\right]^3\\
T_{22} &= A_{11}\left[\frac{n\pi}{b}\right]^2 + A_{66}\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 \qquad (5.82)\\
T_{23} &= B_{11}\left[\frac{n\pi}{b}\right]^3\\
T_{33} &= D_{11}\left[\left[\frac{m\pi}{a}\right]^4 + \left[\frac{n\pi}{b}\right]^4\right] + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2\left[\frac{n\pi}{b}\right]^2
\end{aligned}$$

لاحظ أنه إذا كان B_{11} معدوماً، يكون T_{13}وT_{23} مُساويَين أيضاً للصفر، وبالتالي تُختزَل المعادلة (5.81) إلى الحلّ الموافِق للصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة، المعادلة (5.65)− شريطةَ أن يكون $D_{11}=D_{22}$. بما أن T_{11}, T_{12}, T_{22} دالات لكلا m وn، لا يمكن الحصول على استنتاجٍ بسيطٍ عن قيمة n عند الانبعاج، كما كان الحال في الصفائح متعددة الطبقات ثلاثيّة المناحي خاصة حيث تم تحديد أن هذه الـــ n مساويةٌ للواحد. بدلاً من ذلك، تمثّل المعادلةُ (5.81) دالةً معقَّدةً لكلا m وn. تذكّر عند هذه النقطة المناقشةَ في الفقرة 3.5.3 عن الاختلاف في إيجاد قيمةٍ أصغريّة بين دالة لعدّة متغيرات متقطّعة ودالة لمتغيرات مستمرّة. رأينا سابقاً أن الصفائح تنبعج، ويكون عدد الانبعاجات صغيراً. كنتيجةٍ لذلك، ينبغي إيجادُ حمولة الانبعاج الأصغريّة في المعادلة (5.81) عبر إجرائيّة بحثٍ تعود إلى جونز، وتتضمّن قيماً صحيحةً لــ m وn [5.20]، وليس عبر مُساواةِ المشتقات الجزئيّة الأولى لــ $\bar{N}_x$ بالنسبة إلى m وn بالصفر.

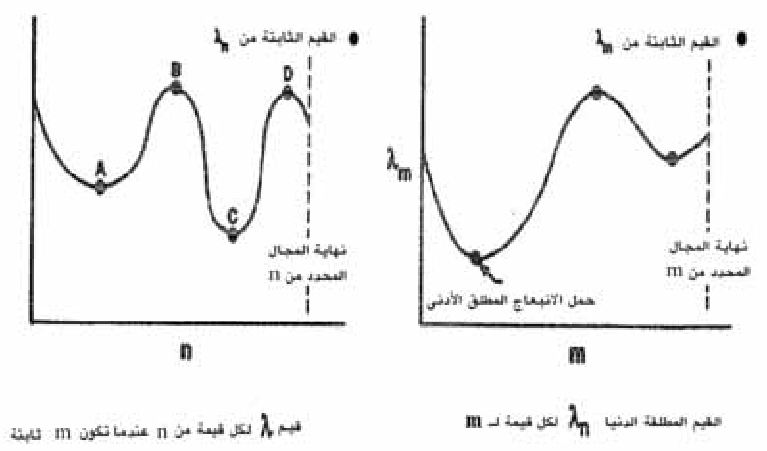
تكمن إحدى أهمّ التعقيدات في حلّ مسألة انبعاج الصفيحة في الحاجة لتقصّي تأثير شكل نمط الانبعاج على حمولة الانبعاج نفسها. يعني ذلك أن حمولةَ انبعاج الصفيحة في المعادلة (5.81) دالة لمعاملات شكل نمط الانبعاج m وn، وأيضاً دالة لمعاملات جساءة الصفيحة متعددة الطبقات. على خلاف ذلك، من المؤكَّد أنه يمكن التعبير عن حمولة انبعاج العمود بدلالة معامل شكل نمط الانبعاج m ، أي:

$$p = m^2\pi^2 \frac{El}{L^2} \tag{5.83}$$

مع ذلك، بما أن اهتمامنا يقتصر عادةً على حمولة الانبعاج الأقل لعمود، فإن قيمة m تساوي دوماً الواحدَ. أمّا من أجل الصفائح، فإن كلا m وn يدخلان معادلة الانبعاج، كما تندرج فيها أيضاً النسبة الباعية (الأبعاد) a/b للصفيحة، وبالتالي لا تحدث حمولةُ الانبعاج الأصغريّة نموذجيّاً عند القيمتَين m=1 وn=1. وهكذا، علينا إيجادُ النهايةِ الأصغريّةِ المطلقة لقيمِ حمولة الانبعاج $\bar{N}_x$، أو ،بشكلٍ أعمّ لقيمِ λ من أجل مجالٍ واسعٍ لقيم m وn.

أولاً، يمكن إيجادُ النهايات الصغرى النسبيّة لــ λ من أجل متسلسلةٍ بقيم ثابتةٍ لــ m من خلال تغيير n عبرَ مجالٍ مُحدَّدٍ مُسبقاً، كما في الشكل 5−25 أ. تتمّ مقارنةُ النهايات الصغرى المطلقة لــ λ من أجل كلّ قيمةٍ لــ m ببعضها البعض للحصول على النهاية الصغرى المطلقة لــ λ من أجل جميع قيم m وn في الشكل 5−25 ب. إن

الإجرائيّةَ السابقةَ في البحث عن قيمة النهاية الصغرى المطلقة لـــ λ من أجل قيمٍ متقطّعةٍ لـــ m وn ضروريةٌ بسبب إمكانيّة وجود أكثر من نهايةٍ صغرى نسبيّة للصفائح، كما في الشكل 5–25 ب. في مثل هذه الحالات، تكون الإجرائيّاتُ العاديّةُ في تحديد قيمةٍ واقفة (stationary) لـــ λ عبر مُفاضلة λ بالنسبة إلى m وn ومُساواة النتائج بالصفر غيرَ ملائمةٍ البتّة، ومضلِّلةً أحياناً. تعتمد مثل هذه الإجرائيّات على كون حمولة الانبعاج دالةً مستمرةً لـــ m وn، ومن الواضح أن هذه الدالة ليست مستمرة. فوق ذلك، من الممكن وجودُ أكثر من نهايّة صُغرى لـــ λ.



الشكل 5– 25: تحديد حمل الانبعاج المطلق الأدنى

ينبغي تفحّصُ إشارةِ المشتق الثاني لـــ λ بالنسبة إلى m وn وذلك لتحديد فيما إذا كان يتم الحصول على نهاية حدّيّة صغرى، أم كُبرى، أم نقطة انحناء (inflection) بواسطة إجرائيّة القيمة الواقفة، التي يدعوها الكثيرون خطأً باسم "التصغير" في الحقيقة، ينجم عن تحديد مثل هذه المشتقّات وعن المنطق المتعلّق بها، من أجل اختيار النهاية الصغرى المطلقة (noninteger)، قيمٌ غيرُ صحيحةٍ لـــ m وn، فتكون غيرَ مقبولةٍ فيزيائيّاً، ومستحيلةً في الواقع. علاوةً على ذلك، تستهلك هذه الإجرائيّةُ غيرُ المناسبة تقريباً نفس المجهودَ الحسابيَّ للإجرائيّة الراهنة الأكثر ملاءمةً.

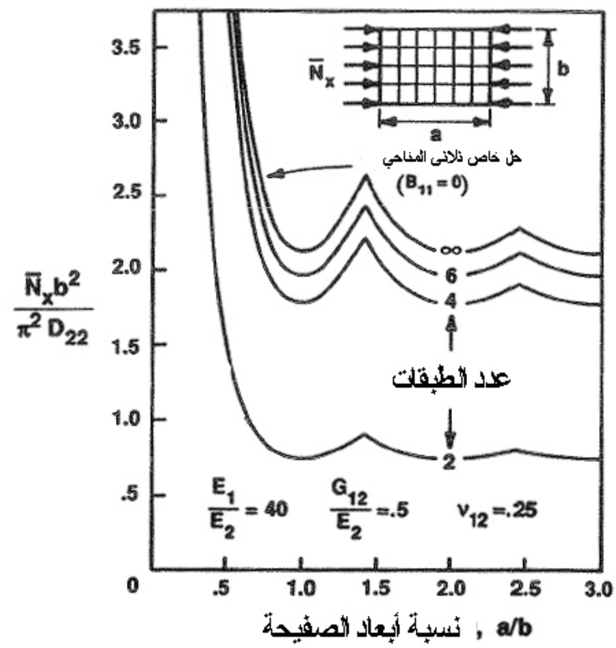
تتفادى إجرائيّةُ البحث الراهنة الحاجةَ إلى تحديد أيٍّ من مشتقّات λ، ولكنها تخضع للقيد المتمثِّل في ضرورةِ التحديد المُسبَق لمدى الواسع كفايةً لقيم m و n قبل البدء بالحلّ. وإلاّ يمكن أن تفوتنا قيمةُ النهاية الصغرى المطلقة لـــ λ. يعني ذلك أنه يجب أن يحتوي المدى المُحدَّد مُسبقاً لـــ m و n على القيم الحقيقيّة الموافِقة للنهاية الصغرى المطلقة، وأنه لا يمكن بترها من تحت هذا المدى بدون أن يرافِقَ ذلك تقديرٌ زائدٌ ومفرَطٌ لحمولة الانبعاج.

هناك عامِلان يُسهّلان من صعوبة إقرارِ مجال قيم m و n التي يجب تقصّيها: (1) الخبرة العمليّة و(2) السلوك– كأن تتناقص λ مثلاً– عند الاقتراب من نهاية مجال n (أو m)، كما يُبيّن الشكل 5–25أ وهذا ما يشير إليه برنامجٍ حاسوبيّ طوّره جونز [5–21]. تُطبع رسالةٌ تقول بأنه ينبغي زيادةُ مدى n (أو m) لتحديد فيما إذا وجدت قيمةٍ أقل لـــ λ. من الواضح أن هذه الإجرائيّة ليست معصومةً عن الخطأ. على سبيل المثال، إذا توقّف مدى قيم n الذي نتقصّاه بعد C ولكن قبل D في الشكل 5–25 أ، فلن تُطبع أيّ رسالةٍ، بينما يمكن للنهاية الصغرى الواقعة خلف D أن تكون أقل من القيمة الأصغريّة عند C ينبغي على الخبرةِ العمليّة مع هذه الأداة الحسابيّة المُساعِدة أن تقود إلى ضمانٍ معقولٍ بعدم إضاعة أو تفويتِ أيِّ نهايةٍ صغرى نسبيّةٍ يمكن أن تكون القيمةَ الأصغريّة المطلقة.

وكما كان الحالُ في مسألة الانحراف في الفقرة 3.3.5، فإنه يمكن إيجاد تأثيرِ عدد الطبقات في قيمة حمولة الانبعاج عبر تقسيم صفيحةٍ طبقيّة ذاتِ رقاقات متصالبة ومتساويةِ الوزن وذاتِ سماكةٍ ثابتة إلى رقائق أكثر فأكثر، كما في الشكل 5–12. يبيّن الشكلُ 5–26 النتائجَ الموافِقةَ لصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات متصالبة مصنوعة من غرافيت– إيبوكسي حيث $E_1/E_2=40, G_{12}/E_2=0.5, \upsilon_{12}=0.25$ إن حمولة الانبعاج هنا معيَّرة بالنسبة إلى عرض الصفيحة b وجساءتها D_{22}، من أجل قيمٍ متنوّعة للنسبة الباعية في صفيحةٍ مستطيلة، ومن أجل عدد متنوّعٍ من الطبقات. يمكن تبيانُ الحلِّ الموافِق لعددٍ لا متناهٍ من الطبقات (صفيحة متعددة الطبقات ثلاثيّة المناحي خاصة) كحالة حدية (نهايةٍ موافقةٍ) لغياب الإقران انحناء– استطالة. إن هذا الإقران فائق الأهميّة في حالةِ عددٍ صغيرٍ من الطبقات. من أجل طبقتَين في صفيحةٍ بنسبة باعية

مساويةٍ للواحد، يبلغ التقديرُ الزائدُ لمقاومة الانبعاج حوالى 183% إذا تمّ اعتمادُ التقريب ثلاثيّ المناحي.

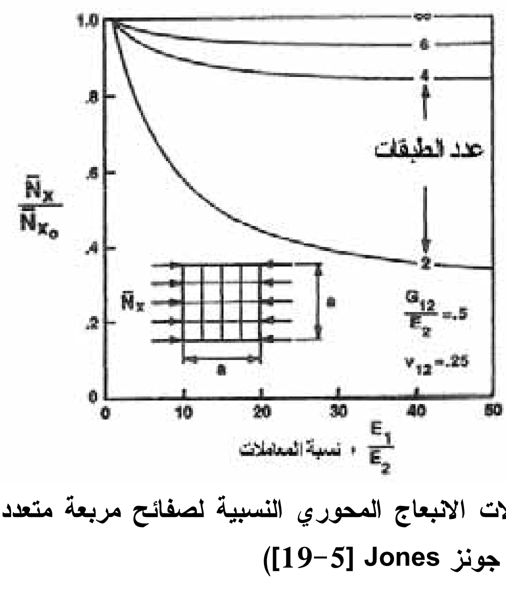
من وجهة نظرٍ أخرى، تقلّ القيمةُ الفعليّة للمقاومة بـــ 65% عن القيمةِ المحسوبة ضمن التقريب ثلاثي المناحيّ الخاصّ. من أجل أربع طبقات، تكون الأرقام المماثلة 19% كزيادةٍ في التقدير و16% في النقص على التوالي. من أجل ستّ طبقات، تنخفض القيمتان إلى 8% كزيادةٍ في التقدير و7% كنقصان على التوالي. من الواضح أن أثر الإقران انحناء- استطالة يتخامد سريعاً بتزايد عدد الطبقات من أجل صفيحة طبقيّة معاكسة التناظر. مع ذلك، لا يمكن تجاهُل هذا التأثير من أجل عددٍ من الطبقات أصغر من ستّ.



الشكل 5- 26: حمولات الانبعاج لصفائح معاكسة التناظر متعددة الطبقات متصالبة تحت ضغط محوري منتظم، N_x (عن جونز Jones [5-19])

عندما نعتبر موادّ مركّبةً أخرى، فإن أثر الإقران انحناء- استطالة على حمولة الانبعاج يعتمد بشكلٍ رئيسيّ على نسبة المعامِلَين ثلاثيَّي المناحي E_1/E_2، كما يبيّن الشكل

5-27 تُنظَّم هنا حمولةُ الانبعاج بواسطة حمولة الانبعاج لصفيحة مربّعة ثلاثيّة المناحي خاصّة ($B_{11}=0$). يتمّ تثبيت قيم G_{12}/E_2 وυ_{12} لأنها لا تتغيّر بمقدارٍ كبير، كما أن تأثيرَها في حمولة الانبعاج صغيرٌ مقارنةً بذاك الذي لــ E_1/E_2 عندما تتناقص قيمة نسبةِ المعامِلَين من قيمة 40 الموافقة لــ غرافيت–إيبوكسي، يبدأ تأثيرُ الإقران انحناء–استطالة بالتناقُص البطيء. كما لاحظنا سابقاً، يبلغ النقصان في حمولة الانبعاج لصفيحةٍ ثنائيّة الطبقة من غرافيت– إيبوكسي بالنسبة إلى صفيحةٍ ثلاثيّة المناحي خاصّة حوالى 65%. أمّا من أجل صفيحةٍ مربّعة من بورون– إيبوكسي، فإن النقصان يبلغ حوالى 43%. من وجهة نظر تحليل التصميم، يكون الحلُّ الموافِق للصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة عالياً جداً، بحوالى 183% من أجل صفيحة غرافيت– إيبوكسي، وبحوالى 74% من أجل صفيحة مماثلة من بورون– إيبوكسي. من الواضح أن الإقران انحناء– استطالة ذو أهمّيّةٍ فائقة عندما تحتوي الصفيحة على طبقتَين فقط. مع ذلك، يتخامد تأثير الإقران سريعاً جداً بتزايُد عدد الطبقات. على سبيل المثال، يبلغ النقصان في حمولة الانبعاج لصفيحةٍ سداسيّة الطبقات من غرافيت– إيبوكسي حوالى 7% فقط، وحوالى 5% من أجل صفيحة بورون–إيبوكسي.



الشكل 5– 27: حمولات الانبعاج المحوري النسبية لصفائح مربعة متعددة الطبقات معاكسة التناظر ومتصالبة (عن جونز Jones [5–19])

4.4.5 الصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات الرقاقات المائلة

وجدنا في الفقرة 3.3.4 أن الصفائح الطبقيّة معاكسة التناظر ذات الرقاقات المائلة تمتلك معاملات جساءة استطالة A_{11}, A_{12}, A_{22} وA_{66}؛ ومعاملات جساءة إقران انحناء–استطالة B_{16} و B_{26} ؛ ومعاملات جساءة انحناء D_{11}, D_{12}, D_{22} وD_{66}. وهكذا، يُبدي هذا النوع من الصفائح الطبقيّة نمطاً من الإقران انحناء–استطالة مختلفاً تماماً عمّا تُبديه الصفيحة الطبقيّة معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة التي نوقشت في الفقرة 3.4.5 تكون معادلات الانبعاج التفاضليّة والمرتبطة ببعضها البعض:

$$A_{11}\delta u,_{xx} + A_{66}\delta u,_{yy} + (A_{12} + A_{66})\delta v,_{xy} - 3B_{16}\delta w,_{xxy} - B_{26}\delta w,_{yyy} = 0 \quad (5.84)$$

$$(A_{12} + A_{66})\delta u,_{xy} + A_{66}\delta v,_{xx} + A_{22}\delta v,_{yy} - B_{16}\delta w,_{xxx} - 3B_{26}\delta w,_{xyy} = 0 \quad (5.85)$$

$$D_{11}w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})\delta W_{,xxyy} + D_{22}\delta w_{,yyyy}$$
$$- B_{16}(3\delta u,_{xxy} + \delta v,_{xxx}) - B_{26}(\delta u,_{yyy} + 3\delta v,_{xyy}) + \overline{N}_x\delta w,_{xx} = 0 \quad (5.86)$$

قام ويتني بحلّ هذه المسألة من أجل الشرط الحدّي S3 الموافِق لحافةٍ بسيطة الاستناد [5–13 و5–14] (لاحظ أن هذا الشرطَ الحدّي يختلف تماماً عن الشرط S2 المستعمل من أجل الصفائح معاكسة التناظر متعددة الطبقات ذات الرقاقات المتصالبة في الفقرة 3.4.5):

$$x = 0, a : \delta w = 0 \quad \delta M_x = B_{16}(\delta v,_x + \delta u,_y) - D_{11}\delta w,_{xx} - D_{12}\delta w,_{yy} = 0 \quad (5.87)$$

$$\delta u = 0 \quad \delta N_{xy} = A_{66}(\delta v,_x + \delta u,_y) - B_{16}\delta w,_{xx} - B_{26}\delta w,_{yy} = 0 \quad (5.88)$$

$$y = 0, b : \delta w = 0 \quad \delta M_y = B_{26}(\delta v,_x + \delta u,_y) - D_{12}\delta w,_{xx} - D_{22}\delta w,_{yy} = 0 \quad (5.89)$$

$$\delta v = 0 \quad \delta N_{xy} = A_{66}(\delta v,_x + \delta u,_y) - B_{16}\delta w,_{xx} - B_{26}\delta w,_{yy} = 0 \quad (5.90)$$

لاحظَ بعدها أن التغيّرات التالية في الانزياحات:

$$\delta u = \bar{u}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}$$
$$\delta v = \bar{v}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad (5.91)$$
$$\delta w = \bar{w}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}$$

تحقّق تماماً الشروط الحديّة، وكذلك المعادلات التفاضليّة الناظِمة (governing)، شريطة أن تكون حمولة الانبعاج:

$$\overline{N}_x = \left[\frac{a}{m\pi}\right]^2 \left[T_{33} + \frac{2T_{12}T_{23}T_{13} - T_{22}T^2{}_{13} - T_{11}T^2{}_{23}}{T_{11}T_{22} - T^2{}_{12}}\right] \quad (5.92)$$

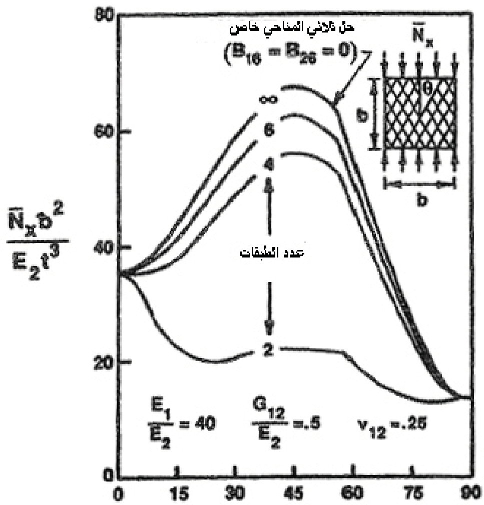
حيث:

$$\begin{aligned}
T_{11} &= A_{11}\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + A_{66}\left[\frac{n\pi}{b}\right]^2 \\
T_{12} &= \left(A_{12} + A_{66}\right)\left[\frac{m\pi}{a}\right]\left[\frac{n\pi}{b}\right] \\
T_{13} &= -\left[3B_{16}\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + B_{26}\left[\frac{n\pi}{b}\right]^2\right]\left[\frac{n\pi}{b}\right] \\
T_{22} &= A_{22}\left[\frac{n\pi}{b}\right]^2 + A_{66}\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 \\
T_{23} &= -\left[B_{16}\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2 + 3B_{26}\left[\frac{n\pi}{b}\right]^2\right]\left[\frac{m\pi}{a}\right] \\
T_{33} &= D_{11}\left[\frac{m\pi}{a}\right]^4 + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\left[\frac{m\pi}{a}\right]^2\left[\frac{n\pi}{b}\right]^2 + D_{22}\left[\frac{n\pi}{b}\right]^4
\end{aligned} \quad (5.93)$$

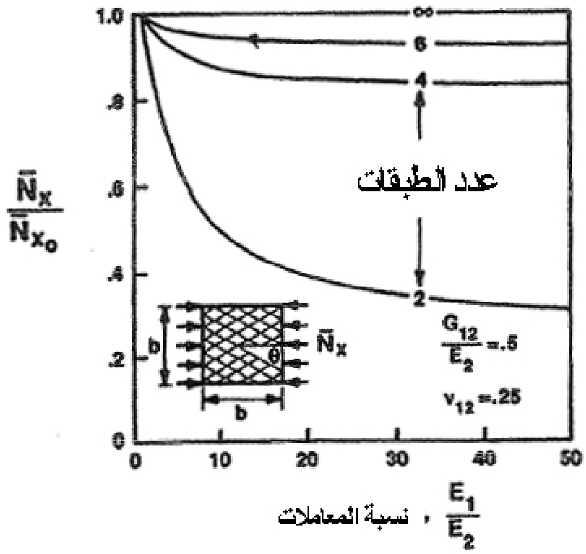
لاحظ أنه إذا كان B_{16} وB_{26} مساويَين للصفر، انعدم أيضاً T_{13} وT_{23}، وبالتالي تؤول المعادلة (5.92) إلى الحلّ الموافِق للصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة، المعادلة (5.65). تماثِل خصائص المعادلة (5.92) تلك التي للمعادلة (5.81) الموافِقة للصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة، وبالتالي تصلح هنا أيضاً الملاحظاتُ الواردة في الفقرة 3.4.5 حول إيجاد حمولة الانبعاج.

وكحال مسألة الانحراف في الفقرة 4.3.5، يمكن إيجادُ تأثير عدد الطبقات في حمولة الانبعاج عبر تقسيم الصفيحة الطبقيّة ذات الرقاقات المائلة متساوية الوزن وثابتة السماكة إلى رقاقات أكثر فأكثر، كما في الشكل 5–15. يُبيّن الشكلُ 5–28 نتائجَ عدديّةً

موافِقةً لصفائح مربّعة الشكل مصنوعةٍ من مادّة مُركَّبة من غرافيت- إيبوكسي مع $E_1/E_2=40,\ G_{12}/E_2=0.5$ و$\upsilon_{12}=0.25$. يكمن تأثير الإقران انحناء- استطالة في تخفيض حمولة الانبعاج من أجل صفائح ثنائيّة الطبقة من نتيجة الصفائح متعدّدة الطبقات (التي توافِق الحلَّ في حالة الصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة في الفقرة 1.4.5). عندما تكون الزاوية مساويةً لــ °45، يكون التخفيض بحوالى الــ 3/2؛ ولكن الأمرَ الأكثر أهمّيةً ربّما هو حقيقةُ أن استعمالَ التقريب الثلاثي المناحي الخاصّ يؤدّي إلى قيمةٍ متوقَّعة لحمولة الانبعاج تساوي ثلاث مرّات قيمة حمولة الانبعاج الفعليّة! من الواضح أن التقريب الثلاثي المناحي الخاصّ بعيدٌ جداً عن كونه تحفّظيّاً (Unconservative) من أجل الصفائح الطبقيّة معاكسة التناظر ذات الرقاقات المائلة الأقلّ من ستّ طبقات حيث يكون الخطأ في حمولة الانبعاج حوالى 7%. وهكذا، يتخامد تأثير الإقران انحناء- استطالة سريعاً بتزايُد عدد الطبقات، ويصلح هذا الاستنتاج من أجل موادّ أخرى، كما يبيّن الشكل 5-29 وفق طريقة الفقرة 3.4.5.



الشكل 5- 28: انبعاج الصفائح المربعة متعددة الطبقات ومعاكسة التناظر ذات الرقاقات المائلة تحت ضغط أحادية المحور منتظم، N_x (عن جونز Jones ومورغان Morgan وويتني Whitney [5-22])



الشكل 5- 29: حمولات انبعاج نسبية محورية لصفائح متعددة الطبقات مربعة ومعاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة

مجموعة المسائل 4.5:

1.4.5 استنتج المعادلة (5.65)

2.4.5 اعتبرِ صفيحةً طبقيّة متناظرة ذات رقاقات متصالبة وصفيحةً مُقوّاةً محوريّاً، كما في الشكل 5-23. تمتلك كلتا الصفيحتَين ثلاث طبقاتٍ من إيبوكسي-غرافيت سماكة كلٍّ منها t وذات حواف أربعة بسيطة الاستناد وتطبيق N_x. برهن أن معاملات جساءة الانحناء تحقّق المتراجحات (Inequalities) التالية: $D_{11UD}>D_{22UD}$ (تعني UD أحادية المحور Unidirctionae)، $D_{11UD}>D_{11CP}$ (تعني CP رقاقات متصالبة Cross-play)، و$D_{22CP}>D_{22UD}$. عبّر عن جميع معاملات جساءة الانحناء في الصفيحة الطبقيّة بدلالة معاملات جساءة الصفيحة الطبقيةأحاديّة الطبقة بزاوية °0، أي إن $E_1t^3/12\ (1-\upsilon_{12}\upsilon_{21})$. استخدم نتائج الجساءة هذه لحساب حمولة الانبعاج في المعادلة (5-66) من أجل استكشاف أهمّية D_{22} (وكذلك أهمّيتَي D_{12} وD_{66}) في الحساب من أجل a/b=2 وm=1. صِفْ أهميّةَ الحدَّين الثانِيَين في

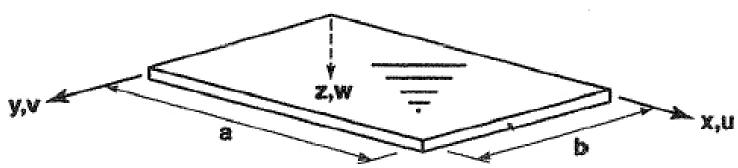
المعادلة (5−66) عندما (1) يتزايد a/b و(2) يتزايد m. ماذا يحصل لــ m عندما يتزايد a/b؟

3.4.5 استنتج المعادلة (5.81). توجيه: تذكّر أنه لكي تقبلَ جملةٌ (Set) من المعادلات المتجانسة حلاً غيرَ بديهي، ينبغي على معيّن (محدّد (Determinant) المعاملات أن يكون مساوياً للصفر.

4.4.5 استنتج المعادلة (5.92). انظر التوجيهَ في المسألة 2.4.5.

5.5 اهتزازُ الصفائح متعددة الطبقات بسيطة الاستناد

لنعتبرِ الفئة العامّة للصفائح متعددة الطبقات المستطيلة الشكل بسيطة الاستناد على الحواف x=0, x=a, y=0, y=b كما يبيّن الشكل 5−30. سوف يتم في هذه الفقرة مناقشة طبيعةَ الاهتزازات الحرّة (غير القسريّة Not Forced) لمثل هذا التشكيل الإنشائي حول حالةِ توازنٍ، وذلك وفقاً للمعادلات التفاضليّة الناظِمة والشروط الحدّيّة التي نوقشت في الفقرة 2.5 يمكن اعتبارُ شروطٍ حدّيّة أخرى أكثر تعقيداً وتأثير وجود حالة توازن إجهاد. مع ذلك، وبشكلٍ يتوافق مع الأهداف المحددة لهذا الكتاب، سوف يتم التخلي عن هذه المواضيع لدراسة أخرى. يقدِّم ويتني [5−1] معالجةً أكثرَ شموليّةً لاهتزازات الصفيحة متعددة الطبقات.



الشكل 5− 30: اهتزاز صفيحة مستطيلة متعددة الطبقات بسيطة الاستناد

سوف يتم تحديد ترددات الاهتزاز الحرّ مع أشكال النمط الموافِقة من أجل الصفائح ذات التصفيح المتنوّع: ثلاثيّ المناحي الخاصّ، ذي الرقاقات المتناظرة المائلة، ذي الرقاقات معاكسة التناظر المتصالبة، ذي الرقاقات معاكسة التناظر المائلة. سوف يتم مقارنة نتائج هذه الأنماط المختلفة من التصفيح ببعضها البعض لتحديد تأثير الإقران انحناء− فتل والإقران انحناء− استطالة في سلوك الاهتزاز. وكحال مسائل الانحراف في

الفقرة 3.5 ومسائل الانبعاج في الفقرة 4.5، سوف يتم استعمال شروط حدّية مختلفة بسيطة الاستناد في المسائل العديدة المعروضة.

1.5.5 الصفائح متعددة الطبقات ثلاثيّة المناحي الخاصة

تحتوي الصفيحة الطبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصة إمّا على طبقةٍ وحيدة من مادّة ثلاثيّة المناحي خاصة أو على طبقاتٍ متعددةٍ ثلاثيّة المناحي خاصّة منضدةٍ بشكلٍ متناظر حول سطح الصفيحة الطبقية الأوسط. في كلتا الحالتَين، تتألّف معاملات جساءة الصفيحة الطبقيّة فقط من $A_{11}, A_{12}, A_{22}, A_{66}, D_{11}, D_{12}, D_{22}$ و D_{66}. يعني ذلك غيابَ الإقران قصّ– استطالة أو الإقران انحناء – فتل، وكذلك عدمَ وجود الإقران انحناء – استطالة. ثمّ – من أجل مسائل الصفيحة– يمكن تحديد ترددات الاهتزاز وأشكال النمط عبر حلّ معادلة الاهتزاز التفاضليّة الوحيدة:

$$D_{11}\delta w_{,xxxx} + 2(D_{12} + 2D_{66})\delta w_{,xxyy} + D_{22}\delta w_{,yyyy} + \rho\delta w_{,tt} = 0 \qquad (5.94)$$

الخاضعة للشروط الحديّة للحافة بسيطة الاستناد:

$$x = 0, a : \delta w = 0 \quad \delta M_x = -D_{11}\delta w_{,xx} - D_{12}\delta w_{,yy} = 0 \qquad (5.95)$$
$$y = 0, b : \delta w = 0 \quad \delta M_y = -D_{12}\delta w_{,xx} - D_{22}\delta w_{,yy} = 0$$

يكون الاهتزاز الحرّ لوسطٍ مرنٍ مستمر توافقيّاً (Harinonic) في الزمن، ولذلك اختار ويتني حلاًّ توافقيّاً:

$$\delta w(x, y, t) = (A\cos\omega t + B\sin\omega t)\delta w(x, y) \qquad (5.96)$$

ولاحظَ أن المسألةَ قد تمّ فصلُها الآن إلى تغيُّراتٍ مكانيّة وأخرى زمانيّة [5–1]. تتحقّق المعادلةُ التفاضليّة الناجمة والشروط الحديّة مع التغيُّر المكانيّ للانزياح الجانبيّ:

$$\delta w(x, y) = \sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi\ y}{b} \qquad (5.97)$$

شريطةَ أن يكون التردد أو التردد الزاوي ω

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{\rho}\left[D_{11}\left[\frac{m}{a}\right]^4 + 2(D_{12} + 2D_{66})\left[\frac{m}{a}\right]^2\left[\frac{n}{b}\right]^2 + D_{22}\left[\frac{n}{b}\right]^4\right] \qquad (5.98)$$

حيث توافِق الترددات الطبيعيّة المتنوّعة ω أشكالَ نمطٍ مختلفة (أي توافِق قيماً مختلفةً لـــ m و n في المعادلة (5.97)، وبالتالي لأشكالٍ مختلفةٍ لـــ w). يتم وضوحاً الحصول على

التردد الطبيعيّ الأساسيّ (التردد الأصغريّ) عندما تكون كلتا قيمتَي m وn مساويتَين للواحد.

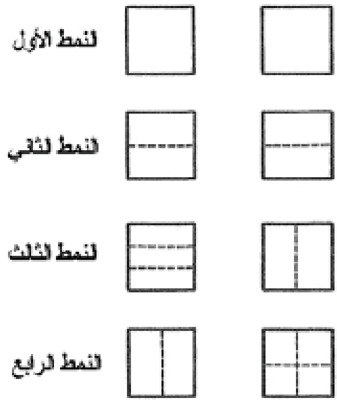
يعرض الجدول 5–3 القيمَ الأربع الأقل الترددات الاهتزاز من أجل صفيحة مربّعة ثلاثيّة المناحي خاصّة، مصنوعة من بورون–إيبوكسي ذات نسبِ جساءاتٍ تحقّق $D_{11}/D_{22}=10$ و$(D_{12}+2D_{66})=1$، وكذلك بالتوازي مع الترددات الأربع الأقل من أجل صفيحةٍ متماثلة المناحي. يُعرَّف العامِل k هنا بـــ :

$$\omega = \frac{k\pi^2}{b^2}\sqrt{\frac{D_{22}}{\rho}} \tag{5.99}$$

الجدول 5–3: الترددات الاهتزازيّة المعيّرة من أجل صفائح ثلاثيّة المناحي خاصّة، ومن أجل صفائح مربّعة الشكل متماثلة المناحي بسيطة الاستناد

النمط	ثلاثيّ المناحي خاصّ			متماثل المناحي		
	m	n	k	m	n	k
أوّل	1	1	3.60555	1	1	2
ثاني	1	2	5.84095	1	2	5
ثالث	1	3	10.44031	2	1	5
رابع	2	1	13	2	2	8

حيث $D_{22}=D$ من أجل صفيحة متماثلة المناحي. يُبيّن الشكل 5–31 أشكالَ النمط الموافِقة، حيث يُشار إلى الخطوط العقْديّة (nodal lines) (أي الخطوط ذات الانحراف المعدوم مع مرور الزمن) بخطوطٍ متقطّعة. تكمن الملاحظةُ المهمة هنا في امتلاك الصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة مجموعةً من الترددات الأربع الأقل مختلفةً عن المجموعة المقابِلة في الصفيحة متماثلة المناحي. يعني ذلك أن هناك تفضيلاً اتّجاهيّاً تُبديه الصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة، كما يُثبِته امتلاك النمط $m=1,n=3$ لتردد أدنى من تواتر النمط $m=2,n=1$. على خلاف ذلك، تمتلك الصفيحة متماثلةُ المناحي قيمةَ التردد نفسَها من أجل كلا النمطَين $m=2,n=1$ و$m=1,n=2$. يمكن الحصول على معلوماتٍ مماثلةٍ من أجل جميع الأمثلةِ التالية، ولكننا سوف نركّز على التردد الطبيعيّ الأساسيّ من أجل تبسيط المناقشة.



الشكل 5− 31: أشكال نمط الاهتزاز لصفائح مربعة ثلاثية المناحي ومتماثلة المناحي خاصة بسيطة الاستناد

2.5.5 الصفائح متعددة الطبقات المتناظِرة ذات الرقاقات المائلة

وجدنا في الفقرة 2.3.4 أن الصفائح الطبقيّة المتناظرة ذات الرقاقات المائلة تتميّز عبر مصفوفةٍ كاملةٍ من معاملات جساءة الاستطالة بالإضافة إلى معاملات جساءة الانحناء، ولكنها لا تمتلك الإقران انحناء−استطالة. يكمن الاختلاف الرئيسي بين هذه الصفائح الطبقيّة والصفائح الطبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصة في إدخال معاملات جساءة الإقران انحناء−فتل D_{16}, D_{26} (لا تكون معاملات جساءة الإقران قصّ−استطالة A_{16} وA_{26} مهمّةً بالنسبة إلى الاهتزاز العرضانيّ في صفيحة متعددة الطبقات متناظرة، لأن المعادلاتِ التفاضليّةَ النّاظِمةَ مستقلّةٌ وغيرُ مقرونة بعضها ببعض). وفقاً لذلك، تكون معادلةُ الاهتزاز التفاضليّة:

$$D_{11}\delta w_{,xxxx} + 4D_{16}\delta w_{,xxxy} + 2(D_{12} + 2D_{66})\delta w_{,xxyy} + 4D_{26}\delta w_{,xyyy} + D_{22}\delta w_{,yyyy} + \rho\delta w_{,tt} = 0 \quad (5.100)$$

مع الخضوع للشروط الحديّة الموافِقة للحافة بسيطة الاستناد في جميع الأوقات:

$$x = 0, a : \delta w = 0 \quad \delta M_x = -D_{11}\delta w_{,xx} - D_{12}\delta w_{,yy} - 2D_{16}\delta w_{,xy} = 0 \quad (5.101)$$

$$y = 0, b : \delta w = 0 \quad \delta M_y = -D_{12}\delta w_{,xx} - D_{22}\delta w_{,yy} - 2D_{26}\delta w_{,xy} = 0$$

يجعل وجودُ D_{16} وD_{26} في المعادلة التفاضليّة الناظِمة وفي الشروط الحديّة إمكانيّةَ إيجادِ شكلٍ مغلقٍ للحلّ مستحيلةً. يعني هذا الأمر وبشكلٍ مماثلٍ لكلا انحناء وانبعاج الصفيحة المتناظرة ذات الرقاقات المائلة (أو غير متماثلة المناحي)، أن التغيُّرَ في الانزياح الجانبيّ δw لا يمكن فصله إلى حاصل جداءِ دالة لـــ x لوحدها بدالة لـــ y لوحدها. مع ذلك، تُعدّ مقاربةُ رايلي–ريتز مرّةً أخرى مفيدةً جداً. تحقّق عبارةُ التغيُّر:

$$\delta w = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \qquad (5.102)$$

الشروطَ الحديّة الهندسيّةَ (w=0 على جميع الحواف)، ولكنها لا تحقِّق الشروطَ الحديّة الطبيعيّة ($M_n=0$ على جميع الحواف) أو المعادلةَ التفاضليّة الناظمة. من أجل ذلك، يمكن لاستعمال المعادلة (5.102) في عبارة الطاقة المناسبة أن ينجم عنه تقاربٌ بطيءٌ نوعاً ما نحو الحلّ الصحيح. لا توجد نتائجُ عدديّةٌ معروفةٌ بالنسبة إلى المؤلِّف موافقة لهذه الفئة من الصفائح الطبقيّة.

3.5.5 الصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة

وجدنا في الفقرة 3.3.4 أن الصفائح الطبقيّة معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة تمتلك معاملات جساءة استطالة A_{11} , A_{12} , $A_{22}=A_{11}$ و A_{66}؛ ومعاملات جساءة إقران انحناء–استطالة B_{11} و $B_{22}=-B_{11}$ و معاملات جساءة انحناء D_{11} D_{12} , $D_{22}=D_{11}$ و D_{66}. تتمثّل الحدود (Terms) الجديدةُ هنا، مقارنةً بالصفيحة الطبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصة، بـــ B_{11} و B_{22}. تكون معادلات الاهتزاز التفاضليّة الثلاث بسبب وجود الإقران انحناء–استطالة مقرونةً ببعضها البعض:

$$A_{11}\delta u_{,xx} + A_{66}\delta u_{,yy} + \left(A_{12} + A_{66}\right)\delta v_{,xy} - B_{11}\delta w_{,xxx} = 0 \qquad (5.103)$$

$$\left(A_{12} + A_{66}\right)\delta u_{,xy} + A_{66}\delta v_{,xx} + A_{11}\delta v_{,yy} + B_{11}\delta w_{,yyy} = 0 \qquad (5.104)$$

$$D_{11}\left(w_{,xxxx} + \delta w_{,yyyy}\right) + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\delta w_{,xxyy} \qquad (5.105)$$

$$- B_{11}\left(\delta u_{,xxx} + \delta v_{,yyy}\right) + \rho\delta w_{,tt} = 0$$

لاحظ ويتني أن التغيّرات التالية في الانزياحات:

$$\delta u(x, y.t) = \bar{u}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{i\omega t}$$

$$\delta v(x, y.t) = \bar{v}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{i\omega t} \qquad (5.106)$$

$$\delta w(x, y.t) = \bar{w}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{i\omega t}$$

تحقّق الشرطَ الحدّي S2 الموافِق لحافةٍ بسيطة الاستناد في جميع الأوقات:

$$x = 0, a: \quad \begin{array}{ll} \delta w = 0 & \delta M_x = B_{11}\delta u_{,x} - D_{11}\delta w_{,xx} - D_{12}\delta w_{,yy} = 0 \\ \delta v = 0 & \delta N_x = A_{11}\delta u_{,x} + A_{12}\delta v_{,y} - B_{11}\delta w_{,xx} = 0 \end{array} \qquad (5.107)$$

$$y = 0, b: \quad \begin{array}{ll} \delta w = 0 & \delta M_y = -B_{11}\delta v_{,y} - D_{12}\delta w_{,xx} - D_{11}\delta w_{,yy} = 0 \\ \delta u = 0 & \delta N_y = A_{12}\delta u_{,x} + A_{11}\delta v_{,y} - B_{11}\delta w_{,yy} = 0 \end{array} \qquad (5.108)$$

وكذلك المعادلةَ التفاضليّة الناظمةَ إذا كان التردد ω

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{p}\left[T_{33} + \frac{2T_{12}T_{23}T_{13} - T_{22}T^2{}_{13} - T_{11}T^2{}_{23}}{T_{11}T_{22} - T^2{}_{12}}\right] \qquad (5.109)$$

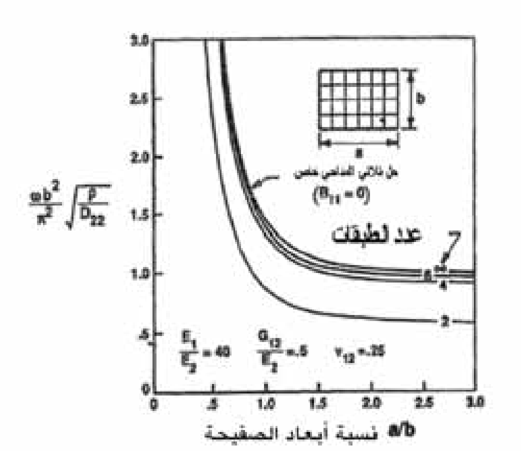
حيث T_{ij} مُعرَّفة في المعادلة (5.82) [5-12 و5-13]. لاحظ أنه إذا كان $B_{11}=0$، انعدم أيضاً T_{13} وT_{23}، وبالتالي تؤول المعادلة (5.109) إلى الحلّ الموافِق للصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة، المعادلة (5.98)، شريطة كون $D_{11}=D_{22}$. بما أن T_{11} و T_{12}و T_{22} توابع لكلا m وn وأنها تظهر في المقام (Denominator) للمعادلة (5.109)، لا يمكننا الحصول على استنتاجٍ بسيطٍ عن قيمتَي m وn من أجل التردد الأصغريّ. بدلاً من ذلك، ينبغي معاملةُ المعادلة (5.109) كدالة للمتحوّلَين المتقطّعَين m وn، ومن ثمّ البحث عن

قيمها الأصغريّة. في الحقيقة، يوافِق التردد الأساسيّ، من أجل النتائج المعروضة في المثال العددي- قيمتَين لـــ m وn مساويتَين للواحد. مع ذلك، يجب توخّي الحذر من استنتاج أيّ تعميمٍ عن شكل نمط التردد الأساسيّ.

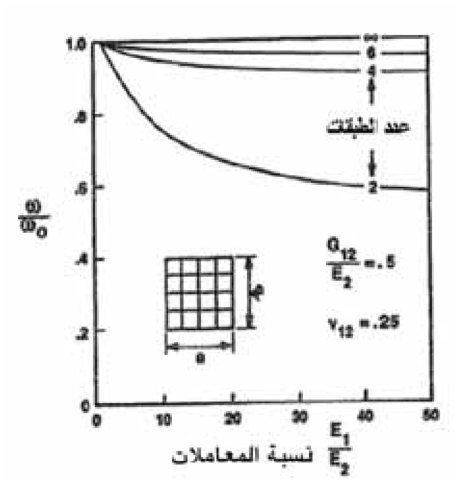
وكحال مسألة الانحراف في الفقرة 3.3.5، يمكن إيجادُ تأثير عدد الطبقات في الاهتزازات عبر تقسيم الصفيحة الطبقيّة ذات الرقاقات المتصالبة متساوية الوزن وذات السماكة الثابتة إلى رقاقات أكثر فأكثر، كما في الشكل 5-12.

يُبيّن الشكلُ 5-32 نتائجَ عدديّةً موافِقةً للمعادلة (5.109) من أجل موادّ مُركَّبة من غرافيت-إيبوكسي ذات $E_1/E_2=40, G_{12}/E_2=0.5,$ و $\upsilon_{12}=0.25$. نجد أن تأثير الإقران انحناء-استطالة يكمن في تخفيض قيم تواترات الاهتزاز. على سبيل المثال، ينقص التردد الأساسي لصفيحة مربّعة بحوالى 40% عند الانتقال من الحلّ الموافِق لصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصّة إلى الحلّ الصحيح لصفيحة ثنائيّة الطبقة[2] الأمرُ الأكثر أهمّيةً هو أن تقريبَ الصفيحة ثلاثية المناحي خاصة عالٍ جداً بمقدار 60%! يتناقص تأثير الإقران انحناء-استطالة بتزايُد عدد الطبقات. على سبيل المثال، تمتلك صفيحةٌ سداسيّة الطبقات توتداً أساسيّاً أقلّ فقط بـــ 5% من قيمته في تقريب الصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة. مع ذلك، من الواضح ضرورةُ أخذ الإقران انحناء - استطالة بعين الاعتبار في اهتزازات الصفيحة متعددة الطبقات. يُدعَّم هذا الاستنتاجَ بملاحظة نتائج الاهتزاز في الموادّ المركّبة الأخرى في الشكل 5-33.

[2] لاحظ أن الاختزالاتِ في قيم ترددات الاهتزاز أقلُّ بكثير من اختزالات حمولة الانبعاج. إن ضرورةَ الوصول إلى هذا الاستنتاج واضحةٌ من حقيقة كون المعادلة (5.109) تتضمّن **مربَّعَ** التردد الطبيعي، بينما تتضمّن المعادلة (5.81) حمولةَ الانبعاج مرفوعةً إلى القوّة الأولى. وهكذا، يكون الجذر التربيعيّ للاختلافات المتمثِّلة بالطرفَين اليمينيَّين للمعادلتَين (5.81) و(5.109) أصغرَ من الاختلافات نفسها.



الشكل 5- 32: ترد الاهتزاز الأساسية الطبيعية لصفائح مستطيله متعددة الطبقات ذات رقاقات متصالبة ومعاكسة التناظر (عن جونز Jones [5-19])



الشكل 5- 33: ترددات الاهتزاز الأساسية الطبيعية النسبية لصفائح مربعة متعددة الطبقات ذات رقاقات متصالبة ومعاكسة التناظر (عن جونز Jones [5-19])

4.5.5 الصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات الرقاقات المائلة

وجدنا في الفقرة 3.3.4 أن الصفائح الطبقيّة معاكسة التناظِر ذات الرقاقات المائلة (Anlisymmetric Angle-Ply Laminated Plates) تمتلك معاملات جساءة استطالة A_{11}, A_{12}, A_{22} و A_{66}؛ ومعاملات جساءة إقران انحناء – استطالة B_{16}, B_{26}؛

ومعاملات جساءة انحناء D_{11}, D_{12}, D_{22} وD_{66}. وهكذا، تُبدي هذه الصفيحة الطبقيّة نمطاً من الإقران انحناء–استطالة مختلفاً عمّا تُبديه الصفيحة الطبقيّة معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة التي نوقشت في الفقرة 3.5.5 تكون معادلات الاهتزاز التفاضليّة المقرونة ببعضها البعض:

$$A_{11}\delta u,_{xx} + A_{66}\delta u,_{yy} + \left(A_{12} + A_{66}\right)\delta v,_{xy} - 3B_{16}\delta w,_{xxy} - B_{26}\delta w,_{yyy} = 0 \quad (5.110)$$

$$\left(A_{12} + A_{66}\right)\delta u,_{xy} + A_{66}\delta v,_{xx} + A_{22}\delta v,_{yy} - B_{16}\delta w,_{xxx} - 3B_{26}\delta w,_{xyy} = 0 \quad (5.111)$$

$$\begin{aligned} &D_{11}\delta W,_{xxxx} + 2\left(D_{12} + 2D_{66}\right)\delta w,_{xxyy} + D_{22}\delta w,_{yyyy} \\ &- B_{16}\left(3\delta u,_{xxy} + \delta v,_{xxx}\right) + B_{26}\left(\delta u,_{yyy} + 3\delta v,_{xyy}\right) + \rho\delta w,_{tt} = 0 \end{aligned} \quad (5.112)$$

استعمل ويتني التغيّرات التالية في الانزياحات:

$$\begin{aligned} \delta u(x, y.t) &= \bar{u}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}e^{i\omega t} \\ \delta v(x, y.t) &= \bar{v}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{i\omega t} \\ \delta w(x, y.t) &= \bar{w}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (5.113)$$

التي تُحقِّق الشرطَ الحدّي S3 لحافةٍ بسيطة الاستناد:

$$x = 0, a: \quad \begin{aligned} &\delta w = 0 \quad \delta M_x = B_{16}\left(\delta v,_x + \delta u,_y\right) - D_{11}\delta w,_{xx} - D_{12}\delta w,_{yy} = 0 \\ &\delta u = 0 \quad \delta N_{xy} = A_{66}\left(\delta v,_x + \delta u,_y\right) - B_{16}\delta w,_{xx} - B_{26}\delta w,_{yy} = 0 \end{aligned} \quad (5.114)$$

$$y = 0, b: \quad \begin{aligned} &\delta w = 0 \quad \delta M_y = B_{26}\left(\delta v,_x + \delta u,_y\right) - D_{12}\delta w,_{xx} - D_{22}\delta w,_{yy} = 0 \\ &\delta v = 0 \quad \delta N_{xy} = A_{66}\left(\delta v,_x + \delta u,_y\right) - B_{16}\delta w,_{xx} - B_{16}\delta w,_{yy} = 0 \end{aligned} \quad (5.115)$$

في جميع الأزمنة، وكذلك المعادلةَ التفاضليّةَ الناظمةَ إذا كان التردد ω مُعطىً بالعلاقة:

$$\omega^2 = \frac{\pi^4}{\rho}\left[T_{33} + \frac{2T_{12}T_{23}T_{13} - T_{22}T^2{}_{13} - T_{11}T^2{}_{23}}{T_{11}T_{22} - T^2{}_{12}}\right] \quad (5.116)$$

حيث T_{ij} مُعرَّفة في المعادلة (5.93) [5.12 و5.13]. لاحظ أنه إذا كان B_{16} وB_{26} مساويَين للصفر، انعدم أيضاً T_{13} وT_{23}، وبالتالي تؤول المعادلة (5.116) إلى الحلّ الموافِق للصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة، المعادلة (5.65). تشابه طبيعة المعادلة (5.116) تلك في المعادلات (5.81)، (5.92) و(5.109) (الصفيحة الطبقيّة معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة)، وبالتالي تصلح هنا أيضاً الملاحظاتُ التي أوردناها في الفقرة 3.4.5

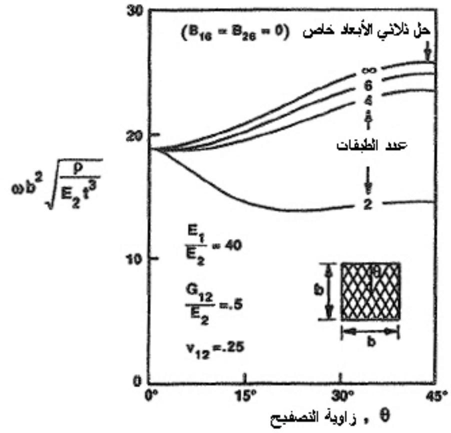
وكحال مسألة الانحراف في الفقرة 4.3.5، يمكن إيجادُ تأثير عدد الطبقات في الاهتزازات عبر تقسيم الصفيحة الطبقيّة ذات الرقاقات المائلة متساوية الوزن وذات السماكة الثابتة إلى رقاقات أكثر فأكثر، كما في الشكل 5−15 يُعطي الشكلُ 5−34 نتائجَ عدديّةً كدالة لزاوية التصفيح من أجل صفائح مصنوعةٍ من موادّ مُركَّبة من غرافيت− إيبوكسي ذات $E_1/E_2=40, G_{12}/E_2=0.5$ و$\upsilon_{12}=0.25$. وكما كان الحالُ مع B_{11} في الفقرة 3.5.5، نجد أن تأثير معاملي جساءة الإقران انحناء− استطالة B_{16}, B_{26} يكمن في تخفيض قيم الترددات الأساسيّة للاهتزازات. على سبيل المثال، ينقص التوتر الأساسي الطبيعيّ لصفيحة مربّعة ثنائية الطبقة ذات زاوية $\theta=45°$ بحوالى 40% عن قيمته في الحلّ الموافِق لصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصّة الذي يكون صالحاً عندما يصبح عدد الطبقات لا متناهياً. بكلمةٍ أخرى، يكون الحلُّ الموافِقُ للصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة عالياً جداً بمقدار 80%! مرّة أخرى، يتناقص سريعاً تأثيرُ الإقران انحناء− استطالة بتزايُد عدد الطبقات. يبلغ الفرق بين الحلّ الموافِق للصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصّة والحلّ الصحيح حوالى 4% من أجل صفيحة سداسيّة الطبقات. من الواضح أن الإقران انحناء− استطالة قد يكون مهمّاً جداً من أجل الصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظِر. لا يتغيّر هذا الاستنتاجُ عندما نعتبر موادَّ مركّبةً أخرى، كما في الشكل 5−35.

مجموعة المسائل 5.5:

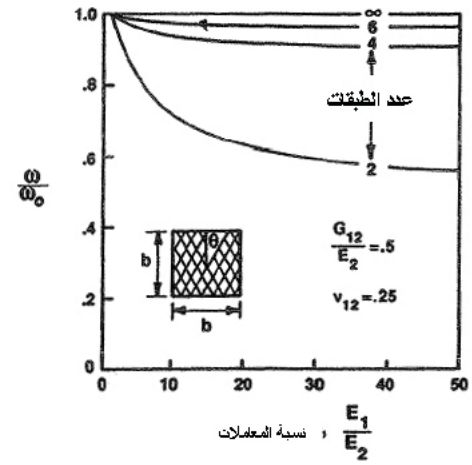
1.5.5 اشتق المعادلة (5.98)

2.5.5 اشتق المعادلة (5.109). انظر التوجيه في المسألة 2.4.5

3.5.5 اشتق المعادلة (5.116). انظر التوجيه في المسألة 2.4.5



الشكل 5- 34: ترددات الاهتزازات الأساسية الطبيعية لصفائح مربعة متعددة الطبقات ذات رقاقات مائلة ومعاكسة التناظر (عن جونز Jones ومورغان Morgan وويتني Whitney [5-22])



الشكل 5- 35: ترددات الاهتزاز الأساسية الطبيعية النسبية لصفائح مربعة متعددة الطبقات ذات رقاقات مائلة ومعاكسة التناظر

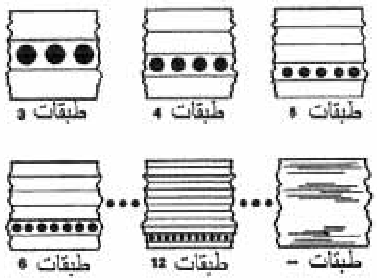
6.5 ملاحظات موجزة على تأثيرات معاملات الجساءة

يُزيد وجودُ الإقران انحناء- استطالة في صفيحةٍ متعددة طبقات من الانحرافات. لذلك، يُنقِص الإقران القيمَ الفعليّةَ لمعاملات جساءة الانحناء في الصفيحة الطبقيّة. في الوقت نفسه، يُنقِص هذا الإقران قيمَ حمولات الانبعاج والترددات الاهتزازيّة بشكلٍ كبير، كما هو متوقَّع من أجل الصفائح ذات القيم الأقل لمعاملات جساءة الانحناء الفعليّة.

وبشكلٍ مماثلٍ، تزداد الانحرافات، وتتناقص حمولات الانبعاج وتتناقص قيم الترددات الاهتزازيّة من أجل الصفائح متعددة الطبقات ذات الإقران انحناء- فتل. في كلتا حالتَي الإقران انحناء- استطالة والإقران انحناء-فتل، يتخامد سريعاً - التأثير في الانحرافات، وفي حمولات الانبعاج، وفي الترددات الاهتزازيّة، من أجل صفيحةٍ طبقية ذات سماكة ثابتة لامتناظرة، أو متناظرة، على التوالي، مع ازدياد عدد الطبقات. يحتاج الأمر إلى تقصٍّ خاصّ من أجل الصفائح الطبقيّة الأكثر عموميّةً. يعني ذلك ببساطة أنه لا ضمانَ أو حتى لا وجودَ لأيّ سببٍ يجعلنا نتوقّع أن الاستنتاجات التي توصّلنا إليها من أجل العديد من الصفائح الطبقية متعددة الطبقات معاكسة التناظر تصلح ،وبأيّ طريقةٍ كانت من أجل الصفائح متعددة الطبقات اللامتناظرة عامة.

تمّت مناقشةُ فئة أكثرَ عموميّةً نوعاً ما من الصفائح الطبقيّة، وهي الصفائح الطبقيّة ذات الرقاقات المتصالبة غير المتناظرة، من قِبل جونز [5-19]، بالإضافة إلى جونز (Jones) ومورغان (Morgan) [5-23]. تمّ تخفيفُ جميع مستلزمات خصائص التناظر في المادّة الهندسي التي عرضناها في الفقرات السابقة. ومع ذلك، يُمكِّن الاقتصارُ على الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المتصالبة (ذات سماكات طبقات اعتباطية وتسلسل تنضيد موافِق مع °0 و°90) من الحصول على حلٍّ صحيحٍ بسيط. مع ذلك، وبسبب التعقيد اللامتناهي لهذه الفئة من الصفائح الطبقيّة، من المستحيل الحصول على نتائج عامّة. بدلاً من ذلك، اعتبرِ الفقرات العرضيّة للمثال المُستنبَط - ولكن الممَثِّل- على الصفيحة الطبقيّة اللامتناظرة في الشكل 5-36. تكون هنا الأليافَ في الطبقة الثانية من الأسفل متّجهةٌ دوماً وفق الزاوية °90، بينما تكون الألياف في جميع الطبقات الأخرى مُوجّهةً لتصنعَ الزاويةَ °0 مع المحور x للصفيحة. وهكذا، من أجل صفيحة طبقيّة ذات سماكةٍ ثابتة- تغدو طبقة الـــ °90 أرقَّ وتتحرّك باتّجاه أسفل الصفيحة الطبقيّة بازدياد عدد الطبقات. يمكن ألاّ نلاقيَ أبداً هذا المثال في الممارسات الهندسيّة، ولكنه مثالٌ بسيطٌ

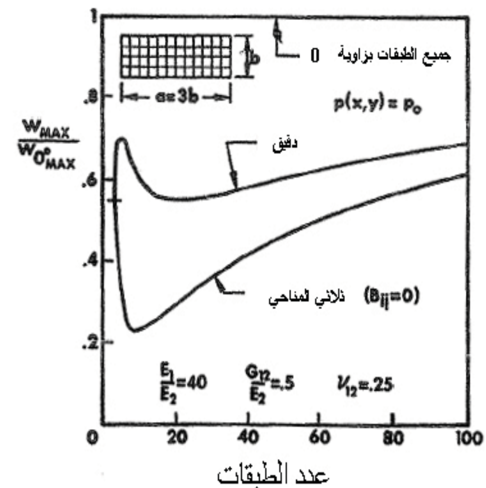
ومباشَر على صفائح طبقيّة لامتناظرة يمكن تحليلُه عبر دراسةٍ شاملةٍ مستفيضةٍ وباراميتريّة. سوف تُفيدنا النتائج التي نحصل عليها كبرهانٍ بسيطٍ جداً بطريقة التناقض، على أن التأثيرات الإنشائيّة للإقران انحناء–استطالة لا تتخامد بالضرورة سريعاً بازدياد عدد الطبقات (على خلاف نتائج الصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة والصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات الرقاقات المائلة). تتوفر مسبقاً في الفقرات من 3.5 إلى 5.5 النظريّةَ الصالحةَ للتطبيق.



الشكل 5– 36: مثال صفيحة متعددة الطبقات ذات رقاقات متصالبة لامتناظرة (عن جونز Jones [5–19])

يبيّن الشكل 5–37 الانحرافات المعيّرة الأعظميّة (في المركز) من أجل صفائحَ متعددة الطبقات مستطيلة لامتناظرة ذات رقاقات متصالبة، وخاضعةٍ لحمولةٍ عرضانيّة منتظَمة. تمّ الحصول على النتائج عبر جمع حلول الانحرافات الصحيحة، المعادلة (5.49)، لكلّ مركّبة النشر بمتسلسلة فورييه الجيبيّة من أجل حمولة عرضانية منتظمة، المعادلة (5.26). تبلغ قيمةُ النسبة الباعية للصفيحة 3، وهذه قيمةٌ تغدو معها النتائجُ مختلفةً بالشكل الأكثر ملفتاً للانتباه عن نتائج القيم القاعديّة (baseline) الموافِقة لصفيحةٍ طبقيّة ذات طبقات تميل كلُّها بزاوية $0°$ عن الاتجاه x (يكون فيها a=3b)، أو لصفيحةٍ طبقيّة لامتناظرة حيث يتمّ تجاهُل الإقران انحناء– استطالة ($B_{ij}=0$): وبالتالي يكون لدينا إمّا صفيحة طبقيّة ثلاثيّة المناحي أو صفيحة طبقيّة ثلاثيّة المناحي خاصة. تكون الصفيحة الطبقيّة اللامتناظرةِ أكثرَ جساءةً من الصفيحة الطبقيّة ذات الطبقات المائلةِ كلِّها بزاوية $0°$ (ويعني ذلك أن الانحناءَ في المركز يكون أقلّ في حالة الصفيحة الطبقيّة اللامتناظرة) وأكثر ليونةً من الصفيحة الطبقيّة ثلاثيّة المناحي.

سوف نرى أن الصفيحة الطبقيّة اللامتناظرة لها جساءة انحناء أكبر في الاتجاه y مقارنةً بالصفيحة الطبقية ذات الطبقات المائلة كلِّها بزاوية °0، بينما تكون جساءة الانحناء في الاتّجاه x متماثلةً في الحالتين. وهكذا، ينبغي أن يتجاوزَ الانحراف المركزي في الصفيحة متعددة الطبقات اللامتناظرة قيمتَه في الصفيحة متعددة الطبقات المائلةِ كلِّها وفق الزاوية°0 مع ذلك، نحن على درايةٍ مُسبقةٍ بأن الإقران انحناء- استطالة يُزيد الانحرافات، وبالتالي يجب فعلاً على الانحراف المركزي للصفيحة الطبقيّة اللامتناظرة أن يتجاوزَ قيمتَه في الصفيحة متعددة الطبقات ثلاثيّة المناحي.



الشكل 5- 37: انحراف تحت حمل عرضاني منتظم لصفائح غرافيت-إيبوكسي متعددة الطبقات ذات رقاقات متصالبة ولامتناظرة (عن جونز Jones ومورغان Morgan [5-23])

تكمن النقطة الرئيسية في هذا المثال في أن تأثير الانحراف التي نوقشت للتوّ مهمّةٌ جداً في حالة عددٍ من الطبقات، بينما استنتجنا في دراستنا السابقة في هذا الفصل عن الصفائح الطبقيّة معاكسة التناظر أن الإقران انحناء-استطالة يختفي في هذه الحالة!. يتجاوز إذاً الحلُّ الصحيح الحلَّ ثلاثيّ المناحي بـــ 165% عند 6 طبقات، وبـــ 165% عند 10 طبقات، وبـــ 90% عند 20 طبقة، وبـــ 30% عند 50 طبقة. وحتى عند 100

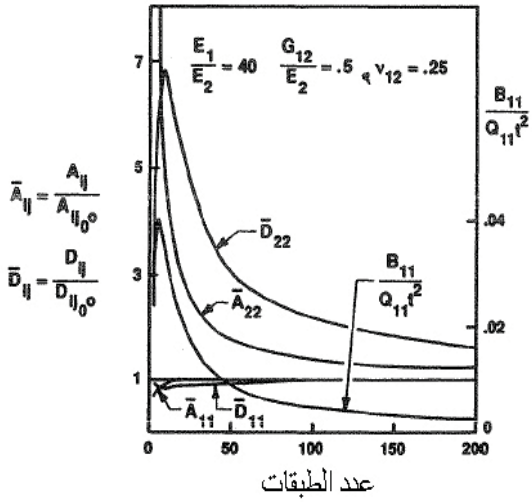
طبقة، يبقى الاختلاف بمقدار 11%. تقع هذه الاختلافات جيداً ضمن اعتبارات ممارسات التصميم الهندسي المألوفة. توجد هذه الاختلافات من أجل طبقاتٍ أكثر بكثير من الأهمية التي كان يُعتقد أنها تقترن بالإقران انحناء–استطالة. تمّ البرهان على هذا الاعتقاد (من قبل البعض، وليس الجميع) على قاعدة استيفاء (الاستكمال الخارجي extrapolating) نتائج الصفيحة ذات الرقاقات المتصالبة معاكسة التناظر والصفيحة ذات الرقاقات المائلة معاكسة التناظِر، مثل النتائج المعروضة في الفقرات من 2.5 إلى 4.5 من الواضح أن مثلَ هذا الاستيفاء غيرُ صالحٍ. مع ذلك، لا يمتلك أحدٌ في الحقيقة قاعدةً أفضل، باستثناء بقائه متشكِّكاً ومحاولته لاكتشاف ماذا يحدث فعلاً في الصفائح الطبقيّة اللامتناظرة.

وكأداةٍ مُساعِدةٍ لفهم سلوك الانحراف في الشكل 5–36، تم في الشكل 5–38 رسم معاملات الجساءة المعيَّرة للاستطالة، وللإقران انحناء– استطالة، وللانحناء بدلالة عدد الطبقات. تكون معاملات الجساءة في الاتّجاه x (الذي تصطف وفقاً له غالبية الألياف) $\bar{A}_{11},\bar{D}_{11}$ مستقلّةً تقريباً عن عدد الطبقات. مع ذلك، تتسبِّب الطبقةُ المائلةُ بزاوية $90°$ بانحراف معاملات الجساءة $\bar{A}_{22},\bar{D}_{22}$ في الاتّجاه y بمقدارٍ يصل إلى قيمة تتعدى قيمها في حالة الصفيحة الطبقيّة ذات الطبقات المائلةِ بزاوية $0°$ (هي تكون نفسَها في حالة عددٍ لا متناهٍ من الطبقات). تتخامد هذه الاختلافاتُ بشكلٍ بالغِ البطء مع ازدياد عدد الطبقات. فوق ذلك، تتخامد أيضاً ببطءٍ شديدٍ الجساءةُ المعيّرة للإقران انحناء– استطالة، التي يمكن تبيان أن عبارتها تكون:

$$\frac{B_{11}}{Q_{11}t^2}=\frac{1}{2N^2}\left[1-\frac{E_2}{E_1}\right](N-3) \qquad (5.117)$$

(حيث N عدد الطبقات)، التي تظهر في المعادلة (5.81) وتسمح بالتالي لمعاملات الجساءة A_{22} و D_{22} بالتأثير في حمولة الانبعاج. يحدث الإقران الأعظمي للانحناء– استطالة من أجل هذه الصفيحة الطبقيّة اللامتناظرة عند N=6. لا تحاول مقارنةَ مقادير (magnituites) الحدّي مثلاً $\bar{D}_{22}$ و$B_{11}/(Q_{11}t^2)$، بشكلٍ كمّيّ، فهي لا تملك نفسَ أساسَ المعايرة (لا يمكن تنظيم B_{11} بالنسبةِ إلى قيمته في صفيحة طبقيّة ذات طبقات مائلةٍ كلِّها بزاوية $0°$، لأن قيمتَه في هذه الحالة تساوي الصفرَ). وهكذا، يتخامد تأثيرُ طبقةٍ وحيدةٍ

متوضّعةٍ بشكلٍ لامتناظِرٍ وبزاوية °90 في الانحراف بشكلٍ بطيءٍ جداً بازدياد عدد الطبقات.

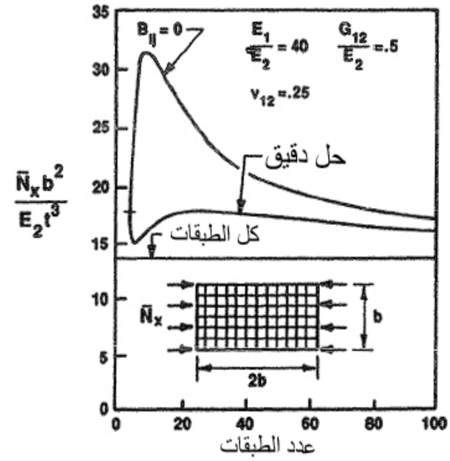


الشكل 5– 38: معاملات الجساءة المعيّرة لمثال صفيحة طبقية غرافيت–إيبوكسي ذات رقاقات متصالبة لا متناظرة (عن جونز Jones [5–19])

يُبيِّن الشكلُ 5–39 حمولاتِ انبعاج معيّرة من أجل صفائح متعددة الطبقات مستطيلة الشكل ذات رقاقات متصالبة لامتناظرة من غرافيت– إيبوكسي. تساوي النسبة الباعية للصفيحة القيمةَ 2، وهذه قيمةٌ تغدو معها النتائجُ مختلفةً بالشكل الأكثر ملفتاً للانتباه عن نتائج القيم القاعديّة (baseline). تتمثّل إحدى قيم المقارنة القاعديّة في حمولة الانبعاج لصفيحةٍ طبقيّة ذات طبقات تميل كلُّها بزاوية .°0 أمّا حالةُ المقارنة الأخرى فهي صفيحةٌ طبقيّة لامتناظرة، حيث يتمّ تجاهُل الإقران انحناء– استطالة (B_{ij}=0). توسَم نتائجُ الصفيحة الطبقية اللامتناظرة الفعليّة، التي تأخذ بعين الاعتبار الإقران بصفة "الحلّ الصحيح". تمتلك الصفيحةُ الطبقيّة الفعليّةُ، وبشكلٍ لا يدعو إلى الدهشة، مقاومةَ انبعاجٍ أقلّ منها في صفيحةٍ طبقيّة مع B_{ij}=0. من ناحيةٍ أخرى، تمتلك الصفيحة الطبقيّة الفعليّة مقاومةَ انبعاجٍ أكبر منها في الصفيحة الطبقيّة ذات الطبقات المائلةِ كلّها بزاوية °0. تنجم هذه النتيجةُ الغريبةُ عن القيم النسبيّة لمعاملات جساءة الانحراف في الاتجاهَين x وy،

وعن قيمة النسبة الباعية للصفيحة. كما سيظهر لاحقاً، تتناقص D_{11} نوعاً ما بوجود طبقةٍ مائلةٍ بزاوية °90، ولكن D_{22} في الوقت نفسه يزداد بمعاملات ضرب تصل إلى مرتبةِ مقدار ما. يمكن وبسهولة فحصُ تأثيرِ D_{22} من أجل صفيحةٍ ثلاثيّةِ الطبقات تكون – بالتأكيد، متناظرةً. وهكذا، يوافِق الحلُّ الصحيحُ الحلَّ ثلاثيّ المناحي خاصّ ($B_{ij}=0$)؛ فعلى سبيل المثال، لاحظِ العلامةَ الأفقيّة عند طبقاتٍ ثلاث في الشكل 5–39 حيث ينطبق منحنيان اثنان على بعضهما البعض. في هذه النقطة، يتمثّل الحلُّ ثلاثيّ المناحي خاصّ من أجل صفيحةٍ ذات نسبةِ باعية مساوية لـــ 2، وتتبعج نحو النمط m=1,n=1 بالعبارة

$$\overline{N}_x\ L^2 = \pi^2\left[\frac{D_{11}}{4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) + 4D_{22}\right] \qquad (5.118)$$



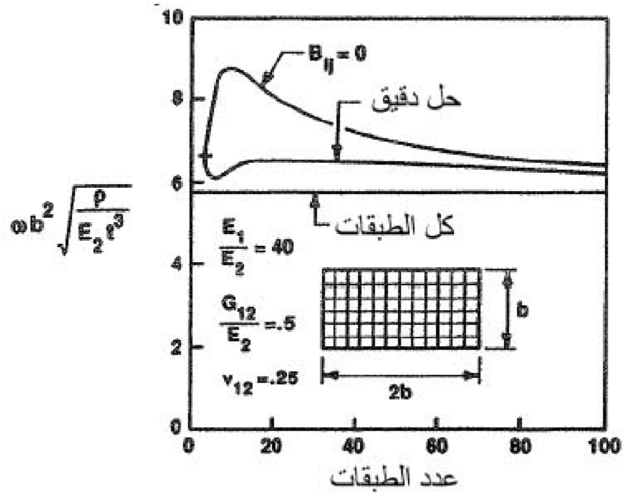
الشكل 5–39: حمولات الانبعاج المحورية لصفائح مستطيله غرافيت– إيبوكسي متعددة الطبقات ذات رقاقات متصالبة لا متناظرة (عن جونز Jones [5–19])

والتي يمكن الحصول عليها مباشرةً من المعادلة (5.81). يتناقص الحدّ المتضمّن لـــ D_{11} في المعادلة (5.118) بمقدارٍ أقلّ من 4% عندما يتمّ اعتبارُ الصفيحة الطبقيّة الفعليّة بدلاً من الصفيحة الطبقيّة ذات الطبقات التي تميل كلُّها بزاوية °0. تكون النتيجةُ الصافيةُ حمولةَ انبعاجٍ معيَّرة أكبر بـــ 33% في الصفيحة الطبقيّة الفعليّة منها في الصفيحة الطبقيّة ذات الطبقات التي تميل كلُّها بزاوية °0 .

تتراوح الاختلافاتُ بين توقع الحلّ الصحيح، والحلّ الموافِق للصفيحة ثلاثيّة المناحي خاصة، والحلّ الموافِق للصفيحة الطبقيّة ذات الطبقات التي تميل كلُّها بزاوية °0 في الشكل 5–39 من قيمةٍ أقلّ بـــ 48% من قيمة الحلّ ثلاثيّ المناحي خاصّ عند 6 طبقات إلى قيمةٍ أقلّ بـــ 6% عند 100 طبقة مروراً بقيمةٍ أقلّ بـــ 18% عند 40 طبقة. علاوةً على ذلك، تتراوح قيمُ النتائج الصحيحة من حوالى 30% أكبر من قيمة حلّ الصفيحة ذات الطبقات التي تميل كلُّها بزاوية °0 عند 30 طبقة، إلى 18% أكبر عند 100 طبقة. مرّة أخرى، تقع هذه الاختلافات وبشكلٍ مُريحٍ ضمن اعتبارات ممارسات التصميم الهندسي المألوفة.

يبيِّن الشكلُ 5–40 التردداتِ الطبيعيّةَ الأساسيّةَ المعيَّرة من أجل مثال الصفائح متعددة الطبقات اللامتناظرة ذات الرقاقات المتصالبة من غرافيت–إيبوكسي. تكون نتائج الاهتزاز مماثلةً لنتائج الانبعاج بالطريقةِ نفسها التي شُرحت من أجل الصفائح الطبقيّة معاكسة التناظر، ونعني بذلك اختلافاتٍ في ترددات الاهتزاز بسبب عامِل الجذر التربيعيّ.

يمكن أن ينجم عن تقريب الصفيحة الطبقيّة العامّة بصفيحةٍ طبقيّةٍ ثلاثيّة المناحي خاصّة أخطاءٌ كبيرةٌ موافِقةٌ لعامِل ضربٍ بـــ 3 وهكذا، ينبغي البرهان بدقّةٍ على تبرير استعمالِ التقريب ثلاثيّ المناحي خاصّ في كلّ من الحالات تحت الاعتبار. تذكّر دوماً أن هذا التقريب يؤدّي إلى نتائج غير محافظة (unconservative). وهكذا، هناك قاعدةٌ عامةٌ وحيدة تنصّ على أن الإقران انحناء– استطالة والإقران انحناء– فتل ينبغي أن يتمّ تضمينهما في أيّ تحليلٍ للصفائح متعددة الطبقات، ما لم يتمّ البرهان على أن إقراناً كهذا غيرُ مهمّ البتّة من أجل الصفيحة متعددة الطبقات المحددة قيد الدراسة.



الشكل 5-40: ترددات الاهتزاز الطبيعية الأساسية لصفائح غرافيت- إيبوكسي مستطيلة ذات رقاقات متصالبة لامتناظرة (عن جونز Jones [5-19])

مقاربات أكثر دقّةً للإقران انحناء-فتل

يمكن تقييم تأثيرات معاملات جساءة الإقران انحناء-فتل في الانحرافات، وفي حمولات الانبعاج، وفي الترددات الاهتزازيّة للصفائح متعددة الطبقات بشكلٍ أكثر دقّة ممّا عُرض في هذا الكتاب، وذلك باستعمال إجرائيّةٍ تعود إلى ويتني [5-24]. استعمل ويتني هنا نشراً بمتسلسلة مضاعفة لفورييه للانزياح المجهول من أجل تحقيق الشروط الحديّة الطبيعيّة، وبالتالي لتسريع التقارُب نحو النتائج الدقيقة. لاحظْ أن طريقةَ رايلي- ريتز الموصوفة هنا لا تحقّق الشروطَ الحديّة الطبيعيّة، وبالتالي يكون التقارب بطيئاً جداً، وأحياناً ليس نحو الحلّ الصحيح. كمثالٍ على ذلك، اعتبرْ صفيحةً من غرافيت-إيبوكسي مربّعةَ الشكل بسيطة الاستناد (E_1/E_2=25, υ_{12}=0.25, Q_{66}/Q_{22}=0.5)، وذاتَ اتّجاهات رئيسيّة للمادّة تصنع زاويةَ °45 مع أطراف الصفيحة. عندما تكون الصفيحةُ خاضعةً لضغطٍ ثنائيّ المحور ضمن المستوي $\bar{N}_x = \bar{N}_y$، فإن حمولات الانبعاج تعطى في الجدول 5-4 من أجل مقاربة ويتني ومقاربةِ رايلي- ريتز العائدة إلى أشتون (Ashton) [5-25]. من الواضح أن نتائج ويتني تتقارب سريعاً بالرغم من وجود بعض الاهتزاز. على خلاف ذلك، تتقارب نتائج رايلي- ريتز(؟) بطيئاً ونحو قيمةٍ خاطئة. بيّن أشتون أن معدّل تقارب طريقة رايلي-ريتز من أجل صفائح بسيطة الاستناد غير متماثلة

المناحي يعتمد على نسبة المعاملَين ثلاثيَّي المناحي E_1/E_2، عندما لا تتحقّق الشروط الحديّة الطبيعيّة [5–26]. وهكذا تكون نتائجَه في الجدول 5–4 متوقعة.

الجدول 5–4: انبعاج تحت ضغط ثنائي المحور لصفائح غرافيت–إيبوكسي مربعه غير متماثلة المناحي بسيطة الاستناد(*) (عن ويتني Whitney [5–24])

عدد الحدود في المتسلسلة m = n	$\bar{N}b^2/Q_{22}t^3$ تحليل فورييه لــويتني	$\bar{N}b^2/Q_{22}t^3$ تحليل رايلي–ريتز لآشتون
1	6.763	21.438
3	8.115	13.013
5	8.318	11.565
7	8.418	11.060
9	8.481	–
11	521,8	–
13	8.556	–

(*) $Q_{11}/Q_{22}=25$, $Q_{12}/Q_{22} = 0.25$, $Q_{66}/Q_{22}=0.5$، حيث تصنع الاتجاهاتُ الرئيسيّة للمادة زاويةً تساوي °45 بالنسبة إلى أطراف الصفيحة.

مقاربة جساءة الانحناء المُختزَلة

استقصى رايسنِر (Reissner) وستافسكي (Stavsky) في ورقتهما الرائدة عن الصفائح متعددة الطبقات مقاربةً تقريبيّة (approximate approach) (بالإضافة إلى مقاربتهما الصحيحة) لحساب الانحرافات والإجهادات من أجل صفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة [5–27]. قام أشتون بعد ذلك بوقتٍ طويل بتمديد مقاربتهما للاستجابة الإنشائيّة في صفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر، ودعاها طريقة "مصفوفة الجساءة المختزَلة" (Reduced Stiffness Matrix) [5–28]. تكمن جاذبيّة ما يُدعى الآن بطريقة "جساءة الانحناء المختزلة (reduced bending stiffness RBS)" في إمكانيّة معالجة الصفيحة متعددة الطبقات معاكسة التناظر كصفيحةٍ ثلاثيّة المناحي باستعمال مصفوفةٍ معدلةٍ واحدةٍ فقط في الحلّ، أي:

$$D^* = D - BA^{-1}B \tag{5.119}$$

أو في أسوأ الحالات كصفيحةٍ غير متماثلة المناحي إذا كانت المصفوفة *D مليئةً. وهكذا، يمكن استعمال التحاليل الموافقة لوجود معاملات جساءة انحناء فقط من أجل معالجة صفائح طبقية لامتناظرة تمتلك حقيقةً جميعَ مصفوفات الجساءة الثلاث، وذلك عبر استبدال العناصر المتنوّعة للمصفوفة D بالعناصر الموافِقة من المصفوفة .*D لاحظ أن هذا الاستبدالَ ذو معنى من ناحيةٍ فيزيائيّة، أي أن نقصانَ *D أقل من D يقود إلى انحناءاتٍ أكبر وإلى حمولاتِ انبعاجٍ وترددات اهتزازيّةٍ أدنى، ممّا يتّفق مع ما نعرفه عند وجود إقران انحناء−استطالة. مع ذلك، ينبغي البرهان على أن الحدّ $BA^{-1}A$ موجبٌ من أجل تبيان أنّ *D أقلّ من D (ولم يتمّ البرهان على ذلك إلاّ في حالة صفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات متصالبة وصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات متصالبة). يُبرهَن على أن المعامِل الصحيح للانحناء في المسألة أحاديّة البعد للانحناء الاسطواني لصفيحةٍ، التي دُرست في الفقرة 6.5 يأخذ الشكل:

$$D_{11}^{*} = D_{11} - \frac{B_{11}^{2}}{A_{11}} \qquad (5.120)$$

وهذا هو المُكافئ أحاديّ البعد للمعادلة (5.119)، ممّا يعني حقيقةً أن .D*<D حصل أشتون على تقريباتٍ دقيقةٍ بشكلٍ معقول عن نتائج ويتني من أجل الصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات متصالبة و صفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة، تحت تأثير حمولة عرضانيّة جيبيّة ومُنتظَمة [5−14]. هناك سيّئةٌ لتقريب RBS تكمن في عدم تضمين الشروط الحديّة الواقعة في مستوي الصفيحة، وبالتالي لا يوجد تمييزٌ بين الشروط الحديّة الأربع الموافِقة للحواف بسيطة الاستناد في المعادلة (5.11)، ولا بين الشروط الحديّة الأربع الموافِقة للحواف المُثبَّتة بمِلزَم في المعادلة (5.12). وهكذا، من غير المفاجِئ أن يحصل ويتني على فروق كبيرةٍ بين الحلول المتنوّعة الموافِقة للحافة المُثبَّتة بمِلزَم، وتقريب الـــ RBS، من أجل انحناء وانبعاج واهتزاز صفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات متصالبة وصفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة [5−29]. وجد إيوينغ (Ewing)، وهينغر (Hinger) وليسّا (Leissa) توافقاً ممتازاً (بخطأٍ أقلّ من 0.25%) من أجل انحناء وانبعاج واهتزاز صفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات متصالبة، مع افتراض الشروط الحديّة S2 [5−30]. مع ذلك، لقد وجدوا نتائجَ أقلّ توافقاً بكثير من

أجل صفائح متعددة الطبقات معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة مع افتراض الشروط الحديّة S3 (تقديرٌ زائد بمقدار 28% للانحناء الأعظمي، وتقديرٌ ناقص بمقدار 22% لحمولات الانبعاج، وتقديرٌ ناقص بمقدار 12% للترددات الاهتزازيّة، في وضع أسوأ الحالات لصفائحَ مربّعة الشكل وثنائيّة الطبقة مع زوايا $\pm 10^\circ$ (θ=10°). لسوء الحظ، لم يتمّ تحديد نوعيّة وجودة التقريب من أجل صفائح طبقية لامتناظرة فعلاً، مثل الصفائح الطبقيّة اللامتناظرة ذات الرقاقات المتصالبة في بداية الفقرة 6.5، أو الصفائحِ الطبقيّة القابلةِ للتطبيق بشكلٍ عمليٍّ أكثر.

المراجع

5-1 James M. Whitney, *Structural Analysis of Laminated Anisotropic Plates*. Pennsylvania: Technomic Lancaster, 1987. See also J. E. Ashton and J. M. Whitney, *Theory of Laminated Plates*. Westport, Connecticut: Technomic, 1970.

5-2 J. R. Vinson and R. L. Sierakowski, *The Behavior of Structures Composed Composite Materials*. Dordrecht, The Netherlands: Martinus Nijhoff, 1986.

5-3 Valery V. Vasiliev [Robert M. Jones (English Edition Editor)], *Mechanics of Composite Structures*. Washington, DC: Taylor and Francis, 1993.

5-4 J. N. Reddy, *Mechanics of Laminated Composite Plates: Theory and Analysis*. Boca Raton, Florida: CRC Press, 1997.

5-5 S. P. Timoshenko and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*. New York: McGraw- Hill, 1959.

5-6 B. O. Almroth, "Influence of Edge Conditions on the Stability of Axially Compressed Cylindrical Shells." *AIAA Journal*: January 1966, pp. 134-140.

5-7 Robert M. Jones and Jose C. F. Hennemann, "Effect of Prebuckling Deformations on Buckling of Laminated Composite Circular Cylindrical Shells." *AIAA Journal*: January 1980, pp. 110-115.

5-8 James Ting-shun Wang, "On the Solution of Plates of Composite Materials." *Journal of Composite Materials:* July 1969, pp. 590-592.

5-9 J. E. Ashton, *Anisotropic Plate Analysis, General Dynamics Research and Engineering Report*, FZM-4899, 12 October 1967.

5-10 Henry L. Langhaar, *Energy Methods in Applied Mechanics*. New York: John Wiley, 1962. (also Krieger, Malabar, Florida, 1982).

5-11 J. E. Ashton, "An Analogy for Certain Anisotropic Plates." *Journal of Composite Materials*: April 1969, pp. 355-358.

5-12 J. M. Whitney and A. W. Leissa, "Analysis of Heterogeneous Anisotropic Plates." *Journal of Applied Mechanics*: June 1969, pp. 261-266.

5-13 James Martin Whitney, "A Study of the Effects of Coupling between Bending and Stretching on the Mechanical Behavior of Layered Anisotropic-Composite Materials." (Ph.D Thesis, Department of Engineering Mechanics, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1968. (Available from University Microfilms, Inc., Ann Arbor, Michigan, as no. 69-5000.)

5-14 J. M. Whitney, "Bending-Extension Coupling in Laminated Plates under Transverse Loading." *Journal of Composite Materials*: January 1969, pp. 20-28.

5-15 Stephen P. Timoshenko and James M. Gere, *Theory of Elastic Stability*, New York: McGraw-Hill, 1961.

5-16 J. E. Ashton and M. E. Waddoups, "Analysis of Anisotropic Plates." *Journal of Composite Materials*: January 1969, pp. 148-165.

5-17 C. C. Chamis, *Thermostructural Response, Structural and Material Optimization of Particulate Composite Plates*, Case Western Reserve University, Report No. SMSMDD 21, Cleveland, Ohio, 1968.

5-18 J. F. Mandell, *Experimental Investigation of the Buckling of Anisotropic Fiber Reinforced Plastic Plates*, Air Force Materials Laboratory Technical Report AFML-TR-68-281, October 1968.

5-19 Robert M. Jones, "Buckling and Vibration of Rectangular Unsymmetrically Laminated Cross-Ply Plates." *AIAA Journal*: December 1973, pp. 1626-1632.

5-20 Robert M. Jones, "Plastic Buckling of Eccentrically Stiffened Multilayered Circular Cylindrical Shells." *AIAA Journal*: February 1970, pp. 262-270.

5-21 Robert M. Jones, *Plastic Buckling of Eccentrically Stiffened Circular Cylindrical Shells*, Aerospace Corporation Report No. TR-0158(S3816-72)-1, San Bernardino, California, December, 1967. See also: *AIAA Journal*: June 1967, pp. 1147-1152.

5-22 Robert M. Jones, Harold S. Morgan, and James M. Whitney, "Buckling and Vibration of Antisymmetrically Laminated Angle-Ply Rectangular Plates." *Journal of Applied Mechanics*: December 1973, pp. 1143-1144.

5-23 Robert M. Jones and Harold S. Morgan, "Deflection of Unsymmetrically Laminated Cross-Ply Rectangular Plates." Paper presented at: Proceedings of the 12th Annual Meeting of the Society of Engineering Science, 20-22 October 1975, Austin, Texas, pp. 155-167.

5-24 J. M. Whitney, *On the Analysis of Anisotropic Rectangular Plates*, Air Force Materials Laboratory Technical Report AFML-TR-72-76, August 1972.

5-25 J. E. Ashton, "Clamped Skew Plates of Orthotopic Material under Transverse Load." *Developments in Mechanics* (Iowa State University Press): vol. 5, 1969, pp. 297-306.

5-26 J. E. Ashton, "Anisotropic Plate Analysis-Boundary Conditions." *Journal of Composite Materials*: April 1970, pp. 162-171.

5-27 E. Reissner and Y. Stavsky, "Bending and Stretching of Certain Types of Heterogeneous Aeolotropic Elastic Plates." *Journal of Applied Mechanics*: September 1961, pp. 402-408.

5-28 J. E. Ashton, "Approximate Solutions for Unsymmetrically Laminated Plates." *Journal of Composite Materials*: January 1969, pp. 189-191.

5-29 J. M. Whitney, "The Effect of Boundary Conditions on the Response of Laminated Composites." *Journal of Composite Materials*: April 1970, pp. 192-203.

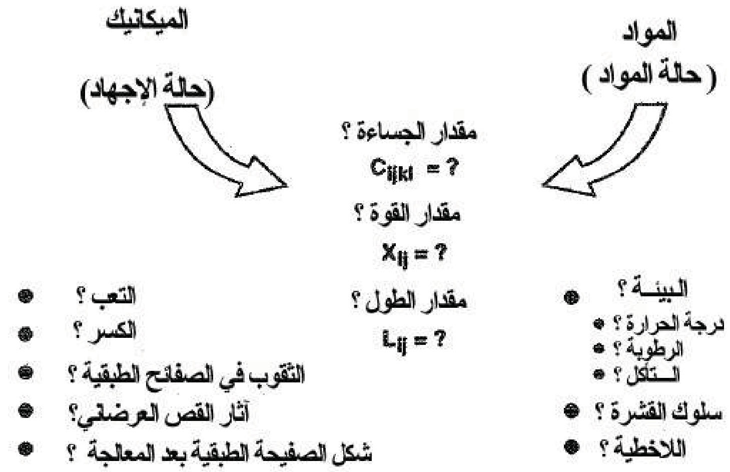
5-30 M. S. Ewing, R. J. Hinger, and A. W. Leissa, "On the Validity of the Reduced Bending Stiffness Method for Laminated Composite Plate Analysis." *Composite Structures*: vol. 9, 1988, pp. 301-317.

الفصل السادس

تحاليل أخرى وموضوعات سلوك

1.6 مقدّمة

يهدف هذا الفصل إلى تناول مخططات تقديمية لبعض قضايا السلوك الأساسي التي تؤثر في أداء المواد البنى. بمعرفة ميكانيكية المشكلة (حالة الإجهاد أساساً) وخلفية المواد للمشكلة (بشكل أساسي حالة المادة)، تكون الأسئلة الأساسية: (1) ما هي معاملات الجساءة، ما هي المتانات، وما هوعمر المادة أوالبنية المركبة وفق تأثرها بالقضايا السلوكية والبيئية في الشكل 6-1؟



الشكل 6- 1: الأسئلة الأساسية في المواد والبنى المركبة

2.6 مراجعة الفصول 1 حتى 5

عُرضت الطبيعة الأساسية للمواد المركبة في الفصل الأول. وعُرض مخطط تفصيلي عام ووُصفت بطريقة وصفية أوجه السلوك الميكانيكي للمواد المركبة التي تختلف

عن تلك المواد التقليدية. خُصّص بعدها الكتاب للمواد المركبة الصفائحية المقواة بالألياف. عُولجت بعد ذلك التعاريف الأساسية وكيفية تصنيع مثل هذه المواد. نُوقشت أخيراً الميزات الحالية والكامنة (potential) للمواد المركبة مع قصص حالات تكشف بوضوح كيف تُستخدم المواد المركبة في الإنشاءات.

تم بشكلٍ كمّيٍّ وصف السلوك الميكانيكي الماكروي للرقاقة في الفصل الثاني. كما تم تفحّص علاقات الإجهاد- انفعال ثلاثية الأبعاد الأساسية للمواد المرنة غير متماثلة المناحي وثلاثية المناحي. وتم بالتالي تخصيص هذه العلاقات لحالة الإجهاد في المستوي الموجودة عادة في الرقاقة. تم بعدها تحويل علاقات الإجهاد في المستوي إلى مستوي الرقاقة للتمكن من معالجة الصفائح الطبقية المركبة ذات الرقاقات المختلفة الزوايا المتعددة. تم تحديد ومناقشة المتانات الأساسية المتعددة للرقاقة، ومن ثم استخدامها في معايير المتانة ثنائية المحور للتوقع بمتانة الرقاقة خارج محور.

تم معالجة السلوك الميكانيكي الميكروي للرقاقة في الفصل الثالث. كما تم استعمال كلٍّ من مقاربتي ميكانيك المواد والمرونة للتوقع بمعاملات الجساءة الأساسية للرقاقة ومقارنتها بمعاملات الجساءة المقاسة. وتم استعمال مقاربة ميكانيك المواد للتوقع بالمتانات الأساسية للرقاقة.

تم في الفصل الرابع ربط مجموعة من وحدات البناء الأساسية، رقاقة، مع بعضها البعض لتشكيل صفيحة طبقية. وتم تغطية محددات السلوك في الفقرة حول نظرية التصفيح التقليدية. ونُوقشت حالات خاصة من الصفائح الطبقية بغية تعلم خصائص الصفيحة الطبقية وسلوكها ومن ثم مقارنة معاملات جساءة الصفيحة الطبقية المتوقعة والمقاسة، وذلك لإعطاء الاعتماد لنظرية التصفيح التقليدية، ثم نوقشت متانة الصفائح الطبقية ووُجد أنه يمكن التوقع بها بشكلٍ معقول. أخيراً، تم تحليل الإجهادات مابين الطبقات بسبب تأثيرها القوي ظاهرياً في متانة الصفيحة الطبقية (وعمرها).

وفي الفصل الخامس، تم تفحُص تأثير خصائص الصفيحة الطبقية المركبة في تحليل الانحناء والانبعاج والاهتزاز للصفائح. في البداية، تم تقديم المعادلات التفاضلية الناظمة. وبعدها، جرى تحليل كلٍّ من المشاكل البنيوية الأساسية لصفائح مستطيلة متعددة

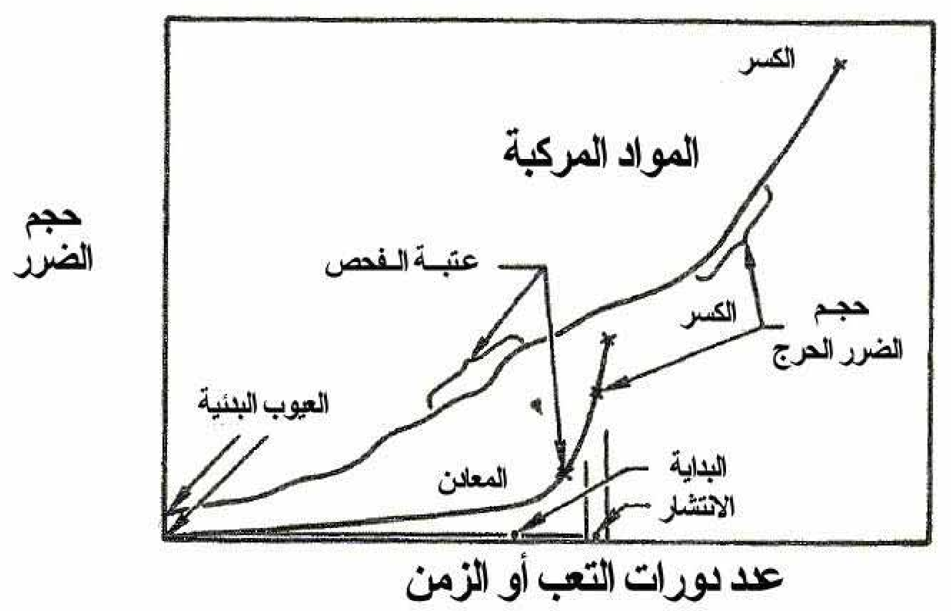
الطبقات بسيطة الاستناد ثلاثية المناحي وغير متماثلة المناحي ذات رقاقات متصالبة معاكسة التناظر وذات رقاقات مائلة. وفيما بعد، تم تقييم تأثير الإقران انحناء- فتل وانحناء-استطالة في الاستجابة البنيوية مع إعطاء اهتمام خاص للصفائح الطبقية العامة حيث يمكن أن تكون هذه التأثيرات هامة.

من الواضح أن الوصف السابق للمشكلات في ميكانيك المواد المركبة غير كامل. فبعض المواضيع لا تتناسب جيداً مع الإطار المنطقي الموصوف. كما أن بعض الموضوعات تعتبر متقدمةً جداً لكتاب تمهيدي حتى على مستوى الخريجين، لذلك، تُكرّس بقية هذا الفصل لمناقشة موجزة لتحليل بعض الرقاقات والصفائح الطبقية الأساسية وخصائص السلوك غير المُتضمَنَة في الفصول السابقة.

3.6 التعب

يُمكن أن يكون تعب (fatigue) العنصر الإنشائي عاملاً تصميمياً جوهرياً في بعض التطبيقات. فحوادث سقوط الطائرات الناجمة عن أعطاب التعب معروفة جيداً. لذلك، فالسؤال الواضح هو: كيف تُقارن خصائص التعب للمواد المركبة بتلك في المعادن التقليدية؟ والجواب بإيجاز هو، أفضل بكثير! وتخميد (damping) المادة أوالتخميد الداخلي للمواد المركبة عالٍ، ومع ذلك تكون خصائص التعب جيدةً تماماً.

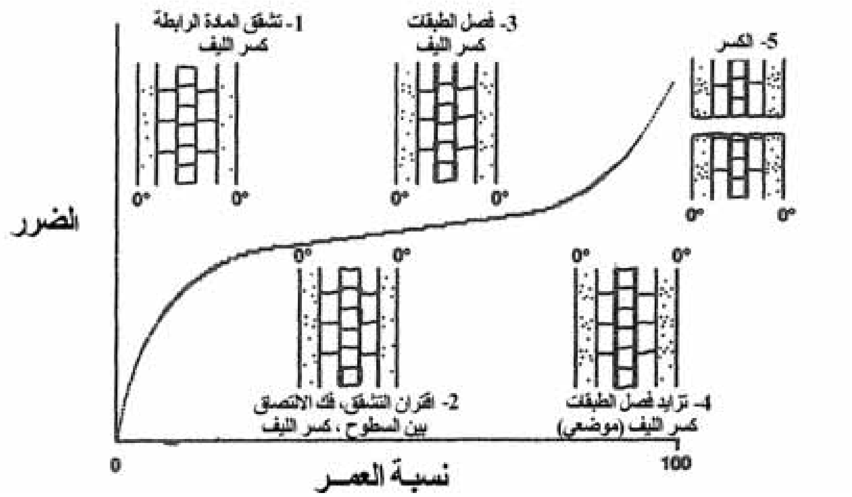
يعطي الشكل 6-2 [6-1] بيانياً أحد أهم الأسباب لهذا الحدث السعيد. وهنا، يمكن أن تكون العيوب البدئية في المواد المركبة مثل أليافٍ مكسورة فصل الطبقات وتشقق، المصفوفة، والانفصال والفقاعات، الخ، أكبر بكثير من العيوب الموافقة مثل الشقوق في المعادن التقليدية. بالمقابل، يكون العيب البدئي في المعدن ببساطة مجرد شق صغير. مع ذلك، يكون نموالضرر في المعدن تقليدياً فجائياً أكثر بكثير، كما يتبيّن في الشكل 6-2، ولهذا السبب فهوبصورة كامنة أكثر خطراً منه في المادة المركبة.



الشكل 6-2: سلوك ضرر التعب للمواد المركبة والمعادن (عن سالكايند Salkind [6-1])

تخضع المواد المركبة لعددٍ من أنماط الضرر المختلفة خلال التعب، كما في الشكل 6-3. وهنا، تتميز المرحلة الأولى بتشقق المصفوفة وتكسّر الليف. وتتألف المرحلة الثانية من تزاوج الشقوق مع فك الترابط عند السطوح البينية بالإضافة إلى تكسّر الليف. وتتضمن المرحلة الثالثة فصل الطبقات وكذلك تكسّر الليف.

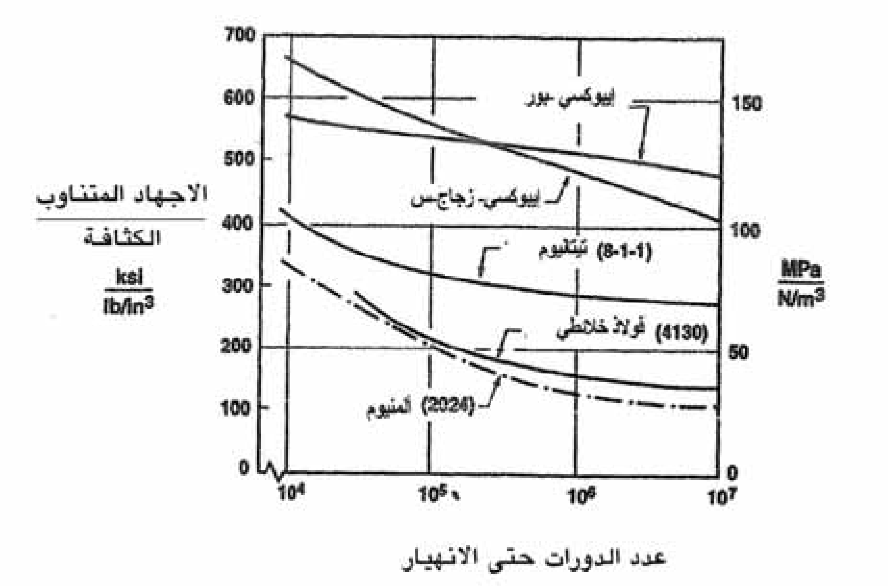
تمتلك المرحلة الرابعة نموفصل الطبقات مع تكسّر الليف موضعياً، وتكون المرحلة الخامسة عبارة عن كسرٍ إجمالي لكامل المادة. يُمثِّل هذا الشكل قاعدةً لمقاربة ميكانيك الضرر المستعمل من قبل ريفس نايدر وهينيك وستينكومب وديوك [6-2].



الشكل 6–3: أنماط الضرر خلال عمر التعب (عن رايفسنايدر Reifsnider، وهينيكي Henneke وستينكومب Stinchcomb وديوك Duke [6–2])

بسبب أنماط الضرر العديدة ونموالضرر في المواد المركبة، يصعب توصيف الحالة البدئية للمادة، إن لم يكن مستحيلاً. علاوة على ذلك، فإنه من الأصعب صياغة مسألة قيمٍ حدودية من أجل وصف انتشار الشق في المواد المركبة مقارنةً بالمعدن.

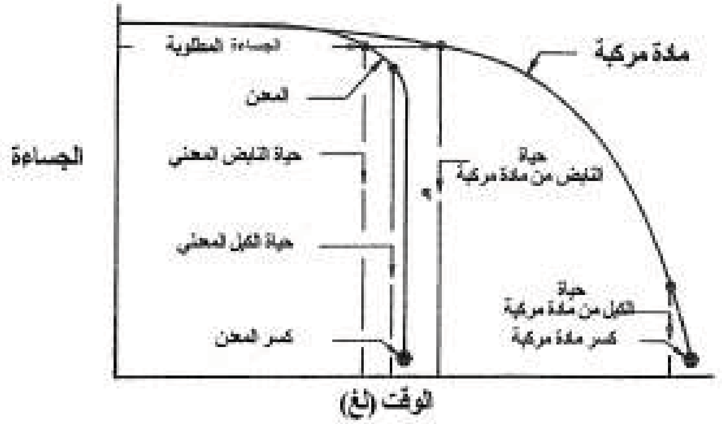
يوضح الشكل 6–4 منحنيات S–N تقليدية (إجهاد مقابل عدد الدورات) لمعادن ومواد مركبة متعددة [6–3]. يكون منحنى المادة المركبة البورون– إيبوكسي أكثر تسطحاً من منحنى الألمنيوم ومن منحنيات أيٍّ من المعادن المعروضة كذلك. إن حساسية المواد المركبة لتأثير تركيز الإجهاد مثل ذلك الناتج من الأثلام (الحزوز) أوالثقوب إلخ، هي أقل بكثير من المعادن. وبالتالي فإن الميزة البدئية للبورون–ايبوكسي في متانة أعلى من الألمنيوم، كما في الشكل 6–4 تزداد في الواقع تحت ظروف التعب. إن هذه الميزة في ازدياد العمر وازدياد المتانة النوعية والجساءة، كذلك مقارنةً بالمعادن التقليدية هي أحد الأسباب الرئيسية للتوسع السريع في استعمال المواد المركبة. راجع سالكايند [6–4] خصائص التعب للمواد المركبة. واستعمل آيزن مان وكامنيسكي وفيد وويلكينس [6–5] خصائص التعب كأساس لإجرائية الوثوقية (reliability) للمواد المركبة. وصف تالريجا عملية التعب وضرر التعب ووثوقية التعب في كتاب حول عمله [6–6].



الشكل 6-4: معطيات التعب شد- شد النمطية (عن بينكني Pinckney [6-3])

يملك التعب تأثيراً قوياً في جساءة المادة المركبة، بالإضافة إلى تأثير المتانة الذي سبق نقاشه. يُظهر الشكل 6-5 وصفياً التغاير بين معدن تقليدي كالفولاذ ومادة مركبة مثل غرافيت- ايبوكسي على قاعدة الجساءة المقاسة مقابل العمر. هنا، يحافظ المعدن عادةً على معظم جساءته حتى نسبة مئوية عالية من مضي عمره وبعدها تنخفض الجساءة بشدةٍ. بالمقابل، تفقد المادة المركبة الجساءة تدريجياً وبشكلٍ هام خلال عمرها.

هنالك انعكاسان واضحان من الشكل 6-5. الأول، أن المواد المركبة تمتلك أعمار تعب أطول عادةً من أعمار تعب المعادن. ثانياً، تعطي المواد المركبة إنذاراً بأن المادة تفقد عمرها، بمعنى أنه يُلاحظ انخفاض هامٌّ في الجساءة. مهما يكن، لا تعطي المعادن عملياً أيَّ تحذير بأن عمرها قد انتهى. ويمكن استعمال هاتين الخاصيتين للاستفادة منهما في تطبيقين إنشائيين مختلفين؛ الكابلات والنوابض.



الشكل 6–5 سلوك جساءة المعدن مقابل المادة المركبة في التعب (عن سالكايند Salkind [6–4])

يعتمد عمر الخدمة للكابلات في المصاعد والرافعات على 95% من عمر التعب للمادة. في مثل هذه الظروف، يمكن أن يدوم كبل المادة المركبة لفترة أطول بكثير من الكبل المعدني. علاوة على ذلك، فإن طول كبل المادة المركبة، إذا قيس، سوف يكون أطول من طوله الأصلي مع مرور الزمن (يجب أن تتم تضبيط المصعد بشكل دوري ليقف عند كل طابق بدقة). إذا سُجلت مثل هذه القياسات، فستكون دليلاً مسجلاً عن أداء الكبل وإشارة إلى ما قد يأتي. وليس للكابلات المعدنية مثل هذه الإشارة. يمكن، بوضوح، أن يؤدي تجاوز عمر الخدمة بـــ 5% لانقطاع الكبل لكلتا المادتين.

يمكن على الأرجح أن يعتمد عمر خدمة النوابض مثل تلك في السيارات أوالشاحنات على مستوى محدد أدنى للجساءة. وفي حالةٍ أخرى، ستسمح النوابض المرنة جداً للمركبة أن ترتخي للأسفل بحيث أن أجزاءً منها يمكن أن تجر على الطريق، أوأن لا تؤدي دورها بشكلٍ صحيح. من الشكل 6–5، يمكننا أن نقول بأن عمر نابض من مادة مركبة يفوق كثيراً عمر نابضٍ معدني. يؤدي هذا إلى ميزة اقتصادية قابلة للقياس للنوابض المركبة. تكمن الميزة الأكثر أهمية للنوابض المركبة مقارنة بالنوابض المعدنية في أنه إذا استعملت النوابض المركبة خارج عمر خدمتها المعتمد على حد أدنى من

الجساءة فإنها لن تنهار أوتتكسر، بينما سوف تتكسر النوابض المعدنية دون تحذير. وسوف تُظهر النوابض المركبة إنذاراً واضحاً بالانفعال المفرط قبل وقت طويل من الإخفاق بالكسر. بالتالي، تمتلك النوابض المركبة مخزوناً داخلياً من الجساءة، مع تحذير آلي لصعوبةٍ وشيكة.

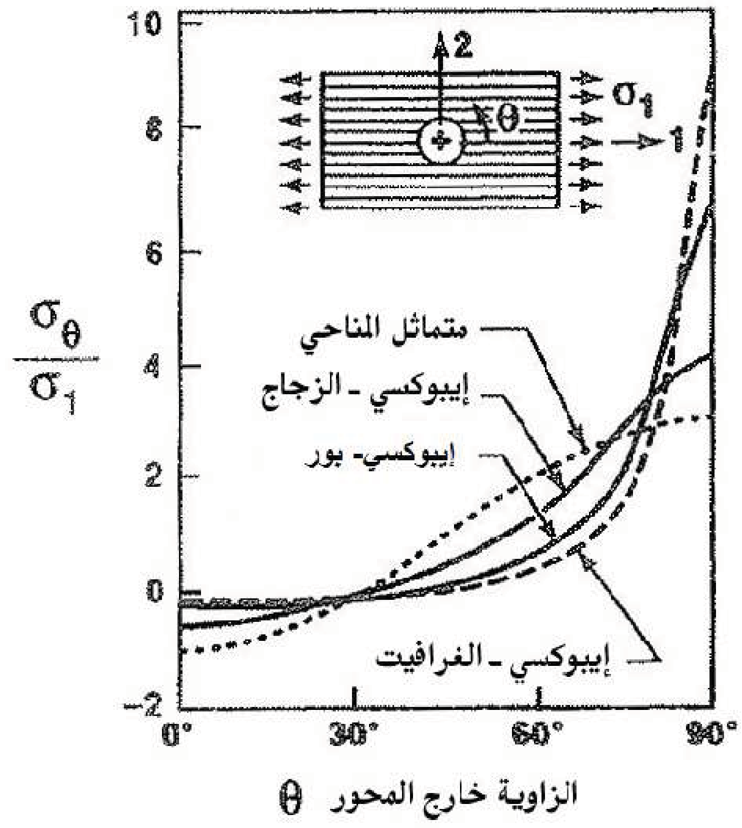
4.6 الثقوب في الصفائح الطبقية

مثل أية بنية، يجب أن تحتوي الصفائح الطبقية على ثقوبٍ لخدمة أغراضٍ عديدة. أحد الأغراض الواضحة هوالتكيّف مع مسمار ملولب (برغيٍ). الهدف الآخر هوالوصول من جهة في الصفيحة الطبقية إلى الجهة الأخرى. يعتبر تحليل الإجهادات حول الثقوب من الصعوبة بمكان.

أعطى ليخنيتسكي واحداً من الحلول الأولية لمشكلة الإجهادات حول ثقب إهليلجي في صفيحة لا متناهية وغير متماثلة المناحي [6–7]. ويُشكّل كتاب سافين (Savin) ملخصاً شاملاً أكثر حداثة لهذه المشكلة ولعددٍ غيرها. وقد عُرضت نتائج عديدة من قبل ليخنيتسكي (Lekhnitski) في كتابه [6–9 و6–10]. وتتمتع حالتان خاصتان بأهميةٍ خاصة.

في الأولى، يُطبق الإجهاد في أحد الاتجاهات الرئيسية للمادة لصفيحة ثلاثية المناحي، كما في الشكل 6–6. هنا، رسم غريسكوك [6–11] الإجهاد الدائري المحيطي حول الثقب لمادة متماثلة المناحي ولعدد من المواد المركبة أحادية الاتجاه. لاحظ أن عامل تركيز الإجهاد الاعتيادي لمادة متماثلة المناحي هو 3، أي أن $\sigma_{\theta 1}/\sigma_1 = 3$ عند الزاوية $\theta = 90°$. ويكون عامل تركيز الإجهاد للمواد المركبة أكثر بكثير (4 للزجاج – ايبوكسي، وحوالى 6 للبورون– ايبوكسي، و9 للغرافيت– ايبوكسي). علاوة على ذلك، يكون الإجهاد الدائري المحيطي عند الزاوية $\theta = 0°$ منخفضاً للمواد المركبة بالنسبة إلى المواد متماثلة المناحي. وبسبب كون خصائص المادة متماثلة المناحي، فإن العامل المفتاح في إخفاق الصفائح متماثلة المناحي ذات ثقوب هومقدار عامل تركيز الإجهاد الذي يتم الحصول منه على إجهاد (الإخفاق) الأعظمي. مهما يكن، يجب استعمال معيار موحّد لإجهاد الإخفاق للمواد ثلاثية المناحي عوضاً عن معيار إجهاد إخفاق أعظمي، كما هو

مبين في الفقرة 9.2. كذلك، فإن الكثير من المواد الهندسية مثل الفولاذ أوالألمنيوم تكون لدنةً كفاية للخضوع والمواءمة مع تراكيز الإجهاد الموضعية في جوار تركيز الإجهاد. مهما يكن، تعتبر معظم المواد المركبة أقل مطاوعةً بشكلٍ كبيرٍ من المعادن متماثلة المناحي. وبالتالي، تُظهر المواد المركبة اثنتين من المساوئ هما تراكيز إجهاد عالية وقدرة على الخضوع أقل من المعادن متماثلة المناحي. على ذلك، يبيّن الشكل 6-6 أن عوامل تركيز الإجهاد وحدها غير كافية للتوقع بإخفاق الصفائح ثلاثية المناحي (وغير متماثلة المناحي). علاوة على ذلك، إذا كانت الصفيحة متعددة الطبقات، يجب أن تتم مقارنة حالات الإجهاد بحالات إجهاد الإخفاق على أساس طبقة – بطبقة.

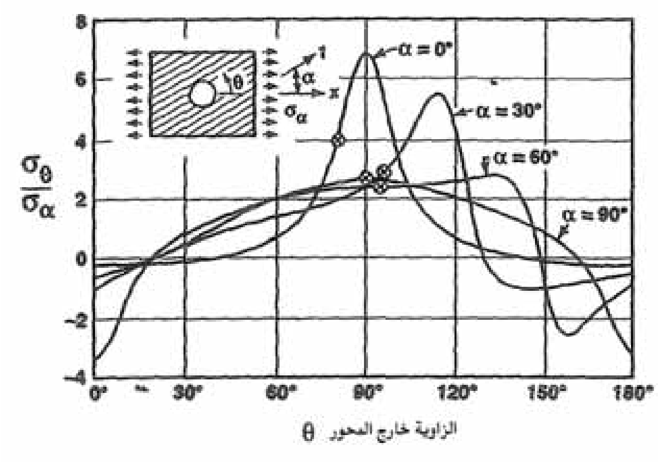


الشكل 6-6: تأثير خصائص المادة في الإجهاد المحيطي σ_θ عند حافة الثقب الدائري في الصفيحة ثلاثية المناحي تحت σ_1 (عن غريتشوك Greszczuk [6-11])

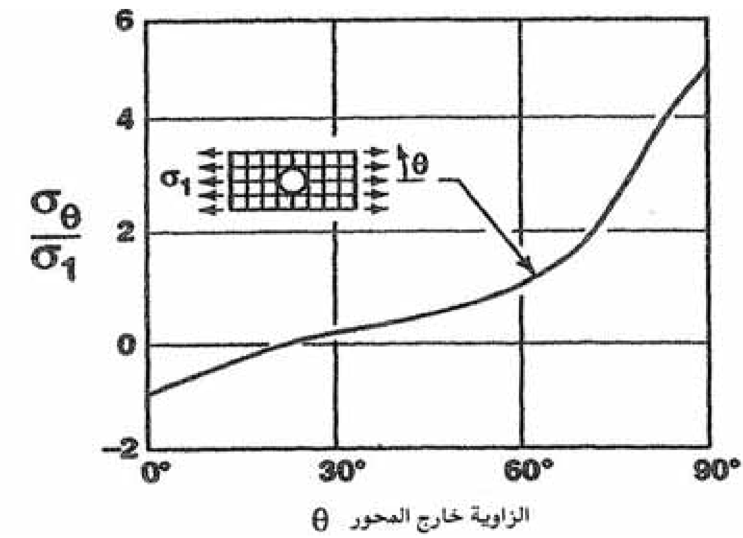
الحالة الخاصة الثانية هي الرقاقة ثلاثية المناحي المحملة عند زاوية θ بالنسبة إلى الألياف. تعتبر مثل هذه الحالة فعلياً رقاقةً غير موحّدة المناحي تحت الحمل. حصل غريتشوك (Greshchuk) على عوامل تركيز الإجهاد للبورون– ايبوكسي [6–11] في الشكل 6–7. تم هنا رسم الإجهاد المحيطي حول حافة الثقب الدائري بدلالة الموضع الزاوي حول الثقب. جرى تنظيم الإجهاد المحيطي بواسطة الإجهاد المطبق σ_α. تكون بالطبع النتائج من أجل الزاوية α=0° مطابقة لتلك في الشكل 6–6. عندما تصل الزاوية α إلى 90°، فان قمة عامل تركيز الإجهاد تنخفض وينزاح مكانها حول الثقب. مهما يكن، وكما هومبيّن، فإن حالة الإجهاد الموحّد عند الإخفاق، بعد تطبيق معيار الإخفاق، يحصل دائماً قرب $\theta = 90°$. لهذا، يكون تحليل الإخفاق العائد لتراكيز الإجهاد حول الثقوب في الرقاقة مشوشاً ومعقداً جداً.

تكون الخطوة التالية الواضحة هي توسيع التحليل إلى صفيحة طبقية. اعتبر غريتشوك صفيحة طبقية متناظرة ذات رقاقات متصالبة معرّضة للشدّ في اتجاه الألياف [6–11]. يبيّن الشكل 6–8 تركيز الإجهاد الناتج. كما تم سابقاً، يتم تنظيم الإجهاد المحيطي بواسطة الإجهاد المطبق. ومع ذلك، فالإجهاد المحيطي لا يكون إجهادَ الرقاقة الأعظمي بل إجهاداً إجمالياً على كامل الصفيحة الطبقية، أي أنه في الواقع N_θ / t حيث يمثل N_θ القوة المحيطية في وحدة العرض وt سماكة الصفيحة الطبقية. يتم إيجاد الإجهادات في كل رقاقة باستعمال المفاهيم في الفقرة 2.4 ، نظرية التصفيح التقليدية.

يُحدد الإخفاق بتطبيق معيار الإجهاد ثنائي المحور على كل طبقة. بالتالي، فتأثير الثقوب في سلوك صفيحة طبقية يكون أكثر تعقيداً منه في سلوك رقاقة أوصفيحة. تمّ تجاهل الإجهادات بين الطبقات التي تم دراستها في الفقرة 6.4. وهكذا، تكون الإجهادات المتوقعة غير دقيقة ضمن حوالى سماكة واحدة للصفيحة الطبقية من الحافة.

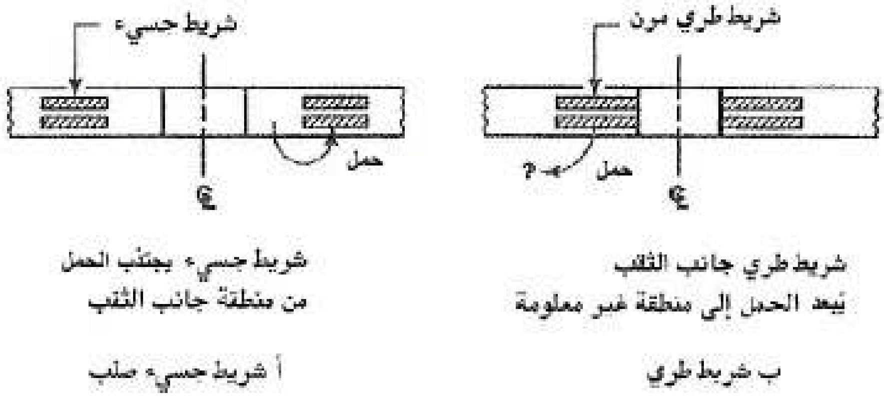


الشكل 6-7: تركيز الإجهاد عند حافة الثقب الدائري في الصفيحة ثلاثية المناحي عامة الخاضعة لإجهاد عند الزاوية α بالنسبة إلى اتجاه المادة الرئيسي (عن غريتشوك Greszczuk [11-6])



الشكل 6-8: تركيز الإجهاد عند حافة الثقب الدائري في صفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة (عن غريتشوك Greszczuk [6-11])

إن تأثير تركيز الإجهاد الإجمالي حول الثقوب في الصفائح الطبقية المركبة يمكن اختزاله وفق أسلوبين مختلفين فريدين في المواد المركبة ليس لهما شبيه في الممارسة العملية للبنى المعدنية. يدعى الأسلوب الأول مفهوم الشريط المقوي الذي يتضمن وضع شرائط من مادة مركبة أكثر جساءةً في منطقة بعيدة عن الثقب كي تجتذب الحمل (بعيداً عن حدود الثقب)، كما في الشكل 6-9. وهنا، نحن نعلم أين سيؤخذ الحمل في الصفيحة الطبقية. بالمقابل، في الأسلوب الثاني، مفهوم الشريط الطري، يوضع شريط من مادة مركبة أقل جساءةً (أطرى) تماماً بجانب كلً ثقب لإبعاد الحمل الذي يكون اعتيادياً مركزاً قرب الثقب إلى منطقة أخرى من الصفيحة الطبقية. مهما يكن، فنحن لا نعرف أين سيتم تحمُّل الحمل، أوعلى الأقل أين لن يتم تحمُّله. يُستعمل كلا المفهومين عادةً في ممارسة التصميم.



الشكل 6-9: مفاهيم لإنقاص تركيز الإجهاد حول الثقوب

5.6 ميكانيك الكسر

ترتبط متانة أي مادة بشكلٍ طبيعيٍ بالتصدعات (الشقوق) الموجودة دائماً. على وجه الدقة، تُحكم متانات المواد المركبة بخصائص صدوعها البدئية. من هنا، يتمتع ميكانيك الكسر وضمناً نموأوتوسع الشق بأهمية قصوى في تحليل تصميم البنى المركبة. وتشكل معايير ميكانيك الكسر الآن جزءاً من أيّ تصميم لطائرة معدنية. وقد وُضعت هذه الخطوة من قبل القوة الجوية (Air Force) الأمريكية كنتيجة لمشاكل الكسر والتعب على

طائرات F-111 وC5-A وElectra الخ. ويُنتظر في المستقبل القريب أن تمتلك تطبيقات المواد المركبة أيضاً معايير ميكانيك الكسر التصميمية المفروضة.

تمر عملية الكسر بثلاث مراحل. أولاً، يبتدئ شقٌ ميكروي (أويوجد صدعٌ مُسبق أوعيب). ثانياً، ينموالشق الميكروي بشكلٍ مستقر، ويمكن أن يتصل مع شقوق ميكروية أخرى ليبلغ حجم شق جهريٍ ماكروي. ثالثاً، ينتشر الشق الماكروي بشكلٍ غير مستقر عند مستوى إجهاد حرجٍ. وجدت هذه المراحل الثلاث وحددت بوضوح في المواد اللدنة فقط. ولم يُعثَر على بعض المراحل، مثل المرحلة الثانية، في المواد القصفة (الهشة). وتعتبر متانة انتشار الكسر ميّزة بارزةً للمواد المركبة بسبب مطاوعة المصفوفة (matrix) وقابلية الألياف لإيقاف الشق عند السطح البيني ليف–مصفوفة.

ينتج الكسر عن الإجهادات الأعلى حول الصدوع أوالشقوق منه في المادة المحيطة. مهما يكن، يُعتبر ميكانيك الكسر أكثر بكثير من دراسة عوامل تركيز الإجهاد التي تُعدّ مفيدة في تحديد تأثير الثقوب الكبيرة نسبياً في الأجسام (انظر الفقرة 3.6، الثقوب في الصفائح الطبقية)، ولكنها لا تساعد بوضوح عندما يحتوي الجسم على أثلام أو صدوع شبيهة بالشقوق. في المواد المركبة، يمتلك الكسر بعداً جديداً مقارنةً بالمواد المتجانسة متماثلة المناحي، وذلك بسبب وجود مكوّنين أو أكثر. يمكن أن يكون الكسر كسراً في أحد المكوّنات المنفردة أوانفصالاً للسطح البيني بين المكوّنات.

سوف تُقسم مناقشة ميكانيك الكسر إلى جزأين. في الأول، ستُشرح المبادئ الأساسية لميكانيك الكسر. وفي الثاني، سيتم مناقشة تطبيق مفاهيم ميكانيك الكسر على المواد المركبة. في كلا الجزأين، تكون المقاربة الأساسية هي مقاربة فو (Wu) [12-6].

1.5.6 مبادئ أساسية في ميكانيك الكسر

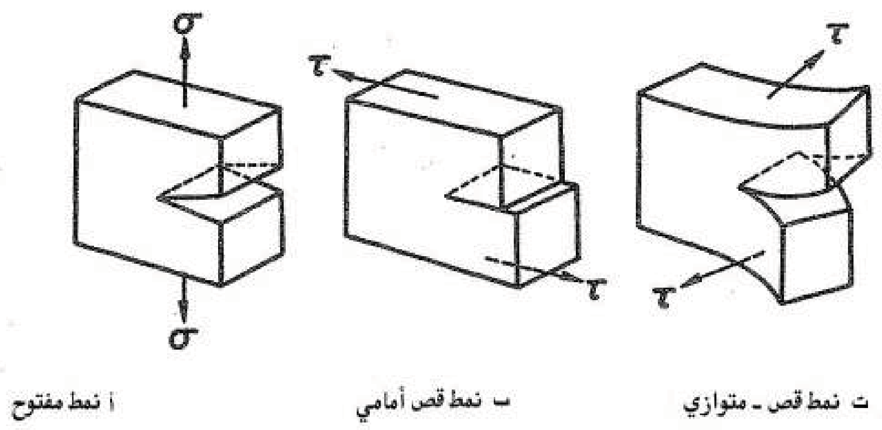
يُعتبر أ. أ. غريفيث (A. A.Griffith) الأب المعترف به لميكانيك الكسر [13-6]. تكمن مساهمته الرئيسية في تحليل استقرارية الشق بالاعتماد على توازن الطاقة. إذا كان الشق في حالة توازن، يجب أن يكون الانخفاض في طاقة الانفعال U مساوياً للزيادة في طاقة السطح S بسبب توسع الشق، أي إن:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\partial S}{\partial a} \tag{6.1}$$

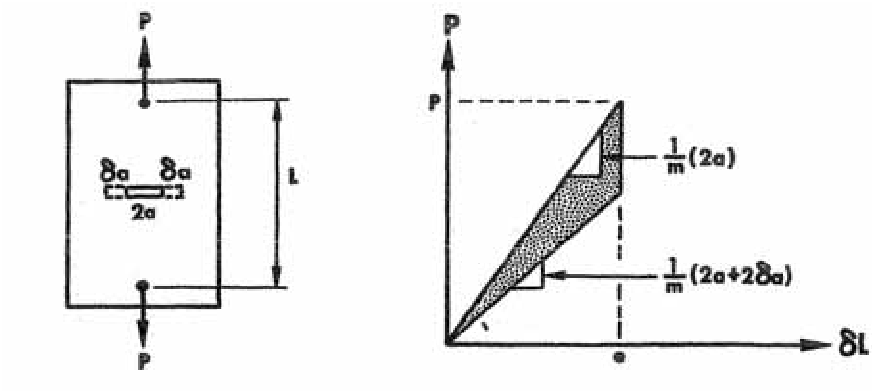
حيث a طول الشق. إن معدل تحرير طاقة الانفعال، $\partial U/\partial a$، هو في الواقع قوة توسيع الشق. قبل مقاربة غريفيث، أدى تطبيق مفاهيم المرونة التقليدية إلى إجهادات لا نهائية عند طرف الشق.

وسَّع إروين (Irwin) [6–14] نظرية غريفيث إلى المواد المرنة– اللدنة، وأشار إلى ثلاثة أنماط حركية مقبولة لتوسُّع الشق، كما هوموضح في الشكل 6–10. ويمكن جمع هذه الأنماط، الفتح والقص الأمامي والقص المتوازي، للحصول على أيّ شق.

سوف يقتصر الانتباه إلى معدل تحرير طاقة الانفعال من أجل نمط الفتح الذي يحدث للصفيحة ذات الشق المتموضع في المركز بطولٍ قدره 2a، وتحت حمل P، كما في الشكل 6–11.



الشكل 6–10: أنماط توسع الصدع



الشكل 6-11: صفيحة متصدعة ومخطط الحمل- انفعال (عن فو Wu [6-12])

طاقة الانفعال في الصفيحة هي:

$$U = \frac{1}{2} Pe \tag{6.2}$$

حيث e الاستطالة بين نقاط التحميل والمفصولة عن بعضها البعض بمسافة L. يكون ثابت النابض للصفيحة:

$$\frac{1}{m} = \frac{P}{e} \tag{6.3}$$

إن معدل تحرير طاقة الانفعال العائد إلى توسع الشق $2\delta a$ هوالمنطقة المظللة في الشكل 6-11، إذا لم يتحرك رأس إطار التحميل خلال توسع الشق، أي إن:

$$\frac{\partial \text{e}}{\partial \text{a}} = 0 \tag{6.4}$$

من المعادلة (6.2)

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{1}{2} e \frac{\partial P}{\partial a} + \frac{1}{2} P \frac{\partial e}{\partial a} \qquad (6.5)$$

ولكن بسبب المعادلة (6.4)

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{1}{2} e \frac{\partial P}{\partial a} \qquad (6.6)$$

عندها، من المعادلة (6.3)

$$\frac{\partial P}{\partial a} = \frac{1}{m} \frac{\partial e}{\partial a} + e \frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{m}\right] = -\frac{P}{m} \frac{\partial m}{\partial a} \qquad (6.7)$$

وهكذا:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = -\frac{P^2}{m} \frac{\partial m}{\partial a} \qquad (6.8)$$

يسمي اروين [6-14] معدل تحرير طاقة الانفعال G، بذلك:

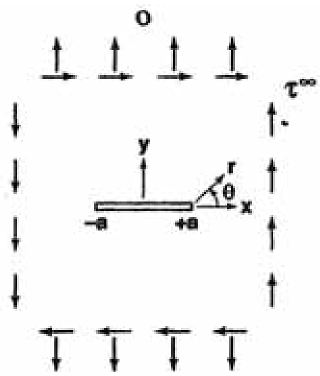
$$G = \frac{P^2}{m} \frac{\partial m}{\partial a} \qquad (6.9)$$

مما يمكن قياسه لأن P و m يُمكن قياسهما. تنتج نفس قيمة G إذا بقي الحمل ثابتاً خلال توسع الشق.

تم التعبير من قبل اروين (Irwin) عن معدل تحرير طاقة الانفعال بدلالة الإجهادات حول طرف (قمة) الشق. وقد أخذ بعين الاعتبار شقاً تحت تحميل إجهاد مستوي قدره σ^{∞}، إجهادٍ متناظرٍ بالنسبة إلى الشق، وإجهادٍ منحرف التناظر (Skew– symmetric) τ^{∞} بالنسبة إلى الشق، كما في الشكل 6–12. تحمل الإجهادات اللاحقة

العليا (Superscript) ∞، لأنها تطبق على بعد لا محدود من الشق. يمكن باستعمال نظرية المرونة التقليدية بيان أن توزع الإجهاد قرب الشق تماماً يكون على سبيل المثال:

$$\sigma_x = \frac{\sigma^\infty \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \cos\frac{\theta}{2}\left[1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right]$$
$$-\frac{\tau^\infty \sqrt{a}}{\sqrt{2r}} \sin\frac{\theta}{2}\left[2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right] \quad (6.10)$$



الشكل 6–12: صفيحة متصدعة ذات إجهادات متناظرة ومتخالفة التناظر عند اللانهاية

تكون مركبة الإجهاد المنفردة هذه ومركبات الإجهاد الأخرى σ_y و τ_{xy} من مرتبة $1/\sqrt{r}$. علاوة على ذلك، تدعى الحدّتان $\sigma^\infty\sqrt{a}$ و $\tau^\infty\sqrt{a}$ بمعاملي شدة الإجهاد المتناظر والمتخالف التناظر.

$$k_1 = \sigma^\infty\sqrt{a}$$
$$k_2 = \tau^\infty\sqrt{a} \quad (6.11)$$

يرتبط عامل شدة الإجهاد المتناظر k_1 بنمط الفتح لتوسُّع الشق، كما في الشكل 6–10. ويرتبط عامل شدة الإجهاد متخالف التناظر k_2 بتوسُّع الشق من نمط القص الأمامي. يجب

أن يُستَكمَل عاملا شدة الإجهاد في المستوي هذان بعامل شدة إجهاد آخر من أجل وصف نمط القص المتوازي. تعتمد عوامل شدة الإجهاد على الحمولات المطبقة وهندسة الجسم وهندسة الشق.من أجل الحمولات المستوية، يمكن دوماً فصل توزع الإجهاد حول طرف الشق إلى متناظر ومتخالف التناظر.

تختلف عوامل شدة الإجهاد عن عوامل تركيز الإجهاد. من أجل نفس الثقب الدائري، يكون عامل تركيز الإجهاد مساوياً 3 تحت شدٍّ أحادي المحور، و2 تحت شدٍّ ثنائي المحور و4 تحت القص الصرف. وهكذا، فإن عامل تركيز الإجهاد، الذي يعتبر عاملاً عددياً منفرداً، لا يمكن أن يصف مميزات حالة الإجهاد، المصفوفة من المرتبة الثانية. مهما يكن، فإن عامل شدة الإجهاد يتواجد في كل مركبات الإجهاد، وبالتالي فهومفهوم مفيد في عمليات الكسر المتعلقة بالإجهاد. على سبيل المثال:

$$G = \frac{\pi k_1^2}{E} \tag{6.12}$$

من أجل شقٍ من نمط الفتح يمتد موازياً لنفسه. يمكن الحصول على علاقات أخرى مماثلة للانفعال في المستوي ولأنماط الشقق الأخرى. وتكمن النقطة الهامة في أن عوامل شدة الإجهاد تظهر في معدل تحرير طاقة الانفعال.

2.5.6 تطبيق ميكانيك الكسر على المواد المركبة

تمتلك المواد المركبة خصائص كثيرة مميزة بالنسبة إلى المواد متماثلة المناحي، مما يجعل تطبيق ميكانيك الكسر الخطّيّ المرن صعباً. وتتعلق المشاكل الرئيسية في عدم تماثل المناحي وعدم التجانس من وجهة نظر الألياف مقابل المصفوفة، ومن وجهة نظر الرقاقات المتعددة ذات الاتجاهات المختلفة على السواء. يجب أن يكون التعميم على المواد المتجانسة غير متماثلة المناحي مباشراً، لأنه لم يتم عندئذٍ تغيير أيٍّ من المبادئ الأساسية المستعملة في ميكانيك الكسر. لذلك، يُؤخذ غالباً تقريب المواد المركبة للمواد المتجانسة غير متماثلة المناحي. وبعد ذلك، تُحسب عوامل شدة الإجهاد للمواد غير متماثلة المناحي باستعمال تقنيات المطابقة بدالة ذي متغيّر عقدي (complex variable).

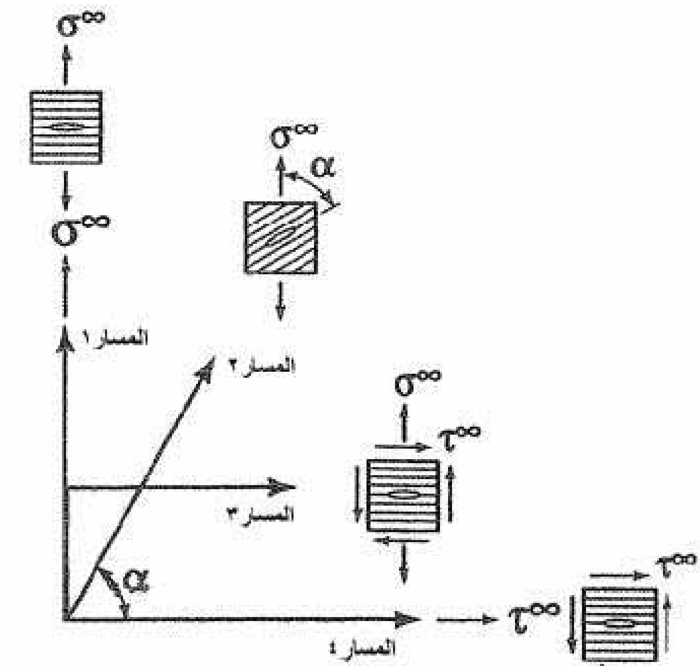
يشتق فو (Wu) [12–6] توزع الإجهاد حول طرف الشق في مادة غير متماثلة المناحي حيث يجد فو أن شدّة كلٍ من الإجهادات σ_x و σ_y و τ_{xy} يتم التحكم بها ليس فقط بواسطة المعاملين $\sigma^{\infty}\sqrt{a}$ و $\tau^{\infty}\sqrt{a}$ ولكن أيضاً بواسطة دالات خصائص المادة غير متماثلة المناحي وتوجه الشق بالنسبة إلى الاتجاهات المادة الرئيسية. يحدث تبسيط للأمر عندما يحافظ الشق على اتجاه ثابت بالنسبة إلى الاتجاهات المادة الرئيسية (ظرف محتمل إذا كانت الصدوع أو مسارات توسع الشق على سبيل المثال موازية كلها للألياف في رقاقة أحادية الاتجاه). مهما يكن، ما لم تكن المادة ثلاثية المناحي والشق موازياً لاتجاهات المادة الرئيسية، فإن نمط الفتح يمتلك على السواء إجهادات متناظرة ومتخالفة التناظر في توزع الإجهاد حول طرف الشق.

أجرى فو (Wu) [12–6] مجموعات من التجارب لتحديد قابلية تطبيق ميكانيك الكسر الخطي المرن على المواد المركبة وعرَّض صفائح أحادية الاتجاه من ألياف زجاجية– ايبوكسي تحتوي على شقوق متوضعة مركزياً في اتجاه الألياف إلى شدٍّ وقصٍّ صرفٍ، وتركيب شدٍّ وقص، كما في الشكل 6–13. لقد سجل الحمل الحرج وطول الشق عند توسع الشق السريع البادئ، ولاحظ أن الشقوق تنتشر بشكلٍ مشترك الخطية (Collinear) مع الشق الأصلي. علاوة على ذلك، تقود الأحمال المتناظرة إلى نمط فتح الشق، وتقود الأحمال متخالفة التناظر إلى القص الأمامي أونمط الانزلاق. يكون هذا التمايز أكثر وضوحاً مقارنةً بالمواد متماثلة المناحي! من أجل حملٍ على المسار 1، تكون عوامل شدة الإجهاد:

$$\begin{aligned} k_1 &= \sigma^{\infty}\sqrt{a} \\ k_2 &= 0 \end{aligned} \tag{6.13}$$

وتكون عوامل شدة الإجهاد الحرجة:

$$\begin{aligned} k_{1_c} &= \sigma_c^{\infty}\sqrt{a_c} \\ k_{2_c} &= 0 \end{aligned} \tag{6.14}$$

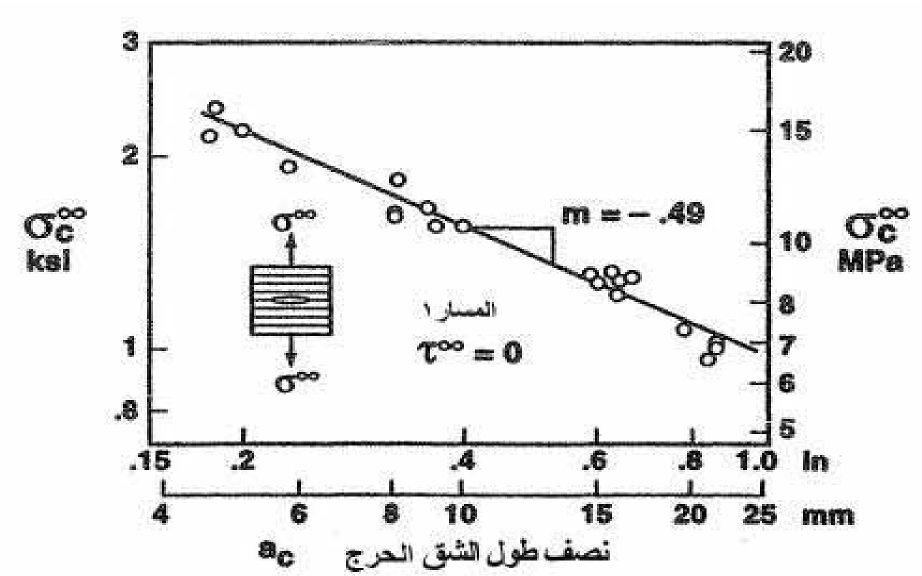


الشكل 6–13: مسارات الحمل لــ فووتوجهات الشقوق (عن فو Wu [6–12])

حيث يكون σ_c^∞ الإجهاد الحرج و a_c طول الشق الحرج عند انتشار الشق السريع البادئ. إذا كان k_1 ثابتاً حقيقياً للمادة، كما نتمنى، يجب عندئذٍ أن يكون تمثيل المعطيات التجريبية في مخطط $\log \sigma_c^\infty$ مقابل $\log a_c$ خطاً مستقيماً ميله ½− لأنه يمكن كتابة المعادلة 6.14:

$$\log k_{1_c} = \log \sigma_c^\infty + \frac{1}{2} \log a_c \qquad (6.15)$$

إن ميل المستقيم في الشكل 6–14 هو فعلاً 0.49- ، وبذلك تكون النظرية ظاهرياً قابلة للتطبيق على رقاقةٍ ثلاثية المناحي تحتوي شقوقاً في اتجاه الألياف. تم التثبت من هذا الرأي بواسطة اختبارات من أجل مسارات تحميلٍ أخرى، مبيّنة في الشكل 6–13.

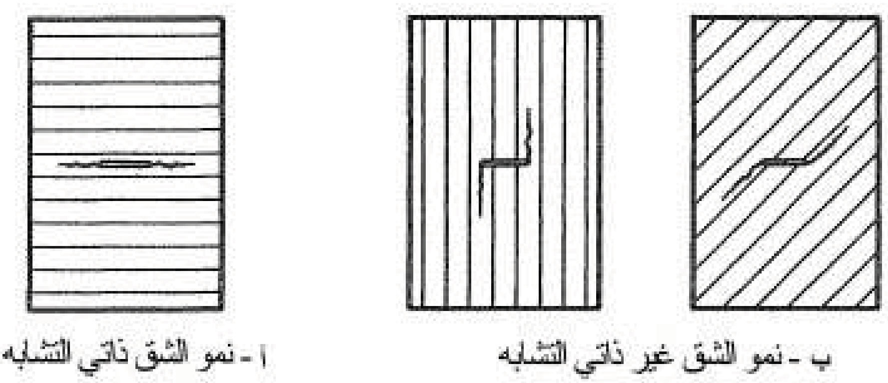


الشكل 6-14: صفيحة متشققة مقواة محورياً تحت شد عمودي على الألياف (عن فو Wu [6-12])

طوّر باحثون آخرون بشكل جوهري حالة الفن في ميكانيك الكسر المطبق على المواد المركبة. ناقش تيتلمان (Tetelman) [6-15] وكورتين (Corten) [6-16] ميكانيك الكسر من وجهة نظر الميكانيك الميكروي. وعالج سيه (Sih) وشين (Chen) [6-17] مشكلة الكسر ذي النمط المختلط من أجل انتشار شق غير مشترك الخطية (Noncollinear). وسَّع كلٌّ من وادوبس (Waddoups) وآيزنمان (Eisenman) وكامنسكي (Kaminsky) وكونيش (Konish) وسويدلو (Swedlow) وكروز (Cruse) [6-19] مفاهيم ميكانيك الكسر للصفائح الطبقية. ونوقشت متانة الصدم للمواد المركبة أحادية الاتجاه من قبل تشاميز (Chamis) وهانسون (Hanson) وسيرافيني (Serafini) [6-20]. واستخدموا مفاهيم طاقة الانفعال وطول الكسر مع الميكانيك الميكروي لتقييم متانة الصدم في الأنماط الطولية والعرضانية والقص.

تتأثر كافة الجهود للتوقع بنموالشق والتعب في صفيحة طبقية مركبة بالأسلوب الفريد والمعقد الذي يمكن للشقوق أن تنمو وفقه في الصفيحة الطبقية. تميل الشقوق للنمو

في المصفوفة (matrix) بشكل موازٍ للألياف. بالتالي، إذا قُطع الشق بشكل موازٍ للألياف، كما في الشكل 6-15 أ، فسوف ينمو في اتجاهٍ موازٍ لنفسه، أي بطريقة مشابهة ذاتياً. مهما يكن، إذا قُطع الشق بزاوية ما بالنسبة إلى الألياف، فعندها سوف ينمو الشق كذلك بشكل موازٍ للألياف وليس موازياً لنفسه، أي نمو للشق غير مشابه لنفسه، كما في الشكل 6-15 ب. بالنتيجة، وبما أن الصفيحة الطبقية تتألف من عدة طبقات ذات اتجاهات متعددة، فإن الشق المعمول في صفيحة طبقية يؤدي إلى نمو شق مشابهٍ لنفسه موضعياً أحياناً، وغير مشابهٍ لنفسه أحياناً أخرى. على وجه العموم، لا يكون نموالشق مشابهاً لنفسه. لهذا، يكون التوقع بتأثير أنواع كثيرة من نموالضرر صعباً جداً إذا لم يكن مستحيلاً.



الشكل 6-15: نمو شق في صفيحة طبقية مركبة

6.6 تأثيرات القص العرضاني

تمتلك المواد المركبة تقليدياً مُعامِل يونغ منخفض لمصفوفتها مقارنةً بمعامل الألياف وحتى مقارنةً بالمعاملات الكلية للرقاقات. وبما أن المصفوفة هي وسيط الترابط بين الرقاقات، فإن أثر القص في كامل الصفيحة الطبقية يُبنى من مجموع مساهمات المصفوفة في كلٍ من مناطق ما بين الطبقات. لا يُمكن تجاهل هذا التأثير الجمعي لأن الصفائح الطبقية يمكن أن تتألف من أكثر من 100 طبقة! الأمر المهم هوأن معاملات القص للمادة المركبة G_{xz} وG_{yz} تكون أقل بكثير من المعامل المباشر E_x مقارنةً بالمواد متماثلة المناحي. بالتالي، فإن تأثير إجهادات القص العرضانية τ_{xz} وτ_{yz} يُمكن أن يكون

أكثر أهمية للصفائح المركبة متعددة الطبقات والقواقع مقارنةً بالصفائح والقواقع متماثلة المناحي.

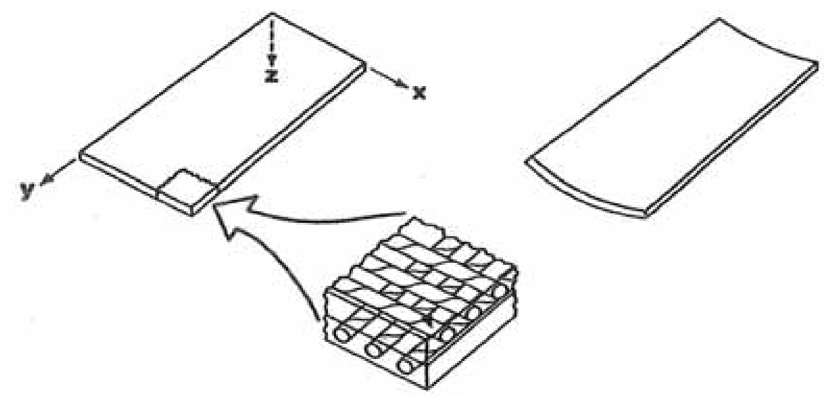
تُقسم دراسة تأثير إجهاد القص العرضاني إلى جزئين. تُفحص في الأول بعض حلول المرونة الدقيقة للصفائح الطبقية المركبة في حالة انحناء اسطواني. تعتبر هذه الحلول محدودة في إمكانية تطبيقها على مشاكل عملية، ولكنها مفيدة جداً كنقاط اختبار للنظريات التقريبية القابلة للتطبيق بشكل أوسع. تُناقش في الثاني تقريبات عديدة لمعالجة إجهادات القص العرضاني في نظرية التصفيح.

1.6.6 الحلول الدقيقة للانحناء الأسطواني

درس باغانو الانحناء الأسطواني للصفائح المركبة المتناظرة متعددة الطبقات ذات الرقاقات المتصالبة [6−21]. تكون كل طبقة ثلاثية المناحي، وتمتلك اتجاهات رئيسية للمادة مصطفة مع محاور الصفيحة. وتكون الصفيحة لا متناهية في الطول في الاتجاه y (انظر الشكل 6−16). عندما تتعرض الصفيحة لحمل عرضاني P(x) بحيث يكون P مستقلاً عن y، فإنها تنفعل إلى اسطوانة:

$$u = u(x) \qquad v = 0 \qquad w = w(x) \tag{6.16}$$

بالتالي، تكون الصفيحة في حالة انفعال مستوي عامة في المستوي x-z.



الشكل 6−16: انحناء اسطواني لشريط لانهائي الطول ذي رقاقات متصالبة

يعتبر حل باغانو الدقيق للإجهادات والانزياحات معقداً جداً لكي تُعرض هنا. تتولد النتيجة الموافقة لنظرية التصفيح التقليدية من معادلات التوازن، المعادلات (5.6) إلى (5.8) التي تُبسَّط إلى:

$$A_{11}u,_{xx} - B_{11}w,_{xxx} = 0$$
$$D_{11}w,_{xxxx} - B_{11}u,_{xxx} = p \qquad (6.17)$$

عندما تؤخذ بعين الاعتبار ثلاثية المناحي والمعادلة (6.16). يُمكن فك الارتباط بين معادلات التوازن هذه بتفاضل المعادلة الأولى للحصول على:

$$u,_{xxx} = \frac{B_{11}}{A_{11}} w,_{xxxx} \qquad (6.18)$$

وباستبدالها في المعادلة الثانية، ينتج:

$$w,_{xxxx} = \frac{A_{11}}{D} p \qquad (6.19)$$

حيث:

$$\mathrm{D} = \mathrm{A}_{11}\mathrm{D}_{11} - \mathrm{B}^2{}_{11} \qquad (6.20)$$

عندما يكون $p = p_o \sin \frac{n\pi x}{L}$ فإن حلّي المعادلتين (6.18) و(6.19) يكونان كالتالي:

$$w = \frac{A_{11}p_o}{D}\left[\frac{L}{n\pi}\right]^4 \sin\frac{n\pi x}{L}$$
$$u = \frac{B_{11}p_o}{D}\left[\frac{L}{n\pi}\right]^3 \cos\frac{n\pi \mathrm{X}}{L} \qquad (6.21)$$

وعندئذ، يكون الانفعال فقط:

$$\varepsilon_x = u,_x - zw,_{xx} = \left[\frac{A_{11}z - B_{11}}{D}\right]\left[\frac{L}{n\pi}\right]^2 p_o \sin\frac{n\pi x}{L} \qquad (6.22)$$

وتكون الإجهادات في كل طبقة:

$$\begin{aligned} \sigma_{x_k} &= \frac{p_o Q_{11}^k \left(A_{11}z - B_{11}\right)}{D}\left[\frac{L}{n\pi}\right]^2 \sin\frac{n\pi x}{L} \\ \sigma_{y_k} &= \frac{p_o Q_{12}^k \left(A_{11}z - B_{11}\right)}{D}\left[\frac{L}{n\pi}\right]^2 \sin\frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \qquad (6.23)$$

ومع أنه في نظرية التصفيح التقليدية وبفضل فرضية كيرشوف، نفترض أن الإجهادات σ_z و τ_{xz} تساوي الصفر، ما نزال نستطيع الحصول تقريباً على هذه الإجهادات بتكامل معادلات توازن الإجهاد هذه:

$$\tau_{xz,z} = -\sigma_{x,x} \qquad \sigma_{z,z} = \tau_{xz,x} \qquad (6.24)$$

للحصول على:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^k &= -\frac{p_o Q_{11}^k}{D}\left[\frac{L}{n\pi}\right]\left[\frac{A_{11}}{2}z^2 - B_{11}z + H_k\right]\cos\frac{n\pi x}{L} \\ \sigma_z^k &= -\frac{p_o Q_{11}^k}{D}\left[\frac{A_{11}}{6}z^3 - \frac{B_{11}}{2}z^2 + H_k z + L_k\right]\sin\frac{n\pi x}{L} \end{aligned} \qquad (6.25)$$

حيث تُحد الثابتين H_k وL_k من السطح ومن الشروط الحديّة بين الطبقات على الإجهادات.

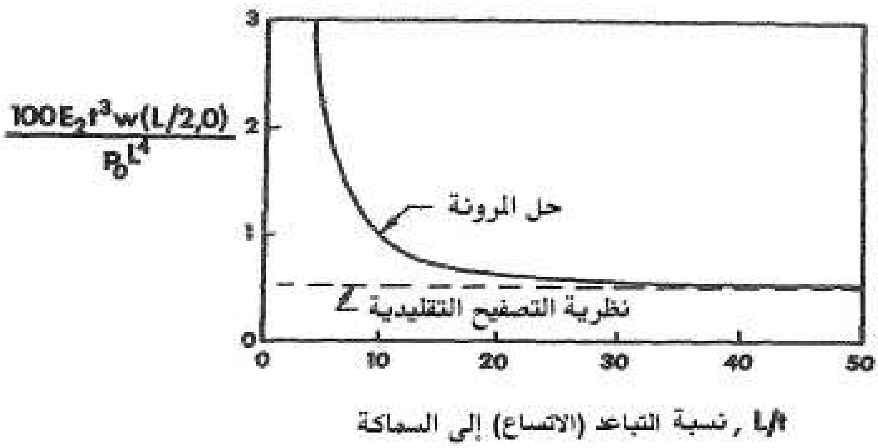
عرض باغانونتائج عددية لعدة صفائح طبقية مصنوعة من مادة مركبة ايبوكسي–غرافيت عالي المعامل مع:

E_1=25 x 10^6 psi (172 GPa) E_2 = 1 x 10^6 psi (6.90 GPa)

G_{12} = 0.5 x 10^6 psi (3.45 GPa) G_{23} = 0.2 x 10^6 psi (1.38 GPa)

$$V_{12} = v_{23} = 0.25$$

وحمولة قدرها $p=p_o \sin(\pi x/L)$ على صفيحة طبقية متناظرة من ثلاث طبقات [6–21]. يُرسم أولاً الانحراف العرضاني المعيّر w بدلالة نسبة التباعد إلى السماكة، S=L/t، كما في الشكل 6–17. إن انحراف حل المرونة الفعلي عن الحل التقريبي لنظرية التصفيح التقليدية هامٌ جداً عند نسب تباعد إلى سماكة منخفضة. وحتى عند نسبة S=20، حيث تكون نظرية الصفيحة التقليدية دقيقةً من أجل المواد متماثلة المناحي، يكون الانحراف حوالى 20%.

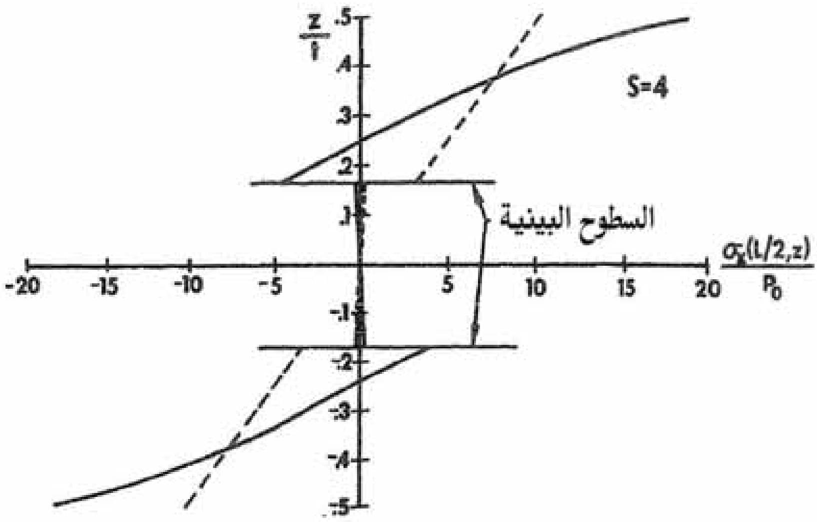


الشكل 6–17: الانحناء المعيّر بدلالة نسبة التباعد (الاتساع) إلى السماكة (عن باغانو Pagano [6–21])

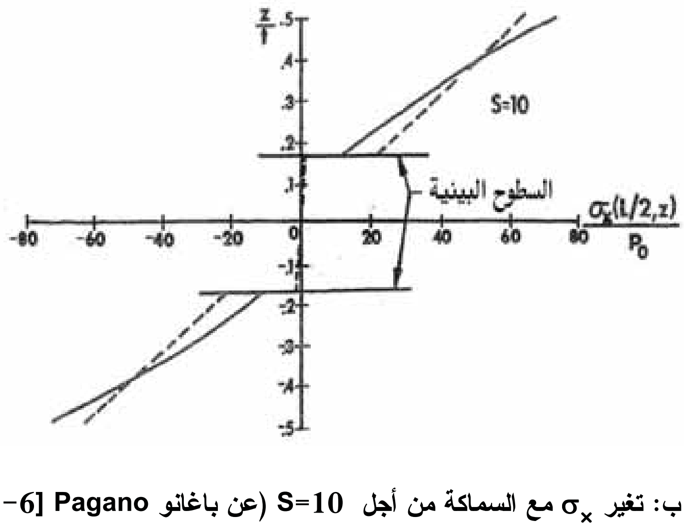
من أجل إجهاد ناظمي σ_x، يكون انحراف حلّ نظرية التصفيح التقليدية عن حل المرونة الدقيق متطرفاً جداً عند S=4، ولكنه ليس كبيراً بشكلٍ خاص عند S=10 في الأشكال 6-18 أ و6- 18 ب، على التوالي. من أجل إجهاد قص عرضاني τ_{xz}، فإن الفروقات بين نظرية التصفيح التقليدية والحل الدقيق لا تكون كبيرةً عند S=4، وتكون صغيرةً باعتدال عند S=10 في الأشكال 6-19 أ و6-19 ب، على التوالي. تتغير الإزاحة في المستوي u غالباً خطياً في كلّ طبقة، ولكنها طبعاً ليست خطيةً عبر سماكة الصفيحة الطبقية عندما يكون S=4، كما في الشكل 6-19 أ. عندما يكون S=10، فإن الانحراف عن الخطية عبر سماكة الصفيحة الطبقية ليس كبيراً، كما في الشكل 6-19 ب. بالتالي، فإن فرضية كيرشوف للنواظم غير القابلة للانفعال غير مناسبة لأجل قيم منخفضة S. أخيراً، فإن حل المرونة لتوزع الإجهاد σ_z عبر سماكة الصفيحة الطبقية غير معروض، ولكنه قريبٌ جداً للتوزع الناتج من نظرية التصفيح التقليدية بتكامل $\tau_{xz,z}$ من المعادلة (6.24).

من الواضح أن الإجهادات في نظرية التصفيح التقليدية في مثال باغانوتقترب من الحل الدقيق أسرع بكثير مما تفعله الإنزياحات عندما تزداد نسبة التباعد – سماكة. وتكون أخطاء الإجهاد من مرتبة 10% أوأقل من أجل قيم S منخفضة حتى 20. تم الإفراط في تقليل تقدير قيم الانزياحات من أجل قيم S بين 4 و30 وهي قيم شائعة لعيّنات توصيف مخبرية. بناءً عليه، يحتاج الأمر إلى وسائل عملية من أجل أخذ انفعالات القص العرضاني بالحسبان. وسوف يُعالج هذا الهدف في الفقرة القادمة.

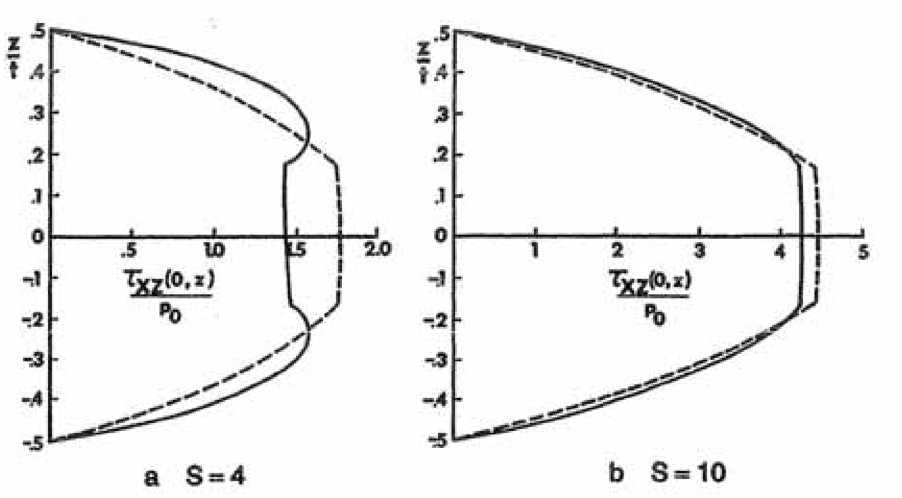
سيتم أولاً مراجعة عمل آخر حول الحلول الدقيقة لمشاكل خاصة. لقد وسّع باغانو نظريته إلى الصفائح [6-22]؛ أي أن شريطه كان محدد الطول. بعد ذلك، ضمَّن أثر تزاوج القص- استطالة في المستوي من أجل معالجة الصفائح الطبقية ذات الرقاقات المائلة [6-23]. ووسَّع باغانو ووانغ حل الصفيحة الطبقية ثلاثية المناحي إلى حمولاتٍ أكثر عموميةً [6-24]. أخيراً، تفحَّص باغانووهاتفيلد الصفائح متعددة الطبقات [6-25].



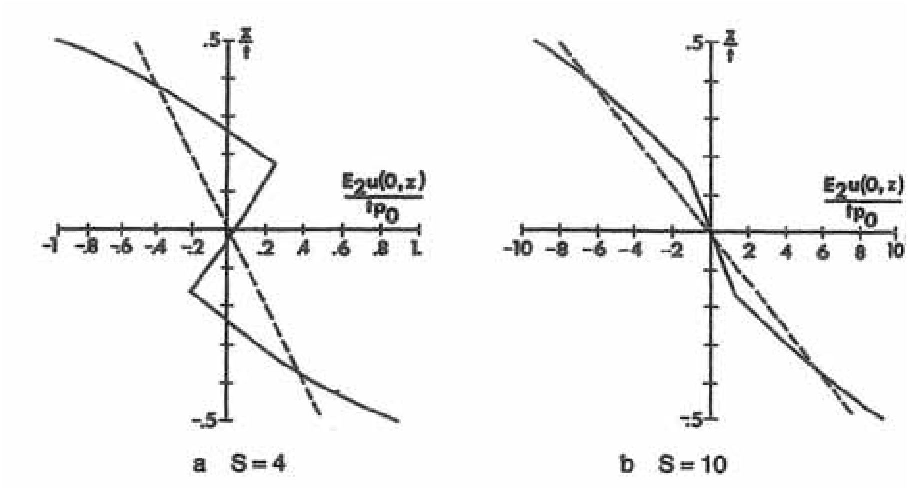
الشكل 6-18 أ: تغير σ_x مع السماكة من أجل S=4 (عن باغانو Pagano [6-21])



الشكل 6-18 ب: تغير σ_x مع السماكة من أجل S=10 (عن باغانو Pagano [6-21])



الشكل 6-19: تغير τ_{xz} مع السماكة (عن باغانو Pagano [6-21])



الشكل 6-20: تغير u مع السماكة (عن باغانو Pagano [6-21])

2.6.6 المعالجة التقريبية لتأثير القص العرضاني

خُصصت الفقرة الفرعية السابقة لمقارنة حل مرونة خاص ودقيق بنتائج نظرية التصفيح التقليدية. وتم البرهان بوضوح على أهمية تأثيرات القص العرضاني. على أية

حال، كان ذلك البرهان من أجل مشكلة خاصة ذات أهمية ضيقة. تهدف هذه الفقرة الفرعية إلى عرض مقاربات ونتائج من أجل الاعتبار التقريبي لتأثيرات القص العرضاني، وذلك من أجل صفائح متعددة الطبقات عامة.

انبثقت معالجة تأثيرات إجهاد القص العرضاني في صفائح مصنوعة من مواد متماثلة المناحي من الأوراق العلمية التقليدية العائدة إلى ريزنر [6−26] وميندلِن [6−27]. ويعود توسيع نظرية ريزنر لتشمل الصفائح المصنوعة من مواد ثلاثية المناحي إلى غيركمان وبير [6−28]. قام أمبارتسومايان [6−29] بمعالجة صفائح متعددة الطبقات بشكلٍ متناظر مع رقاقات ثلاثية المناحي حيث تكون اتجاهات المادة الرئيسية مصطفة مع محاور الصفيحة. ووسَّع ويتني [6−30] تحليل أمبارتسومايان لتشمل صفائح متعددة الطبقات بشكلٍ متناظر مع رقاقات ثلاثية المناحي ذات توجيه عشوائي.

سيتم الآن مناقشة المقاربات الأساسية، كما لخّصها أشتون وويتني [6−31]. سيتم أولا معالجة صفيحة طبقية متناظرة ذات رقاقات ثلاثية المناحي حيث تكون اتجاهات المادة الرئيسية فيها مصطفة مع محاور الصفيحة. يُمكن الحصول على الانفعال الطبيعي العرضاني من علاقات الإجهاد− انفعال ثلاثية المناحي، كما في المعادلة (2.15)

$$\varepsilon_z = \frac{1}{c_{33}}\left(\sigma_z - c_{13}\varepsilon_x - c_{23}\varepsilon_y\right) \tag{6.26}$$

والتي يمكن أن تستعمل لحذف ε_z من علاقات الإجهاد−انفعال من أجل الطبقة K^{th} ، وترك المعادلة:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}_k \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}_k \tag{6.27}$$

حيث إذا أُهمِل σ_z كما في نظرية التصفيح التقليدية:

$$Q_{ij} = \begin{cases} c_{ij} - \dfrac{c_{i3}c_{j3}}{c_{33}}, \text{if } i, j = 1,2 \\ c_{ij}, \text{if } i, j = 4,5,6 \end{cases} \tag{6.28}$$

يتم عندئذ تقريب توزع إجهاد القص العرضاني إلى:

$$\begin{aligned} \tau_{xz}^{k} &= \left[Q_{55}^{k} \mathrm{f}(z) + \mathrm{a}_{55}^{k}\right]\Phi_x(x,y) \\ \tau_{yz}^{k} &= \left[Q_{44}^{k} \mathrm{f}(z) + \mathrm{a}_{44}^{k}\right]\Phi_y(x,y) \end{aligned} \tag{6.29}$$

حيث $f(z) = f(-z)$ بسبب تناظر الصفيحة الطبقية. حُدّد أيضاً a_{44}^k و a_{55}^k من شروط التوازن حيث تتلاشى إجهادات القص على سطحي الصفيحة العلوي والسفلي $[f(t/2) = f(-t/2) = 0]$ وتكون مستمرة على السطوح البيّنة للطبقة. يمكن الحصول على انفعالات القص من علاقة الإجهاد–انفعال، كما يلي:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz}^{k} &= \left[\mathrm{f}(z) + \frac{\mathrm{a}_{55}^{k}}{Q_{55}^{k}}\right]\Phi_x \\ \gamma_{yx}^{k} &= \left[\mathrm{f}(z) + \frac{\mathrm{a}_{44}^{k}}{Q_{44}^{k}}\right]\Phi_y \end{aligned} \tag{6.30}$$

ثم بعملية تكامل لعلاقة الإنزياح–انفعال بالنسبة إلى z, المعادلة (2.2), (مع افتراض أن w لا تتعلق بـــ z) ينتج:

$$\begin{aligned} u^{k} &= -zw,_{x} + \left[J(z) + g_1^{k}(z)\right]\Phi_X \\ v^{K} &= -zw,_{y} + \left[J(z) + g_2^{k}(z)\right]\Phi_Y \end{aligned} \tag{6.31}$$

حيث:

$$J(z)=\int f(z)dz \qquad g_1^k(z)=\frac{a_{55}^k}{Q_{55}^k}z+b_1^k \qquad g_2^k(z)=\frac{a_{44}^k}{Q_{44}^k}z+b_2^k \qquad (6.32)$$

حُسب الثابتان b_1^k و b_2^k من شروط استمرار u وv عند السطوح بين الطبقات، ومن شرط التناظر حيث يتلاشى كلٌ من u وv عند السطح الأوسط للصفيحة الطبقية. وبسبب وجود كل من Φ_X و Φ_Y ، يتضح أن u وv لا يكونان دالتين خطيتين لـــ z، كما هو في نظرية التصفيح التقليدية.

يتم الحصول على علاقات العزوم من تكامل علاقات الإجهاد-انفعال، المعادلة (6.27)، وذلك بعد استبدال علاقات الانزياح - انفعال، المعادلة (6.22)، وعلاقات الانزياح، المعادلة (6.31):

$$\begin{aligned}
M_X &= -D_{11}w_{,xx}+D_{11}w_{,yy}+(F_{11}+H_{111})\Phi_{x,x}+(F_{12}+H_{122})\Phi_{y,y}\\
M_y &= -D_{12}w_{,xx}-D_{22}w_{,yy}+(F_{12}+H_{121})\Phi_{x,x}+(F_{22}+H_{222})\Phi_{y,y}\\
M_{xy} &= -2D_{66}w_{,xy}+(F_{66}+H_{661})\Phi_{x,y}+(F_{66}+H_{662})\Phi_{y,x}
\end{aligned} \qquad (6.33)$$

حيث D_{ij} هي معاملات جساءة الانحناء الشائعة و:

$$\begin{aligned}
F_{ij} &= \int_{-t/2}^{t/2} Q_{ij}^k zJ(z)dz \qquad i,j=1,2,6\\
H_{iji} &= \int_{-t/2}^{t/2} Q_{ij}^k zg_i^k(z)dz \qquad i=1,2
\end{aligned} \qquad (6.34)$$

وتكون محصلات القص:

$$\begin{aligned}
Q_y &= \int_{-t/2}^{t/2}\tau_{yz}^k dz = k_{44}\Phi_y\\
Q_X &= \int_{-t/2}^{t/2}\tau_{xz}^k dz = K_{55}\Phi_X
\end{aligned} \qquad (6.35)$$

حيث:

$$k_{ii} = \int_{-t/2}^{t/2} \left[Q_{ii}^{k} f(z) + a_{ii}^{k} \right] dz \qquad i = 4,5 \quad (6.36)$$

وتكون معادلات توازن الانحراف الكبير:

$$\begin{aligned} &M_{x,x} + M_{xy.y} - Q_x = 0 \\ &M_{xy,x} + M_{y.y} - Q_y = 0 \\ &Q_{x,x} + Q_{y,y} + p + N_x w,_{xx} + 2N_{xy} w,_{xy} + N_y w,_{yy} = 0 \end{aligned} \quad (6.37)$$

أوبدلالة المتغيرات الحالية:

$$\begin{aligned} &D_{11} w,_{xxx} + (D_{12} + 2D_{66}) w,_{xyy} - (F_{11} + H_{111}) \Phi_{x,xx} - (F_{66} + H_{661}) \Phi_{x,yy} \\ &- (F_{12} + F_{66} + H_{122} + H_{662}) \Phi_{y,xy} + K_{55} \Phi = 0 \\ &(D_{12} + 2D_{66}) w,_{xxy} + D_{22} w,_{yyy} + (F_{12} + F_{66} + H_{121} + H_{661}) \Phi_{x,xy} \\ &+ (F_{66} + H_{662}) \Phi_{y,xx} + (F_{22} + H_{222}) \Phi_{y,yy} + K_{44} \Phi_y = 0 \\ &K_{55} \Phi_{x,x} + K_{44} \Phi_{y,y} + p + N_x w,_{xx} + 2N_{xy} w,_{xy} + N_y w,_{yy} = 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

تكون الشروط الحديّة لمعادلات التوازن هذه أكثر تعقيداً من تلك العائدة لنظرية التصفيح التقليدية. على أية حال، فهي أكثر منطقيةً لأن قوة القص لكيرشوف أوشرط الحافة الحرة حيث يظهر تجميع بين قوة القص وعزم الفتل (اشتقاقي) تُستبدل بتلك القوة والعزم نفسها. يُمكن تلخيص ذلك بأن الشروط الحديّة الجديدة على طول كل حافة أو طرف تعطى كما يلي:

$$Q_n = 0 \text{ أو } w = 0 \qquad M_n = 0 \text{ أو } w,_n = 0 \qquad M_{nt} = 0 \text{ أو } u_{t,z}\big|_{z=0} = 0 \quad (6.39)$$

حيث n و t الاتجاهين الناظم على الحافة وعلى طولها على التوالي.

من أجل صفيحة متعددة الطبقات مستطيلة الشكل وبسيطة الاستناد والخاضعة لحمل عرضاني موزع:

$$p = p_o \sin\frac{m\pi x}{\text{a}}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{6.40}$$

حيث الانزياح والدورانات:

$$\begin{aligned} w &= A\sin\frac{m\pi x}{\text{a}}\sin\frac{n\pi y}{b} \\ \Phi_x &= B\cos\frac{m\pi x}{\text{a}}\sin\frac{n\pi y}{b} \\ \Phi_y &= C\sin\frac{m\pi x}{\text{a}}\cos\frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \tag{6.41}$$

ترضي بدقة الشروط الحديّة:

$$\begin{aligned} &M_x = v,_z\big|_{z=0} = w = 0 \quad \text{على} \quad x = 0,\text{a} \\ &M_y = u,_z\big|_{z=0} = w = 0 \quad \text{على} \quad y = 0,b \end{aligned} \tag{6.42}$$

يتم، على أساس نتائج المرونة، افتراض أن إجهادات القص [6-21] تتغير تقريباً كقطعة أوجزء من قطع مكافئ في كل طبقة، هذا يعني:

$$f(z) = 1 - 4\left[\frac{z}{t}\right]^2 \tag{6.43}$$

ومن ثم، يتم تحديد كامل المشكلة التي تُختصر إلى حل للمجموعة التالية من المعادلات الجبرية المتزامنة من أجل A، B وC:

$$\left[D_{11}m^2 + (D_{12} + 2D_{66})n^2R^2\right]\left[\frac{m\pi}{\mathrm{a}}\right]A$$

$$-\left[\left(F_{11} + H_{111}\right)m^2 + \left(F_{66} + H_{661}\right)n^2R^2 + \frac{K_{55}R^2S^2}{\pi^2}\right]B \qquad (6.44)$$

$$-(F_{12} + F_{66} + H_{122} + H_{662})mnRC = 0$$

$$\left[\left(D_{12} + 2D_{66}\right)m^2 + D_{22}n^2R^2\right]\left[\frac{n\pi R}{a}\right]A - \left(F_{121} + F_{66} + H_{121} + H_{661}\right)mnRB$$

$$-\left[(F_{66} + H_{662})m^2 + \left(F_{22} + H_{222}\right)n^2R^2 + \frac{K_{44}R^2S^2}{\pi^2}\right]C = 0$$

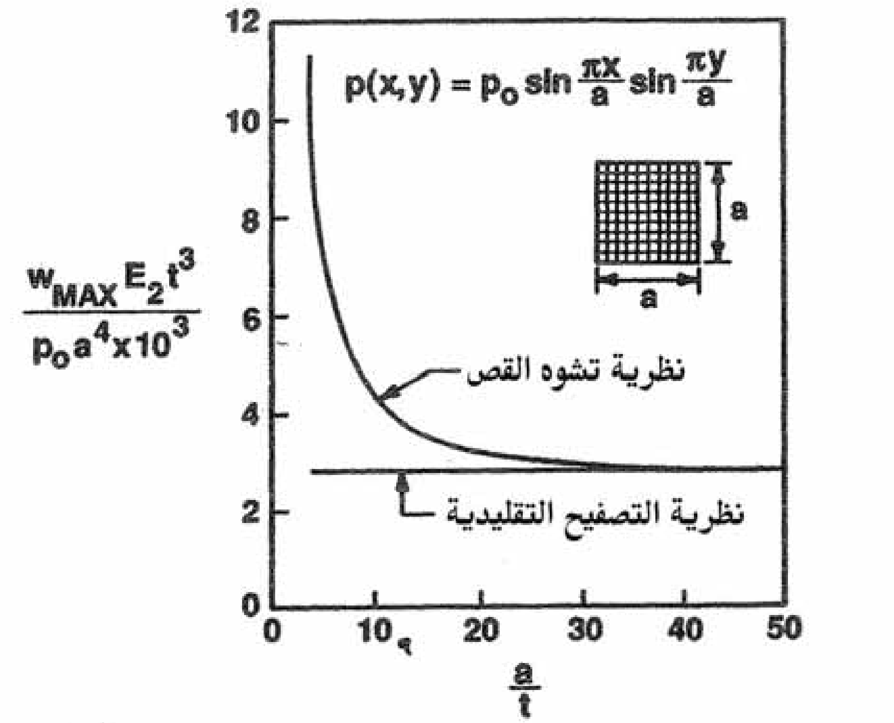
$$K_{55}mB + K_{44}nRC = \frac{p_o\mathrm{a}}{\pi}$$

حيث $R = a/b$ و $S = a/t$

قام ويتني بحل المعادلات (6.44) من أجل صفيحة متناظرة مربعة الشكل ذات أربع رقاقات متصالبة وفق الزوايا [$0^o/90^o/90^o/0^o$] من الايبوكسي–غرافيت تحت حملٍ عرضاني يعطى بالعلاقة $= p_o \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a)$ [30–6]. تتسم خصائص المادة بنمط مواد الأيبوكسي– غرافيت عالية الجساءة.

$$\frac{E_1}{E_2} = 40 \qquad \frac{G_{12}}{E_2} = 0.6 \qquad \frac{G_{13}}{E_2} = 0.5 \qquad \nu_{12} = 0.25$$

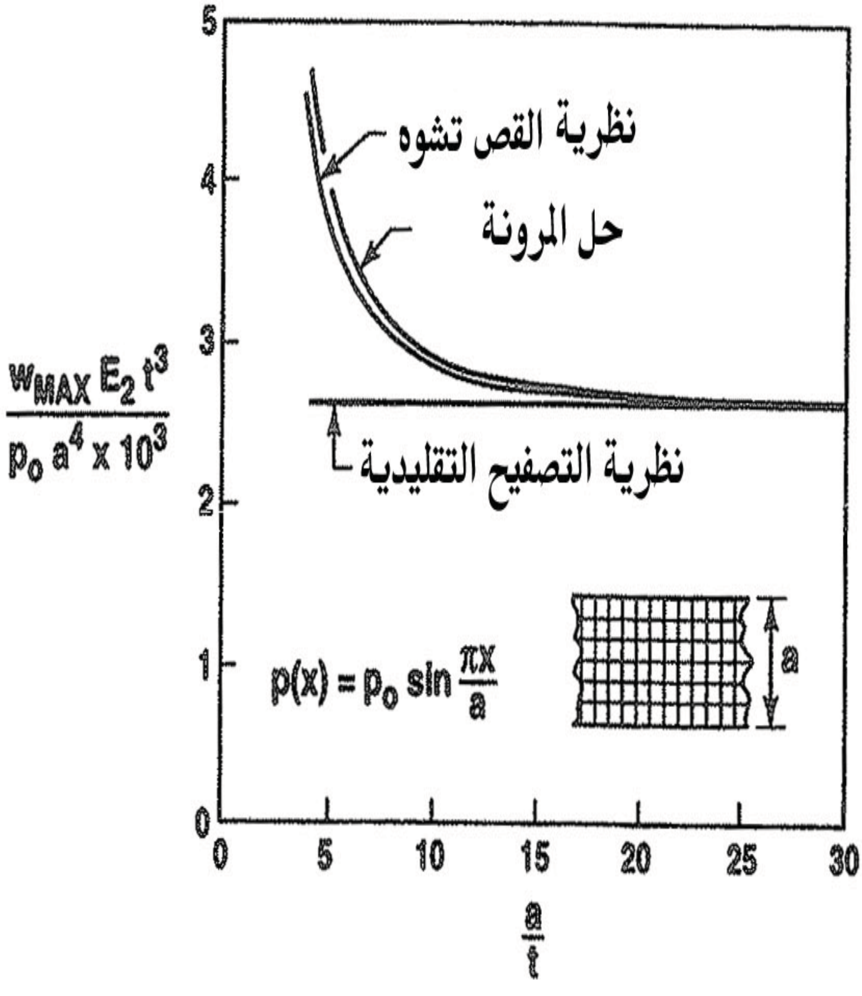
تكون النتائج المعروضة في الشكل 6-21 من أجل مقاربة القص– انفعال مقابل نظرية التصفيح التقليدية مشابهة تماماً وصفياً مقارنةً بما بين حل الانحناء الأسطواني الدقيق ونظرية التصفيح التقليدية في الشكل 6-17.



الشكل 6-21: الانحراف تحت $p_o \sin(\pi x/a) \sin(\pi y/a)$ لصفيحة مربعة الشكل متناظرة ذات أربع رقاقات متصالبة من الابوكسي-غرافيت (عن ويتني Whitney [6-30])

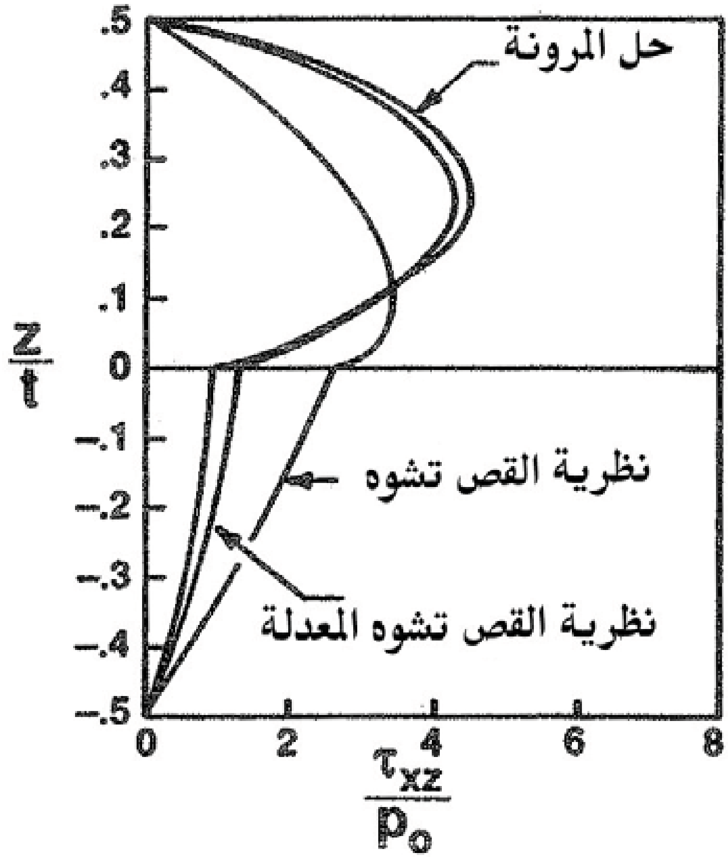
يبيّن الشكل 6-22 مقارنة مباشرة بشكل أكبر لحل القص- انفعال لـــويتني من أجل انحراف شريط لا نهائي معاكس التناظر ذي رقاقات متصالبة [6-30] مع حل اللدونة وحل نظرية التصفيح التقليدية. يتضح من الشكل بأن حل نظرية القص- انفعال لويتني هو جيد حقاً من أجل التوقع بالانحرافات.

على أية حال، لا يتفق بشكل جيد توزع إجهاد قص ويتني عبر السماكة عند حافة الشريط اللانهائي في الشكل 6-23 مع حل المرونة. لكن بدلاً من معادلة مشابهه للمعادلة 6.43، إذا تم حساب إجهادات القص من الإجهادات σ_x و σ_y و τ_{xy} بواسطة معادلات المرونة، عندئذٍ يتم الحصول على أفضل توافق بين نظرية القص- انفعال المعدلة وحل المرونة، كما في الشكل 6-23.



الشكل 6−22: انحراف شريط لانهائي ثنائي الطبقة ذي رقاقتين متصالبتين من الابوكسي−غرافيت تحت:

$p_o \sin (\pi x/a)$ (عن ويتني Whitney [6−30])



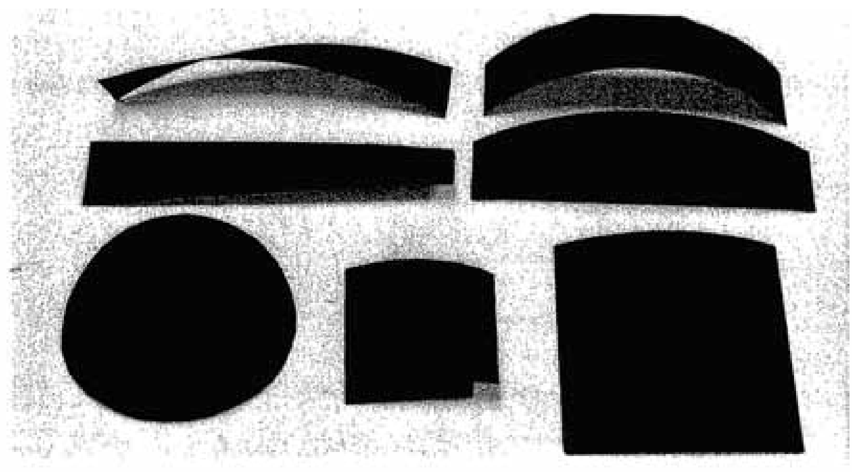
الشكل 6-23: توزع إجهاد القص العرضاني على طول الحواف لشريط لانهائي ثنائي الطبقة من الايبوكسي-غرافيت تحت $p_o \sin(\pi x/a)$ مع $a/t = 4$ (عن أشتون Ashton وويتني Whitney [6-31])

قام ويتني وباغانو [6-32] بتوسيع عمل نوريس ويانغ وستافسكي لمعالجة الإقران بين الانحراف والاستطالة [6-33]. يستعمل ويتني نظرية الإجهاد عالية النظام من أجل الحصول على توقعات محسنة للإجهادات σ_x و σ_y و τ_{xy} والانزياحات عند نسب عرض/سماكة منخفضة [6-34]. استعمل ريزنر نظريته المتغيراتية (variational) لاشتقاق مجموعة متسقة من المعادلات لتضمين تأثيرات انفعال القص العرضاني في الصفائح متعددة الطبقات المتناظرة [6-34]. في الختام، قام أمبارتسومايان بتوسيع معالجته لتأثيرات انفعال القص العرضاني من الصفائح إلى القواقع [6-36].

7.6 الأشكال بعد المعالجة للصفائح الطبقية غير المتناظرة

كيف تنفعل الصفائح الطبقية غير المتناظرة خلال عملية التبريد بعد المعالجة؟ لاحظ أننا نتناول ببساطة الصفائح الطبقية، وليس الصفائح، نظراً إلى عدم وجود أيّ حملٍ ميكانيكي أو أيّ مسندٍ على حواف الصفيحة الطبقية. يكمن مبرر مثل هذا السؤال في أن الصفائح الطبقية غير المتناظرة تنفعل بطرق غير اعتيادية مقارنةً بالصفائح الطبقية المتناظرة، كما هوالحال في عددٍ من صفائح طبقية غير متناظرة من الايبوكسي- غرافيت في الشكل 6-24.

وغالباً ما يُنظر إلى هذه الطرائق غير الاعتيادية على أنها غير مرغوبٍ بها، لكنها في الحقيقة يمكن أن تكون مفيدة إلى حد بعيد وحتى مرغوبٍ بها في بعض التطبيقات الإنشائية. ويتجلى ذلك في حاجتنا في بعض الأحيان إلى صفيحة طبقية ذات تقوسٍ معيّن أو فتل أكثر من حاجتنا إلى صفيحة طبقية مسطحة. لذلك، يجب علينا أن نتحرى عن الأشكال الممكنة للصفائح الطبقية المعالجة حرارياً وغير المتناظرة .



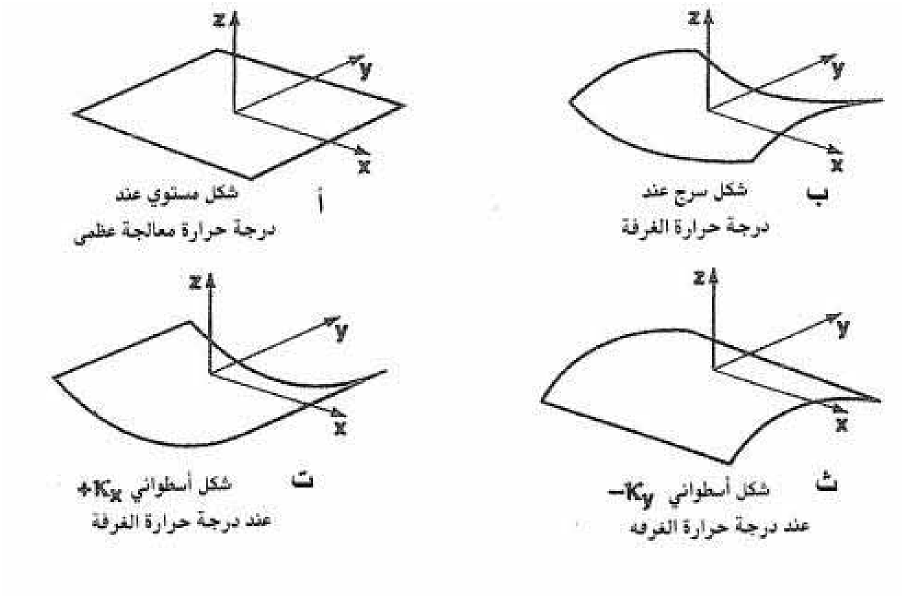
الشكل 6-24 أشكال بعد المعالجة لصفائح طبقية غير متناظرة متعددة (عن هاير Hyer [6-37])

في حال ثُبتت الصفيحة الطبقية غير المتناظرة بشكل مستو باستعمال مكبسٍ على سبيل المثال أثناء عملية المعالجة (الحالة الشائعة)، فسيكون شكلها مسطحاً عند أعلى درجة حرارة معالجة، كما في الشكل 6−25 أ. على أية حال، عندما يتم إزالة قوة الكبس بعد انتهاء عملية المعالجة فإن الصفيحة الطبقية غير المتناظرة تُجبر على أخذ أشكال أخرى غير الشكل المسطح. ويعود الأمر إلى تطور قوى وعزوم حرارية معتبرة أثناء عملية التبريد من درجة حرارة المعالجة الأعلى (بسبب الإجهادات الحرارية المختلفة الناشئة في كل طبقة عن اختلاف التقلص الحراري).

تجلّت الملاحظة الأولى في أن الشكل المعالج لصفيحة طبقية غير متناظر ذات رقاقات متصالبة غالباً تكون اسطوانية، في حين إننا قد نتوقع أنها ستكون على شكل سرج (قطع مكافئ أوزائد) بالاستناد إلى نظرية التصفيح التقليدية (يمكن بيان أن التقوسات يمكن أن تَكون $\kappa_x = -\kappa_y$ أو $\kappa_x = \kappa_y$ −).

إن صفيحة طبقية سميكة نسبياً (طول وعرض ليسا كبيرين مقارنة بالسماكة) سوف تأخذ شكل السرج بعد خضوعها لعملية المعالجة كما في الشكل 6−25 ب. لاحظ أن التقوّس في هذه الفقرة يُعرف بدون الإشارات السالبة في المعادلة (4.15).

يتم أيضاً قياس الانحناء بشكلٍ موجبٍ نحو الأعلى، كما في الشكل 6−25 (عوضاً عن الموجب نحو الأسفل كما في الفصل الرابع). وستمتلك صفيحة طبقية رقيقة (طول وعرض كبيران مقارنةً بالسماكة) شكلاً اسطوانياً دائرياً، كما في الشكل 6−25 ج و6−25 د. إن حاولت إجبار الصفيحة الطبقية الدائرية الأسطوانية لتكون مسطحة، عندها سيحدث انبعاج مترافق مع صوت فرقعة مسموع تماماً من التشكيل الموافق لــ ($\kappa_y = 0$, $+\kappa_x$) إلى التشكيل الموافق لــ ($-\kappa_y$ =0 , κ_x) أو العكس بالعكس.



الشكل 6−25: أشكال صفائح طبقية غير متناظرة ذات رقاقات متصالبة (عن هاير Hyer [6−38])

بيَّن هاير الشروط التي يجب أن يتواجد فيها الشكل الأسطواني، ومتى يجب أن يتواجد شكل السرج [6−38]. قام بتقريب الانحراف العرضاني لصفيحة طبقية غير متناظرة ذات رقاقات متصالبة كما يلي:

$$w(x,y)=\frac{1}{2}\left(\mathrm{a}x^2+by^2\right) \qquad (6.45)$$

مع التقريب الموافق في الانزياحات في المستوي

$$\begin{aligned} u^o(x,y)&=cx-\frac{\mathrm{a}^2x^3}{6}-\frac{\mathrm{abxy}^2}{4} \\ v^o(x,y)&=dy-\frac{\mathrm{b}^2y^3}{6}-\frac{\mathrm{abx}^2y}{4} \end{aligned} \qquad (6.46)$$

حيث يكون الحدان الثاني والثالث في كل معادلة من أجل انفعالات كبيرة. كما تكون هذه الانفعالات عبارة عن تقريب لقيم الانحراف الأعظمي التي يمكن أن توجد في مثل هذه الصفائح الطبقية. يستعمل هاير هذه الانفعالات مع انفعالاتها النسبية الضمنية لصياغة الطاقة الكلية الكامنة لصفيحة طبقية. ويحل المعادلات الناتجة عدديا لإيجاد حالات التوازن استقرارها أو عدم استقرارها، وذلك من أجل صفائح طبقية (T300-5208) من الايبوكسي– غرافيت ذات الخصائص التالية:

$$E_1 = 26.2 \times 10^6 \text{ psi (181 GPa)} \qquad E_2 = 1.49 \times 10^6 \text{ psi (10.3 GPa)}$$

$$V_{12} = 0.28 \qquad G_{12} = 1.04 \times 10^6 \text{ psi (7.2 GPa)}$$

$$\alpha_1 = -0.059 \times 10^{-6}\ /^{o}F\ \ (-0.106 \times 10^{-6}\ /^{o}C)$$

$$\alpha_2 = 14.2 \times 10^{-6}\ /^{o}F\ \ (25.6 \times 10^{-6}\ /^{o}C)$$

عُولجت الصفائح الطبقية عند درجة حرارة 350 °F (177°C) ثم بُرِّدت إلى درجة حرارة الغرفة 70 °F (21°C).

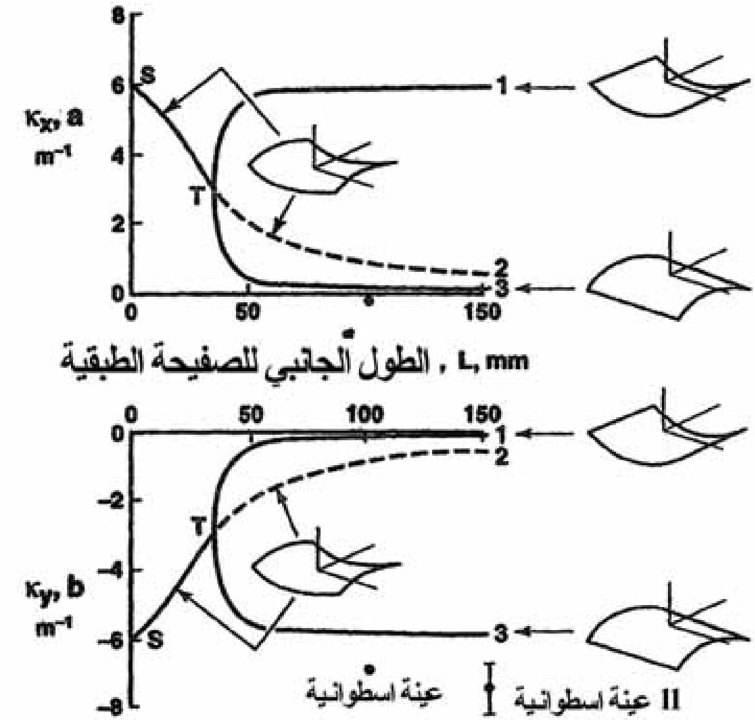
يُظهر الشكل 6–26 نتائج هاير لأطوال جوانب عديدة لصفيحة طبقية مربعة (الطول=العرض) من أجل صفيحة طبقية $[0_2/90_2]_T$. توجد ثلاث حالات مهمة:

(1) في حال كانت الأطوال الجانبية معدومة، أي من أجل صفيحة طبقية سميكة جداَ، فإن شكل السرج يكون موجوداً عند النقطة S (السرج) مع κ_x=a وκ_y=-b حيث a=b. عندما تزداد الأطوال الجانبية للصفيحة الطبقية، أي كلما أصبحت الصفيحة الطبقية أقل سماكة، فإن شكل السرج يبقى موجوداً، لكن اتساع التقوس يتناقص، أي أن شكل السرج يصبح أقل عمقاً.

(2) في حال كانت الأطوال الجانبية صغيرة بشكلٍ كافٍ، أي عندما تكون الصفيحة سميكة بشكلٍ كافٍ، يوجد شكل السرج وحيداً، كما في الشكل 6–26 عند الجزء ST مع تقوسات متساوية ومتعاكسة يتناقص اتساعها كلما ازدادت الأطوال الجانبية.

(3) عند طولٍ حرجٍ يعتمد على سماكة الصفيحة الطبقية النسبية، فإن حل الانفعال يتفرع بشكل ثلاثي (Trifurcate) عند النقطة T، أي أنه فوق الطول الحرج، هناك ثلاثة أشكال

محتملة الوجود عند درجة حرارة الغرفة: (1) شكل السرج، (2) الشكل الأسطواني مع $\kappa_y = 0$ و$\kappa_x = +\kappa$ و(3) الشكل الأسطواني مع $\kappa_x = 0$ و$\kappa_y = -\kappa$. من أجل هذه الصفيحة الطبقية $[0_2/90_2]_T$، يكون الطول الحرج 35mm.



الشكل 6-26: أشكال صفائح طبقية مربعة من الايبوكسي-غرافيت عند درجة حرارة الغرفة (عن هاير Hyer [6-38])

الفروع الثلاثة لتشكيلات التوازن بعد النقطة الأساسية T: T1 وT2 وT3، كما في الشكل 6-26.

الفرع T2 هواستمرار لشكل السرج من الحل ST، ولكن هذا الفرع غير ثابت، لذلك فإن الفروع الأخرى هي الحل الفيزيائي الحقيقي نظراً إلى أنها مستقرة. يملك الفرع T1 قيمة أكبر لـــ κ_x مقارنةً بـــ κ_y. في حال كانت L أكبر بحوالى 50 % من قيمة L الحرجة،

فإن الصفيحة الطبقية الدالة للفرع T1 تملك قيمة كبيرة لــ κ_x وتقريباً قيمة الصفر لــ κ_y، لذلك فإن الشكل يكون أسطوانياً تقريباً. بالمقابل، يمتلك الفرع T3 الشكل الأسطواني مع قيمة كبيرة لــ κ_y وقيمة معدومة تقريباً لــــ κ_x، وذلك في حال كان طول الصفيحة الطبقية أكبر تقريباً بــ 50% من الطول الحرج L. في الحقيقة، يُمكن أن تصنع صفيحة طبقية بالقفز من الفرع T1 إلى الفرع T3 بالتطبيق البسيط لكمية صغيرة من عزم الانحناء في الاتجاه الأكبر تقوساً، أي تطبيق M_x على الشكل الأسطواني κ_x + (باستخدام أصابعك!). يكون المقابل صحيحاً بالقفز من الفرع T3 إلى الفرع T1 .

يوضح الشكل 6-26 التقوسات المقاسة من أجل 100mm صفيحة طبقية (دائرة مغلقة أحادية على كل منحنى) وإحدى عشرة صفيحة 150mm (دائرة مغلقة من أجل المتوسط مع مجالٍ للقيم الأخرى المبيّنة). وتكون المقارنة الكمية مقبولةً فقط، كما يمكن توقعها من أجل مقاربة تقريبية. على أية حال، يعتبر التوافق الوصفي صحيحاً بالنسبة إلى نمط الانفعال.

من أجل صفيحة طبقية أكثر سماكة من تلك في الشكل 6-26، يكون الطول الحرج أكثر طولاً، والتقوسات أصغر. وعلى سبيل المثال، يكون الطول الحرج مساوياً 71mm من أجل صفيحة طبقية $[0_4/90_4]_T$. علاوة على ذلك، ما كان عيّنةً دائريةً أسطوانية عند 50mm من أجل الصفيحة الطبقية $[0_2/90_2]_T$ يصبح عيّنةً لها شكل السرج [6-38].

إن مطورو النظرية العاملة التي تقف خلف سبب تشوّه الصفائح الطبقية اللامتناظرة ذات الرقاقات المتصالبة هو هاير (Hyer) (الذي قام بتوسيع هذه النظرية بعدئذٍ). وعليه، فإن فهم ميكانيكية التشوه متوفر ويمكن استعماله لتصميم صفائح طبقية ذات تقوسات محددة.

8.6 التأثيرات البيئية

في البيئة المعرضة لها، يجب أن تدوم المواد المركبة على الأقل نفس فترة حياة المواد التقليدية التي تحل محلها. تتضمن بعض البيئات المؤذية التعرض للرطوبة والغمر بالماء والرش بالملح ووقود الطائرات والسوائل الهدروليكية والغازات العادمة (المتضمنة

ثاني أكسيد الكبريت) والنار والبرق وقذائف الأسلحة، بالإضافة إلى دمج تأثيرات بيئة الفضاء.

يمكن أن تؤدي الرطوبة أوالغمر بالماء إلى تدهور معاملات الجساءة والمتانات كما بيَّن Fried (6–39). على أية حال، يتم استرداد الخصائص الأصلية بعد عملية إزالة الماء أوالتجفيف. ويوجد بعض التأثير نفسه غير العكوس عند الرش بالملح (مع أنه يسبب التآكل الى حدٍّ ما) ووقود الطائرات والسوائل الهيدروليكية والغازات العادمة. وتعتبر النار بالطبع بيئيةً قاسيةً ذات ضررٍ واضح. تتعرض الطائرات للصواعق، ويجب لذلك حمايتها وعدم بنائها من مواد حساسة لضرر الصواعق. تم إجراء اختبارات الصواعق على الألمنيوم والألياف الزجاجية والايبوكسي– بورون والغرافيت–ايبوكسي. عانى الألمنيوم ضرراً قليلاً، وأظهرت الألياف الزجاجية علامات سطحية قليلة وتعرض البورون–ايبوكسي لبعض التصدعات والفقاعات وفصل الطبقات وأظهر الغرافيت–ايبوكسي تعريةً للراتينج وثقوباً محترقة في أماكن أخرى. ويتم قدح هذا المدى من التأثيرات بواسطة الناقلية الكهربائية الذاتية لكل مادة التي تتراوح بين العالية والمنخفضة. ويمكن تخفيض هذه التأثيرات بشكلٍ ملحوظ من خلال زيادة الناقلية الكهربائية بواسطة الطلاءات السطحية مثل رقائق الألمنيوم أوشبكات الاسلاك المطمورة.

وضع تساي لوائح آليات التهالك النوعية، وناقشها كمياً من أجل التعرض البيئي [6–40]:

أ) فقدان متانة ألياف التقوية وفق آلية التآكل تحت الإجهاد.

ب) تهالك السطوح البينية ليف– مصفوفة ناتج من فقدان الترابط ومتانة الترابط.

ت) نفوذية المصفوفة للعوامل المسببة للتآكل مثل بخار الماء الذي يؤثر في أ وب أعلاه.

ث) التبعية الطبيعية المرنة اللزجة لمعامل المصفوفة ومتانتها للزمن ودرجة الحرارة.

ج) الفعل المركب للتهالك المسرَّع بالحرارة والرطوبة.

جَمَع الناشر Springer سلسلة من الأوراق العلمية للأعمال قبل عام 1988 حول التأثيرات البيئية ونشرها في ثلاثة مجلدات [6–41].

تم دراسة تأثير الرطوبة العالية ودرجة الحرارة في مواد الايبوكسي مصفوفة وفي المواد المركَبة ذات الايبوكسي مصفوفة من قبل براونينغ وهوسمان وويتني [6-42]. يسبّب امتصاص الرطوبة للعديد وليس لكل الايبوكسيدات الانتفاخ والتلدن وانخفاض درجة حرارة التزجج- انتقال. وعملية التلدن هي عبارة عن زيادة المسافات بين الجزيئات مما ينتج منه ازدياد في الحركة الجزيئية. تعتبر هذه العملية عمليةً عكوسة (لهذا، تسبب الرطوبة انخفاض القصافة (الهشاشة) عند درجة حرارة الغرفة). يعتبر الضرر الذي يلحق بالسطح البيني ألياف- مصفوفة عملية عكوسة جزئياً فقط بفعل انتزاع الرطوبة باستعمال إجراءات "الشيّ". إن درجة حرارة التزجج-انتقال، T_g، هي درجة الحرارة التي يتحول عندها البوليمير من جسمٍ صلبٍ قاسٍ زجاجي إلى جسمٍ مطاطي غير قاسٍ، ويترافق ذلك مع تناقص في الجساءة والمتانة. في الحقيقة، لا يحصل هذا الانتقال عند درجة حرارة محددة، وإنما ضمن مدى من درجات الحرارة. وتتسبب مثل هذه التغيرات الفيزيائية للمصفوفة بأن تكون الخصائص التي تهيمن عليها المصفوفة الأكثر تأثراً (تهالك) في مادة مركبة من بوليمير، في حين تكون الخصائص التي يهيمن عليها الليف الأقل تأثراً. عرض براونينغ وهوسمان وويتني منحنيات الرطوبة الممتصة عبر سماكة الصفائح الطبقية المركبة غرافيت - إيبوكسي AS-3501-5 مع الخصائص الميكانيكية المرافقة كدالة للرطوبة ودرجة الحرارة.

درس كلٌّ من ويتني وأشتون تأثيرات العوامل البيئية التي تسبب انفعالات استطالة، وذلك من أجل انحرافات وانبعاج واهتزازات الصفيحة متعددة الطبقات [6-43]. تتضمن مثل هذه العوامل ارتفاع درجة الحرارة وانتفاخ المصفوفة الناجم عن بخار الماء أوالتمدد المفاجئ للغازات الممتصة. يمكن أن تسبب ارتفاعات درجة الحرارة وتمدد المصفوفة تهالكاً في خصائص المادة. على أية حال، جعل ويتني وأشتون خصائص المادة ثابتةً، وعالجا فقط تأثيرات درجة الحرارة والانتفاخ في الاستجابة البنيوية. وإذ تسبّب كلتا الظاهرتين الانبعاج، تم تقييم الانبعاج الناتج من التمدد الحراري مباشرةً. كما قاما أيضاً بتحليل تأثير انتفاخ المصفوفة في تواترات الاهتزاز وانحناءات الانحناء. ويعتبر الانبعاج الناجم عن انتفاخ المصفوفة حالة مقيدة لمشكلة الاهتزاز. أدى الانتفاخ إلى تناقص حمولات الانبعاج وترددات الاهتزاز وزيادة انحناءات الانحراف. وتتمتع كل هذه التأثيرات بأهمية كافية لتبرير الانتباه إلى ذلك في تحليل تصميم البنى المركبة.

يوجد التآكل الغلفاني (galvanic corrosion) في المواد المركبة على الأغلب كنتيجة للتفاعل المتبادل بين الغرافيت في الغرافيت – إيبوكسي والألمنيوم (أومعادن أخرى أقل نبلاً مثل الفولاذ والمغنيزيوم وحتى الفولاذ الملبس بالكادميوم) بوجود معظم الأملاح الكهرليتية (كلور الصوديوم.. الخ). في الرطوبة. يتآكل الألمنيوم على الأرجح بشكلٍ سريع (ولا يتأثر الغرافيت)، لهذا، يمكن أن تخفق سريعاً براغي التثبيت من الألمنيوم. ولتجنب التآكل الغلفاني، يكمن الحل الأسهل، لكن ليس دائماً العملي، في تجنب استعمال الغرافيت والألمنيوم معاً في نفس البنية. وفي حال الحاجة إلى الألمنيوم والغرافيت معاً، يجب تفادي كل مناطق التماس (بما فيه أي مسارٍ من خلال ماء ملحي). ويمكن تجنب التماس من خلال وضع طبقات متداخلة غير ناقلة ما بين الغرافيت والألمنيوم.

علاوة على ذلك، يجب أن تكون براغي التثبيت الميكانيكية من التيتانيوم، أو ربما الفولاذ المضاد للصدأ، وكلاهما أغلى ثمناً من براغي التثبيت من الألمنيوم أوالفولاذ الملبس بالكادميوم. يعتبر عنصر الاستقرار الأفقي في الطائرة F-16 مثالاً لبنيةٍ مختلطةٍ من الايبوكسي–غرافيت وألمنيوم. يتم فصل قشرتي الايبوكسي–غرافيت العلوية والسفلية من العمق الكامل لقلب هيكلٍ من الألمنيوم المجعّد بواسطة طبقاتٍ عديدة: أكسدة أنودية للألمنيوم، مُبدئ الايبوكسي، رغوة السائل (زجاج مفروم في الايبوكسي)، مادة كتيمة، وأخيراً قماش ايبوكسي–زجاج على تماس مع قشرة الايبوكسي–غرافيت. يتم بعد ذلك وضع المجموع معاً بواسطة براغي تثبيت فولاذية متانة للتآكل مغطسة في مادة كتيمة.

تتعرض المواد المركبة في الفضاء مثل تلك في محطات الفضاء المدارية لبيئة من الفراغ الشديد والدورات الحرارية لأنها تمر ضمن وخارج أشعة الشمس، وكذلك الاشعة فوق البنفسجية وأشعة الإلكترونات والبروتونات. تتضمن تأثيرات هذه العوامل البيئية: (1) يسبب الفراغ تحرر الغازات وهجرة المركبات منخفضة الوزن الجزيئي من مواد المصفوفات مثل البوليميرات، (2) يمكن أن تسبّب الدورات الحرارية تغيرات هامة في الأبعاد في تجهيزاتٍ حساسة للأبعاد مثل التيلسكوبات الفضائية، و(3) يسبّب الإشعاع الضرر نظراً إلى التأثيرات المتنافسة مثل قطع سلاسل البوليمير وتعزيز التصالب بينها. وتؤدي هذه التأثيرات الأخيرة إلى تغيير درجة الانصهار والقساوة والجساءة واستقرار أبعاد البوليميرات.

9.6 القواقع

يعتبر العمل على تحليل عنصر القوقعة البنيوي الشائع المصنوع من مواد مركبة واسعاً جداً. وسوف تُذكر المساهمات الموازية للتطورات في الفصل الخامس حول الصفائح. ترجع بعض التحاليل الأولى للقواقع متعددة الطبقات إلى دونغ وبيستر وتايلر [6−44] ومؤلف أمبارتسومايان [6−36]. تتضمن الجهود الإضافية العمل حول انبعاج القواقع متعددة الطبقات من قبل تشينغ وهو [6−45] وحول القواقع متعددة الطبقات المقواة لامركزياً من قبل جونز [6−46].

حصل جونز ومورغان على حلول تقليدية لانبعاج القواقع متعددة الطبقات ومشاكل اهتزازها وفق الأسلوب المذكور في الفصل الخامس [6−47]. عُرضت نتائجها كحمولات انبعاج معيّرة أوتردد طبيعي أساسي مقابل معامل بات دورف لتقوس القواقعة. بيَّنا أن تأثير الإقران بين الانحناء والاستطالة في حمولات الانبعاج وترددات الاهتزاز للقوقع متعددة الطبقات ومعاكسة التناظر ذات الرقاقات المتصالبة يتلاشى سريعاً كلما ازداد عدد الطبقات. مهما يكن، فإن تأثير الإقران للقواقع متعددة الطبقات واللامتناظرة ذات الرقاقات المتصالبة يتلاشى بشكل بطيء جداً. بالتالي يجب أن تتضمن تحاليل كل الصفائح والقواقع متعددة الطبقات واللامتناظرة تأثيرات الإقران بين الانحناء والاستطالة. وفي الحالة الأخرى، يُمكن الحصول على مغالاة جدية في تقدير حمولات الانبعاج وترددات الاهتزاز. بشكلٍ مشابه، يمكن حصول تقديرٍ منخفض لحمولات الانحناء، وبالتالي الإجهادات إذا تم تجاهل الإقران بين الانحناء والاستطالة.

10.6 موضوعات متفرقة

تم عمداً تجاهل بعض خصائص السلوك للرقاقة والصفيحة الطبقية في المناقشة السابقة، ومن بين هذه الخصائص الانفعالات اللدنة أوغير الخطية والسلوك المرن اللزج وانتشار الموجات.

تكون منحنيات إجهاد − قص− إجهاد − انفعال نمطية لراتنجات الايبوكسي المقواة بالألياف، غير خطية تماماً، ولكن جميع منحنيات الإجهاد− انفعال الأخرى هي بالأساس خطية. حلل هان وتساي [6−48] سلوك رقاقة بواسطة سلوك انفعال لا خطي. ووسَّع هان [6−49] التحليل إلى سلوك الصفيحة الطبقية. واختُبرت تأثيرات غير مرنة

من قبل آدامس في تحاليل الميكانيك الميكروي [6−50]. طَوَّر جونز ومورغان [6−51] مقاربةً لمعالجة حالات عدم الخطية في جميع منحنيات الإجهاد− انفعال لرقاقة مادة مركبة معدن – مصفوفة أومادة مركبة كربون−كربون. وَسَّع جونز ومورغان تحليل الرقاقة إلى تحليل انفعال الصفيحة الطبقية [6−52] وبعدها إلى انبعاج الصفائح متعددة الطبقـــات [6−53].

تنتج خصائص المواد المركبة المرنة−اللزجة عادةً من مصفوفة مرنة − لزجة (Viscoelastic−Matrix) مثل راتنج الايبوكسي. ناقش شابيري تحليل الإجهاد العام للمواد المركبة المرنة−اللزجة [6−54]. وأجرى سيمس تطبيقاً هاماً على الصفائح متعددة الطبقات [6−55].

يعتبر انتشار الموجة في مادة غير متماثلة المناحي وغير متجانسة مثل مادة مركبة مقواة بالألياف موضوعاً معقداً جداً. مهما يكن، تم تبرير دراسته بالعديد من التطبيقات الهامة مثل استخدام مواد مركبة مقواة بالألياف في مقدمات دخول مركبات الفضاء إلى الغلاف الجوي والدروع الحرارية وأنظمة حماية أخرى. يُعطي تشو [6−56] مدخلاً إلى تحليل انتشار الموجة في المواد المركبة. وطَبَّق آخرون نظرية انتشار الموجة على مشاكل إجهاد القواقع.

المراجع

6-1 M. J. Salkind, VTOL Aircraft, in: *Applications of Composite Materials*, Michael J. Salkind and Geoffry S. Hollister (eds.). ASTM STP 525, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 76-107 (reprinted with permission).

6-2 K. L. Reifsnider, E. G. Henneke, W. W. Stinchcomb, and J. C. Duke, "Damage Mechanics and NDE of Composite Laminates." Paper presented at: *Mechanics of Composite Materials: Recent Advances,* Proceeding of the IUTAM Symposium on Mechanics of Composite Materials, Zvi Hashin and Cari T. Herakovich (eds.), Blacksburg, Virginia, 16-19 August 1982, Pergamon Press, New York, 1983, pp. 399-420.

6-3 R. L. Pinckney, “Helicopter Rotor Blades.” in: *Applications of Composite Materials*, Michael J. Salkind and Geoffry S. Hollister (eds.), ASTM STP 524, American Society for Testing and Materials, 1973, pp. 108-133 (reprinted with permission).

6-4 M. J. Salkind, “Fatigue of Composites.” Paper presented at: *Composite Materials: Testing and Design* (Second Conference), H. T. Corten (Chairman), Anaheim, California, 20-22 April 1971, ASTM STP 497, American Society for Testing and Materials, 1972, pp. 143-169.

6-5 J. R. Eisenmann, B. E. Kaminski, D. L. Reed, and D. J. Wilkins, “Toward Reliable Composites: An Examination of Design Methodology.” *Journal of Composite Materials*: July 1972, pp. 143-169.

6-6 Ramesh Talreja, *Fatigue of Composite Materials*. Lancaster, Pennsylvania: Technomic, 1987.

6-7 S. G. Lekhnitskii, “Stresses in Infinite Anisotropic Plate Weakened by Elliptical Hole.” *DAN SSSR*: vol. 4, no. 3, 1936.

6-8 G. N. Savin, *Stress Distribution around Holes*. Kiev: Naukova Dumka Press, 1968. Also NASA TT F-601, November 1970.

6-9 S. G. Lekhnitskii, *Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body*, Government Publishing House for Technical-Theoretical Works, Moscow and Leningrad, 1950. Also P. Fern (Translator), Holden-Day, San Francisco, 1963.

6-10 S. G. Lekhnitskii, *Anisotropic Plates*, S. W. Tsai and T. Cheron (trans.), New York: Gordon and Breach, 1968.

6-11 L. B. Greszczuk, “Stress Concentrations and Failure Criteria for Orthotropic and Anisotropic Plates with Circular Openings.” Paper presented at: *Composite Materials: Testing and Design* (Second Conference), H. T. Corten (Chairman), Anaheim, California, 20-22 April 1971, ASTM STP 497, American Society for Testing and Materials, 1972, pp. 363-381 (reprinted with permission).

6-12 Edward M. Wu, “Fracture Mechanics of Anisotropic Plates.” In: *Composite Materials Workshop*, S. W. Tsai, J. C. Halpin, Nicholas J. Pagano (eds.), St. Louis, Missouri, 13-21 July 1967, Technomic, Westport, Connecticut, 1968, pp. 20-43.

6-13 A. A. Griffith, “The Phenomena of Rupture and Flow in Solids.” *Philosophical Transactions of the Royal Society*: vol. 221A, October 1920, pp. 163-198.

6-14 G. R. Irwin, “Fracture.” in: *Handbuch der Physik*. New York: Springer, 1958. Vol. V.

6-15 A. S. Tetelman, “Fracture Processes in Fiber Composite Materials.” In: *Composite Materials: Testing and Design*, Steven Yurenka (Chairman), New Orleans, Louisiana, 11-13 February 1969, ASTM STP 460, American Society for Testing and Materials, 1969, pp. 473-502.

6-16 Herbert T. Corten, “Micromechanics and Fracture Behavior of Composites.” in: *Modem Composite Materials*, Lawrence J. Broutman and Richard H. Krock (eds.). New York: Addison-Wesley, 1967, pp. 27-105.

6-17 G. C. Sih and E. P. Chen, “Fracture Analysis of Unidirectional Composites.” *Journal of Composite Materials*: April 1973, pp. 230-244.

6-18 M. E. Waddoups, J. R. Eisenmann, and B. E. Kaminski, “Macroscopic Fracture Mechanics of Advanced Composite Materials.” *Journal of Composite Materials:* October 1971, pp. 446-454.

6-19 H. J. Konish (Jr.), J. L. Swedlow, and T. A. Cruse, “Experimental Investigation of Fracture in an Advanced Fiber Composite.” *Journal of Composite Materials:* January 1972, pp. 114-124.

6-20 C. C. Chamis, M.P. Hanson, and T. T. Serafini, “Impact Resistance of Unidirectional Fiber Composites.” Paper presented at: *Composite Materials: Testing and Design* (Second Conference), H. T. Corten (chairman), Anaheim, California, 20-22 April 1971, ASTM STP 497, American Society for Testing and Materials, 1972, pp. 324-349.

6-21 N. J. Pagano, "Exact Solution for Composite Laminates in Cylindrical Bending." *Journal of Composite Materials*: July 1969, pp. 398- 411.

6-22 N. J. Pagano, "Exact Solutions for Rectangular Bidirectional Composites and Sandwich Plates." *Journal of Composite Materials*: January 1970, pp. 20-34.

6-23 N. J. Pagano, "Influence of Shear Coupling in Cylindrical Bending of Anisotropic Laminates." *Journal of Composite Materials*: July 1970, pp. 330-343.

6-24 N. J. Pagano and A. S. D. Wang, "Further Study of Composite Laminates Under Cylindrical Bending." *Journal of Composite Materials:* October 1971, pp. 521- 528.

6-25 N. J. Pagano and Sharon J. Hatfeld, "Elastic Behavior of Multilayered Bidirectional Composites." *AIAA Journal*: July 1972, pp. 931-933.

6-26 Eric Reissner, "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Elastic Plates." *Journal of Applied Mechanics*: June 1945, pp. A-69-77.

6-27 R. D. Mindlin, "Influence of Rotatory Inertia and Shear on Flexural Motions of Isotropic, Elastic Plates." *Journal of Applied Mechanics*: March 1951, pp. 31-38.

6-28 K. Girkmann and R. Beer, "Application of Eric Reissner's Refined Plate Theory to Orthotropic Plates." *Osterr. Ingenieur-Archiv.*: vol. 12, 1958, pp. 101- 110. Robert M. Jones (tr.), Department of Theoretical and Applied Mechanics, University of Illinois, Urbana, 1962.

6-29 S. A. Ambartsumyan, *Theory of Anisotropic Plates*, J. E. Ashton (ed.), T. Cheron (tr.), Technomic, Stamford, Connecticut, 1970. (Russian publication date unspecified.)

6-30 J. M. Whitney, "The Effect of Transverse Shear Deformation on the Bending of Laminated Plates." *Journal of Composite Materials*: July 1969, pp. 534-547.

6-31 J. E. Ashton and J. M. Whitney, *Theory of Laminated Plates*. Westport, Connecticut: Technomic, 1970, chap. Vll.

6-32 J. M. Whitney and N. J. Pagano, "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates." *Journal of Applied Mechanics*: December 1970, pp. 1031-1036.

6-33 P. Constance Yang, Charles H. Norris, and Yehuda Stavsky, "Elastic Wave Propagation in Heterogeneous Plates." *International Journal of Solids and Structures:* October 1966, pp. 665-684.

6-34 James M. Whitney, "Stress Analysis of Thick Laminated Composite and Sandwich Plates." *Journal of Composite Materials*: October 1972, pp. 426-440.

6-35 E. Reissner, "A Consistent Treatment of Transverse Shear Deformation in Laminated Anisotropic Plates." *AIAA Journal*: May 1972, pp. 716-718.

6-36 S. A. Ambartsumyan, *Theory of Anisotropic Shells*. Moscow: State Publishing House for Physical and Mathematical Literature, 1961. Also NASA TT F-118, May 1964.

6-37 Michael W. Hyer, "Some Observation on the Cured Shape of Thin Unsymmetric Laminates." *Journal of Composite Materials*: March 1981, pp. 175-194.

6-38 Michael W. Hyer, "Calculations of the Room-Temperature Shapes of Unsymmetric Laminates." *Journal of Composite Materials*: July 1981, pp. 296-310.

6-39 N. Fried, "Degradation of Composite Materials: The Effect of Water on Glass Reinforced Plastic." Paper presented at: *Mechanics of Composite Materials: Proceedings of the 5th Symposlum on Naval Structural Mechanics*, Philadelphia, Pennsylvania, 8-10 May 1967, F. W. Wendt, H. Liebowitz, and N. Perrone (eds.), Pergamon, New York, 1970, pp. 813-837.

6-40 Stephen W. Tsai, "Environmental Factors in the Design of Composite Materials, in Mechanics of Composite Materials." Paper presented at: Proceedings of the 5th Symposium on Naval Structural Mechanics, Philadelphia, Pennsylvania, 8-10 May 1967, F. W. Wendt H. Liebowitz, and N. Perrone (eds.), Pergamon, New York, 1970, pp. 749-767.

6-41 George S. Springer (ed.), *Environmental Effects on Composite Materials*, volume 1, 1981, volume 2, 1984, volume 3, 1988, Technomic, Lancaster, Pennsylvania.

6-42 C. E. Browning, G. E Husman, and J. M. Whitney, "Moisture Effects in Epoxy Materials Composites." Paper presented at: *Composites Materials: Testing and Design* (fourth Conference), J. G. Davis, Jr. (Chairman), Valley Forge, Pennsylvania, 3-4 May 1976, ASTM STP 617, American Society for Testing and Materials, 1977, pp. 481-496.

6-43 J. M. Whitney and J. E. Ashton, "Effect of Environment on the Elastic Response of Layered Composite Plates." *AIAA Journal*: September 1971, pp. 1708-1713.

6-44 S. B. Dong, K. S. Pister, and R. L. Taylor, "On the Theory of Laminated Anisotropic Shells and Plates." *Journal of Aerospace Sciences*: August 1962, pp. 969-975.

6-45 S. Cheng and B. P. C. Ho, "Stability of Heterogeneous Aeolotropic Cylindrical Shells under Combined Loading." *AIAA Journal*: April 1963, pp. 892-898.

6-46 Robert M. Jones, "Bukling of Circular Cylindrical Shells with Multiple Orthotropic Layers and Eccentric Stiffeners." *AIAA Journal*: December 1968, pp. 2301-2305. Errata, October 1969, p. 2048.

6-47 Robert M. Jones and Harold S. Morgan, "Bulking and Vibration of Cross-Ply Laminated Circular Cylindrical Shells." *AIAA Journal*: May 1975, pp. 664-671.

6-48 Hong T. Hahn and Stephen W. Tsai, "Nonlinear Elastic Behavior of Unidirectional Composite Laminae." *Journal of Composite Materials*: January 1973, pp.102-118.

6-49 Hong T. Hahn, "Nonlinear Behavior of Laminated Composites." *Journal of Composite Materials*: April 1973, pp. 257-271.

6-50 Donaid F. Adams, "Inelastic Analysis of a Unidirectional Composite Subjected to Transverse Normal Loading." *Journal of Composite Materials*: July 1970, pp. 31-328.

6-51 Robert M. Jones and Harold S. Morgan, "Analysis of Nonlinear Stress –Strain Behavior of Laminated Fiber-Reinforced Composite Materials." *AIAA Journal*: December 1977, pp. 1669-1676.

6-52 Harold S. Morgan and Robert M. Jones, "Analysis of Nonlinear Stress-Strain Behavior of Laminated Fiber-Reinforced Composite Materials." Paper presented at: *Proceedings of the 1978 International Conference on Composite Materials*, Bryan R. Noton, Robert A. Signorelli, Kenneth N. Street, and Leslie N. Phillips (eds.), Toronto, Canada, 16-20 April 1978, American Institute of Mining, Metallrgical and Petroleum Engineers, New York, 1978, pp. 337-352.

6-53 Harold S. Morgan and Robert M. Jones, "Buckling of Rectangular Cross-ply Laminated Plates with Nonlinear Stress-Strain Behavior." *Journal of Applied Mechanics:* September 1979, pp. 637-643.

6-54 R. A. Schapery, "Stress Analysis of Viscoelastic Composite Materials." in: *Composite Materials Workshop*, S. W. Tsai, J. C. Halpin, and Nicholas J. Pagano (eds.), St. Louis, Missouri, 13-21 July 1967, Technomic, Westport, Connecticut, 1968, pp. 153-192. Also *Journal of Composite Materials*, July 1967, 228-267.

6-55 David Ford Sims, "Viscoelastic Creep and Relaxation Behavior of Laminated Composite Plates." (Ph.D. Dissertation, Department of Mechanical Engineering and Solid Mechanics Center, Institute of Technology, Southern Methodist University, Dallas, Texas, 1972). (Also available from Xerox University Microfilms as Order 72-27, 298.)

6-56 Pei Chi Chou, "Introduction to Wave Propagation in Composite Materials." in *Composite Materials Workshop*, S. W. Tsai, J. C. Halpin, and Nicholas H. Pagano (eds.), St. Louis, Missouri, 13-21 July 1967, Technomic, Westport, Connecticut, 1968, pp. 193-216.

الفصل السابع

مقدّمة في تصميم البنى المُركَّبة

نبدأ في هذا الفصل دراسةَ تصميم البنى المُركَّبة. يتم أوّلاً دراسة تصميم البنى المركبة، ثمّ يتم تناول الموضوعاتِ المهمّةَ حول انتقاء الموادّ، وانتقاء التشكيلات، والوصلات، وذلك في سياق موادّها المُركَّبة الخاصّة وبُناها. بعد ذلك، توضَع متطلّباتُ التصميم إلى جانب معايير إخفاق التصميم. نُدخل فيما بعد تصميم الصفائح الطبقية وأمثَلَتها. يتم أخيراً تقديم فلسفة تصميم مُبسَّطة. تُشّكل جميعُ هذه المواضيع جزءاً من الأسئلة البنيوية عن تصميم الصفائح متعددة الطبقات التي يُعبِّر- عنها الشكل 7-1، بالإضافة إلى كونها جزءاً من الصورة الأعمّ حول تصميم البنى المُركَّبة.



الشكل 7-1: الأسئلة الأساسية حول تصميم الصفيحة متعددة الطبقات

1.7 مقدّمة

1.1.7 الأهداف

يورِد الشكلُ 7-2 قائمةَ أهداف هذا الفصل. سوف يتمّ وصفُ كلِّ هدفٍ من هذه الأهداف في الفقرات الفرعية التالية:

- مراجعة سيرورة التصميم البنيوي
- تعلُّم الاستعمالاتِ الجديدةَ والمختلفةَ للموادّ المُركَّبة
- الإلمام بسيرورات التصنيع
- القدرة على القيامِ بمقارنةٍ منطقيةٍ لمادّةٍ ما بموادّ أخرى
- معرفة التشكيلات البنيويةَ البديلة
- التآلف مع مفاهيمُ الوصلات المتنوّعة
- تفهُم متطلبات التصميم ومعايير الإخفاق
- تحديد أهمية مفاهيم الأمثَلة
- صياغة فلسفة تصميمٍ من أجل البنى المُركَّبة

الشكل 7–2: أهداف مقدمة فصل التصميم

2.1.7 مقدّمة إلى التصميم البنيوي

نقوم بمراجعةٍ للسيرورات البنيوي المُتّبَعة في التصميم البنيوي. وحيث إنك قد لا تمتلك خلفيّة في التصميم البنيوي كسيرورة منطقيّة، فسوف يتم بإيجازٍ وصف بعض الجوانب البنيوية له. إن هذه السيرورة مستقلّة بشكلٍ جوهري عن المادّة المُسعملة (ما لم تركِّزْ على تفاصيلَ صغيرةٍ للسيرورة). يتم معالجة سيرورة التصميم البنيوي في الفقرة 2.7، التي تقدِّم مراجعةً لمفاهيم التصميم البنيوي التي ينبغي اعتبارُها خلال هذا الفصل. ينبغي إدخال تعريفٍ دقيقٍ لمُصطلحاتِ التصميم والإجرائيّاتِ ذاتِ الصلة في سيرورة التصميم البنيوي.

3.1.7 استعمالات جديدة للموادّ المُركَّبة

عليك أن تتعلّمَ وتهضم الخصائصَ المميزة المتباينة وبالغةَ الحداثة للموادّ المركَّبة كما تُستعمَل فعلاً في البنى مقارنةً بما تألفه في البنى المعدنيّة. وينبغي أن تعرف الأسباب وراء استعمال الموادّ المُركَّبة.

نسمع جميعاً أن الموادّ المُركَّبة غالية الثمن، ولكنك رأيت في الفصل الأول – أوّلاً– أن تكلفةَ الموادّ في تناقصٍ مستمرّ، و–ثانياً– أن تصنيع البنى المُركَّبة يمكن أن يكون أقلَّ كلفةً منه في البنى المعدنيّة. يمكن حتى إنشاءُ بنيةٍ فعليّة بواسطة مادّة خامّ ذات كلفةٍ أعلى من كلفة المعادِن عبر استعمال سيرورات تصنيعٍ أقلّ كلفة. تكمن النقطةُ البنيوية هنا في أن التكلفة الابتدائيّة للبنية قد تكون في بعض الأحيان أدنى في حالة المادّة المُركَّبة منها في حالة المعدن. بشكلٍ عامّ، تكون كلفةُ دورةِ الحياة لبنيةٍ مُركّبة أدنى منها في بنيةٍ معدنيّة.

4.1.7 سيرورات التصنيع

عليك أن تصبح مُلمّاً بسيرورات التصنيع المتنوّعة للبنى المُركَّبة. إن هذا الطيف الواسع من سيرورات البنى المُركَّبة مختلفٌ جداً عمّا يألفه أغلبُ المهندسين في حالة المعادن. يُعَدّ التصنيعُ واحداً من أهمّ المجالات حيث تمتلك الموادُّ المُركَّبةُ فوائد كبيرة بالنسبة إلى المعادنَ. تم تناول سيرورات التصنيع في الفصل الأول، ولن يتم معالجَتها علاوة على ذلك هنا. يُعَدّ التصنيعُ الفعليّ مفتاحَ التنافسيّة في الكلفة من أجل بنيةٍ مُركَّبة، وبالتالي فهو المفتاحُ نحو نجاح البنية المُركَّبة. لذلك، ينبغي ضمن سيرورة التصميم نفسه استكشافُ سيرورات التصنيع العديدة والبديلة التي تُميِّز الموادّ والبنى المُركَّبةَ.

5.1.7 انتقاء الموادّ

عليك أن تكون قادراً على القيام بمقارنةٍ منطقيّة بين مادة وأخرى بهدف انتقاء أفضلها من أجل البنية التي تصمِّمها. إن فعاليّةَ المقارنة والانتقاء سيرورة مُعقَّدّة جداً بسبب امتلاكِ الموادّ المنفردة خصائصَها الفيزيائيّةِ الفريدة مع نقاطِ قوّتها وضعفها. تحاول أن تجد مادّةً ذات مجموعةٍ من أفضل المميزات وأقلّ السيئّات من أجل تطبيقك الخاصّ. إن التطبيقَ الذي أنت معنيٌّ به مختلفٌ عن تطبيقات الآخرين، وبالتالي سوف تبحث عن مادّةٍ ذات مجموعةٍ من الخصائص المميزة، المختلفة عمّا يبحث عنه الآخرون. في الموادّ المُركَّبة، لدينا المقدرةُ المتأصّلة على إنشاء تركيباتٍ عديدة مختلفة من الموادّ. يتمثّل ما هو أهمّ من المقدرة في حقيقةِ امتلاكِنا فعليّاً لكثيرٍ من الموادّ المُركَّبة المتباينة عمليّاً، بحيث تُشكِّل هذه الموادّ أعضاء متعددين ومختلفين من عائلة الغرافيت–إيبوكسي

على سبيل المثال. ويمتلك كلٌّ عضوٍ من عائلة الغرافيت-إيبوكسي ميزات إيجابيّة من أجل تطبيقاتٍ مُعيّنة، ولا يمكن استعماله في تطبيقاتٍ أخرى. ينبغي عليك اصطفاءُ الغرافيت- إيبوكسي الصحيح والمناسب للمتطلّبات الوظيفيّة للتطبيق الخاصّ الذي تعمل عليه. إن سيرورة انتقاء الموادّ هي واحدةٌ من مفاتيح نجاح أيّ تصميمٍ بنيوي. تتناول الفقرة 3.7 موضوعَ انتقاء المواد، حيث نقوم بفحص الموادّ المختلفة وأشكالها المتباينة وتحديد أين وكيف يمكنها أن تكون مُفيدةً.

6.1.7 انتقاء التشكيل

عليك أن تُقدِّر بعضاً من التشكيلات – أو الأشكال- البنيوية المتنوّعة التي يمكن تحقيقُها باستعمال الموادّ المُركَّبة التي يصعب – إن لم يستحل- ذلك بواسطة المعادن. يوجد بُعْدٌ جديدٌ واسعٌ من المرونة في الموادّ المُركَّبة ضمن التشكيلات البنيوية عموماً، وضمن تشكيلات الدعامات خصوصاً مقارنةً بالمعادن. يمكن تحقيق بعض التشكيلات بشكلٍ طبيعيّ جداً باستعمال موادّ مُركَّبة، بينما لا يمكن ببساطة تحقيقها باستعمال المعادِن. سوف نتناول في الفقرة 4.7 مفاهيمَ سيرورة انتقاء التشكيل – أو الشكل- البنيوي المناسِب بهدف تحقيق مستلزمات التصميم. سوف نفحص – من بين أمورٍ كثيرة – كيف يمكن جعل الدعامات المُركَّبة أكثر فعاليّةً بكثير من الدعامات المعدنيّة.

7.1.7 الوصلات

ينبغي أن تعتاد على بعض المفاهيم المتنوّعة عن كيفيّة تحليل وتصميم وصلةٍ بين أعضاء من بنى مُركَّبة، أو بين عنصرٍ بنيوي مُركَّب وعنصرٍ بنيوي معدنيّ. يُشكِّل نقلُ الحمولات بين العناصرِ البنيوية مجالَ مسائل مفتاحيّةٍ في سيرورة التصميم. سوف نعتبر الوصلات – سواء أكانت ذات برغي أم ملتصقة- في الفقرة 5.7. سوف يتمّ فحصُ بعضِ صعوباتِ صنع وصلةٍ من موادّ مُركَّبة، بالإضافة إلى بعض النجاحات التي تمّ تحقيقُها.

8.1.7 متطلّبات التصميم

ينبغي أن تفهمَ معنى متطلبّات التصميم، وماذا تعني معايير الإخفاق بدلالة هذه المتطلّبات. لا يعني تحقيقُ معيارِ إخفاق لبنية ما بالضرورة أن هذه البنية سوف تتحطّم إلى قطعتَين اثنتَين أو أكثر. يعني الإخفاق في سياق التصميم ببساطة أن الشيء المُصمَّم لا يستطيع أداء وظيفتِه المُكلَّف بها. يمكن لهذه الوظيفة أن تتضمّن قيداً على الانحراف بدلاً من قيدٍ على الإجهاد. ربّما نكون في طور تصميم قطعةٍ لآلةٍ دوّارة ذات ذراعٍ لا يمكنه أن ينحرف للأسفل بمقدارٍ كبير، أو أن الذراع يلاقي قطعةً أخرى من الآلة ممّا يُعطِّل الآلةَ بمجملها. من الواضِح إذاً أن الانحراف يمثِّل المعيارَ الناظم لإخفاق التصميم، وينبغي الحكمُ على مقدرة مُصمِّمنا إزاء هذا المعيار الخاصّ. توجد أمثلةٌ كثيرة لإثبات كيف تُقاسُ التصاميم بدلالة فعاليّاتها الوظيفيّة.

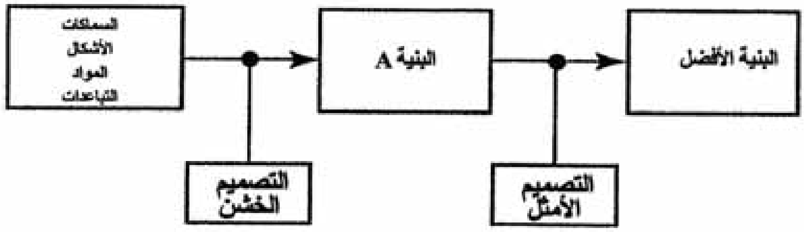
سوف نناقش في الفقرة 6.7 معاييرَ إخفاق التصميم وكيف ترتبط متطلّباتُ التصميم بتقييم ما إذا كان التصميم المعنيّ قادراً على تحقيقها. ينبغي الحصولُ على نتائجَ تحليلاتٍ عديدة قبل أن نستطيع الحكمَ على مدى قدرةِ تصميمٍ ما على تحقيق معايير إخفاق التصميم ذي الصلة. على سبيل المثال، ذكرنا سابقاً شرطاً عن قيمةٍ قصوى للانحراف من أجل قطعةٍ خاصّة لآلةٍ دوّارة. ولقد حللنا في هذا الوضع ماذا ستكون الانحرافات. من الواضحِ جداً أننا يجب أيضاً أن نتأكّدَ أن القطعةَ المعنيّةَ لن تخفق قبل بلوغ ذلك الانحراف الأقصى، حيث يعني الإخفاق تحطُّمَ القطعة إلى قطعتَين، أي الكسر. لذلك، علينا أن ننظرَ إلى مستلزماتِ الكسر بالإضافة إلى مستلزمات الجساءة. إذا كانت البنية قطعةً من جهازٍ دوّار، فإننا يكون لدينا عادةً مستلزمات التعب أيضاً. وهكذا، ينبغي تفحُّص تعدُّديّةٍ الشروط، ويكون المجموعُ الكليّ لمجمل هذه الشروط مجموعةَ معايير إخفاق التصميم التي ينبغي تحقيقُها.

9.1.7 الأمثَلة

عليك أن تُحدِّد مدى أهميّة مفاهيم الأمْثَلَة (Optimization) المتنوّعة في تصميم البنى المُركَّبة. في الحقيقة، إن سيرورة التصميم البنيوي هي الأمثَلة، ويعني ذلك أنك تبحث دوماً عن أفضل التصاميم، حيث تُقاسُ كلمة "أفضل" بطرائقَ متنوّعة اعتماداً على

التطبيق. علينا أن نتعامل مع متغيرات تصميمٍ عديدةٍ مثل سماكة الصفيحة، والتباعد بين الدعامات، إلخ. وهكذا، من المغري جداً أن نؤمنَ بأن مفاهيم الأمثَلة تمثّل المقاربةَ المثاليّةَ للتصميم البنيوي. سيكون لطيفاً الآن لو استطعنا القول إن الأمثَلة الرياضيّات طريقةٌ سيرورة لنا من أجل تصميم بنية كبيرةٍ، لأن هذا هو ما نبتغي فعلاً عملَه. مع ذلك، توجد بعض التقييدات السيرورة على الأمثَلة تتضمّن حجمَ الحاسوب، وسرعتَه، وتكلفتَه، علاوةً على مقدرتِه على معالِجة جميع متغيرات التصميم.

سوف نناقش مفاهيمَ الأمثَلة في الفقرة 7.7 لكي نحاولَ فهمَ كيف يمكننا أن نأخذ بعين الاعتبار جميعَ متغيرات التصميم العديدة الموجودة من أجل بنيةٍ مُركَّبة، ومحاولة الإجابةَ عن السؤال الأساسيّ في التصميم: ما هي التوليفةُ الخاصّةُ لمتغيرات التصميم التي تقود إلى أفضل بنيةٍ مُركَّبة؟ تنساب السيرورة من متغيرات التصميم لبنية "ما" عبر تصميمٍ ابتدائيّ خشن، ثمّ إلى البنية "الأفضل" عبر تقانيات الأمثَلة، كما يُوضّح الشكلُ 3-7. يتوقّف بعض المُصمِّمين عند بنية "ما" عندما تكون قد حقّقت أهدافَهم (المحدودة). مع ذلك، تُمكّننا تقانيات الأمثَلة أن نذهبَ أبعد من مجرّد تصميمٍ "ما"، غيرِ كافٍ افتراضاً– نحو تصميمٍ يُعَدّ الأفضلَ بمعنىً من المعاني. إن هذه الخطوةَ الثانية أكثر تعقيداً وجزاءً من تقانيات المحاولة والخطأ في الماضي. في الحقيقة، تستند هذه الخطوةَ الثانية بشكلٍ راسِخ إلى علاقاتٍ ميكانيكيّة بين الخصائص والأداء تُستعمَل في دراساتٍ معاصرةٍ لحساسيّة التصميم.



الشكل 7–3: كيفية الحصول على "أفضل" بنية

يمكن تفسير معنى بنى "أفضل" بطرائق متنوّعة. من أجل الطائرات، يوافِق عموماً الوضعُ الأكثر طلباً وضعَ الوزن الأدنى. إذا كان الشأنُ الموجه هو الأداء – كما في حالة الطائرات العسكريّة–، فإن "أفضلَ" وضعية يمكن أن توافق على السواء الأداءَ الأعلى مع بعض توليفات الوزن والتكلفة. أمّا من أجل طائرات النقل التجاريّ، فإن "أفضلَ" بنيةٍ هي ربّما توليفةٌ من الأداء والتكلفة. وهكذا، يعتمد السؤالُ عن كيفيّة قيامنا بالأمثَلة وتوخّي الأفضل على نوعية البنية التي نقوم ببنائها، علاوةً على متطلبات الأمثَلة الإجماليّة. في الفقرة 7.7 حول مفاهيم الأمثَلة، سوف نتفحّص بضعَ تقانيات مُستعملة، بالإضافة إلى بعض المشاكل التي نلاقيها عادةً في بنى المُركّبة.

10.1.7 فلسفة التصميم

لعل آخر مجالات الاهتمام هو ضرورةُ تطوير فلسفةِ تصميمٍ سيرورة من أجل البنى المُركَّبة. هل هناك فلسفةٌ تمكننا أن نأخذ بعين الاعتبار ونوافق بين جميعَ خصائص السلوك مميزة البنيوي للموادّ المُركَّبة؟ هل يمكننا القيام بذلك بدون أن نغوصَ في مستنقعٍ من القضايا المُعقَّدة ؟

تعالِج الفقرة 8.7 فلسفةَ تصميم البنى المُركَّبة من أجل استكشاف بعض المقارباتِ السيرورة والبسيطة نسبيّاً بهدف تحقيق تصميمِ مُركَّبٍ فعّالٍ بدون التعثُّر بمسائل عديدة. تتضمّن هذه المسائل الميكانيكَ الميكروي، والأمثَلَة، والمميزات اللاخطيّة، وآثار غياب الحواف، وجميعَ تلك الجوانب السلوكيّة التي سمعت أنه يمكنها أن تخلق مشاكلَ عديدة مع بنى المُركَّبة. إن السؤالَ الرئيسيّ هو: كيف يمكننا تجنُّب جميع هذه المشاكِل وتصميم بنية مُركَّبة تفعل كلَّ ما نبتغيه منها، بدون أن تعاني أيٌّ من هذه المشاكِل؟

11.1.7 خلاصة

سوف تتمّ معالجةُ أيٍّ من المواضيع المذكورة أعلاه في الفقرات التالية في هذا الفصل. تذكّر أن ما نعرضه ليس إلاّ مقدّمةً وجيزةً عن المجال المُذهل والمعقد الخاصّ بتصميم بنى المُركَّبة. وهكذا، ينبغي الإبقاءُ على التفاصيل تحت هيمنة المفاهيم الشمولية.

2.7 مقدّمة إلى التصميم البنيوي

1.2.7 مقدّمة

توصف سيرورة التصميم البنيوي العامّ – بقطع النظر عن المادّة المُستعمَلة، كتمرينٍ استهلاليّ بغرض التحضير للتصميم مع الموادّ المُركَّبة، كما في المُخطَّط التمهيديّ للشكل 7–4. بعد ذلك، تُعرَّف أهدافُ وموجهات (drivers) التصميم للمساعدة في تطويرِ منهجيّةٍ للتصميم. توصف بعدها المراحِل البنيوية الثلاث لتحليل التصميم. يتمّ التركيزُ على أهميّة اختبارِ أجزاءٍ من البنية عند كلّ مرحلةٍ من مراحِل التصميم، لأن سيرورة التصميم ليست مجرَّد تمرينٍ ورقيّ، بل يجب أن تكون لها قابليّةٌ لتطبيق عملية، وبالتالي ينبغي المصادقة عليها.

- ما هو التصميم؟
- عناصر التصميم
- خطوات إجرائية التصميم البنيوي
- أهداف و موجهات التصميم
- مراحل تحليل التصميم

الشكل 7–4: عناصر التصميم البنيوي

2.2.7 ما هو التصميم؟

لنبدأ بمقدّمة حول مجال تصميم بنى. سوف نفاضل أوّلاً التحليلَ، الذي نفترضه مألوفاً تماماً بالنسبة إليك، والتصميم. يوضِّح الشكلُ 7–5 التحليلَ بالطريقة الآتية: إن التحليل هو تحديد السلوك الذي يُبديه تشكيلٌ بنيويٌّ خاصّ تحت حمولاتٍ مُحددة. يعني ذلك التساؤل ما هي الحمولة التي تتحمّلها البنية؟ أو ما هو مقدار انحراف البنية عند نقطةٍ حاسمةٍ مُحدّدة؟ أمّا التحليلُ فهو طريقٌ باتّجاهٍ وحيد. نبتدئ مع بنيةٍ مُعيّنة، ثمّ نسأل: ما مدى جودةِ هذه البنية؟ وما هو مقدار الإجهاد الذي يمكنها تحمُّله، أو ما هو مقدار الحمولة الإجمالية التي يمكنها تحمّلها دون انتهاكِ أيّ من قيود الإجهاد، أو قيود الانحراف، أو أيّ قيودٍ أخرى على الأداء؟ ما مقدار الحمولة التي تنبعج عندها البنية؟ ما هي ترددات

الاهتزاز؟ وهكذا، يُعَدّ التحليلُ تقييماً شاملاً لاستجابةِ البنية ولمقدراتِها. نبتدئ بتشكيلٍ بنيوي واحِد، ونعيّن على نحوٍ وحيد جميع الخصائص المميزة للاستجابة. تتمثّل هذه السيرورة عموماً بمجموعةٍ من مسائلَ ذاتِ قيم حدوديّة أو مسائلَ قيمٍ ذاتيّة. وهكذا يكون التحليل مقاربةً حتميّة لحلّ مجموعةٍ ضيقةٍ جداً من المسائل. نفكِّر بمفهوم التحليل، كما لو كان سيرورة واسعةَ النطاق ذات سِماتٍ متنوّعة، لكن التحليلَ بالنسبة إلى التصميم هو في الحقيقة سيرورة ضيقةٌ ومحدودة جداً.

- التحليل: تحديد استجابة السلوك لتشكيل بنيوي خاص تحت حمولات محددة (ما هي الحمولة التي تتعرض لها البنية).
- التصميم: عملية تغيير الأبعاد و الأشكال و المواد من أجل الحصول على أفضل (أمثلي) تشكيل بنيوي من أجل تحمل حمولات محددة و أداء مهام محددة (ما هي البنية الأفضل لتحمل الحمل؟)

الشكل 7–5: التحليل مقابل التصميم

يميل العديدُ من المُحلِّلين إلى الاعتقاد بأن التصميمَ مجرّدُ تحليلات متتاليةٍ. يميلون كذلك إلى الاعتقاد بأن التحليلَ القائم على العناصرِ المنتهية (finite element) يأتي على رأس قائمة أدوات التصميم في العالَم. يعرفني بعضُ الناس، على الأحسن، على أنني مختصٌّ بالعناصر المنتهية، ولكن نعم، لقد عنيت ضمنيّاً أن طريقةَ العناصرِ المنتهية ليست "كلَّ شيءٍ وآخر المطاف"! إن التحليلَ القائم على العناصرِ المنتهية لا يمكن بالتأكيد الاستغناء عنه في معظم ممارسات تصميم البنى المُعقدة. مع ذلك، تكمن الروحَ المحركة وراء التصميم في منطقُ كيفيّةِ تغيير متغيرات التصميم في التشكيل المعنيّ من أجل تحقيق متطلّبات التصميم.

التصميم – بخلاف التحليل، هو سيرورة تغيير جميع الأبعاد، والأشكال، وربّما المواد المنخرطة في تشكيلٍ بنيوي، لتمكين هذا التشكيل بأن يحملَ حمولاتٍ مُحدّدة، وأن يقومَ ببعض المهامّ الخاصّة، وأن تكون تكلفتُه ووزنُه أصغرَ ما يمكن، أو أن يُحقِّقَ معياراً آخرَ ما من أجل "الجودة". يعني ذلك بمعنىً من المعاني أننا نقلب المسألةَ رأساً على عقــب عن مفهوم التحليل. إننا نقول إننا لا نعرف التشكيلَ البنيوي، بل نعرف الحمولات

فقط لا غير. ما هي البنية التي تستطيع حملَ هذه الحمولات؟ لا تملكُ هذه المسالةُ إجابةً وحيدةً! يمكننا أن نجد بنى عديدةً ومتباينةً تتحمَّل جميعُها الحمولةَ المنشودة. تحاول سيرورة التصميم أن تُحدِّد، تحت قيودٍ أو خطوطٍ رئيسية للمنتج الذي نرغب بتصميمه، ما هي البنية الأفضل التي تتحمل هذه الحمولات. وهكذا، لا يُمثِّل التصميمُ سيرورة حتميّةً. بدلاً من ذلك، التصميمُ هو إجرائيّةٌ تكراريّةٌ لانتقاء تشكيلٍ وتفحص مدى قرب مقدراتِه من تحقيق متطلّبات التصميم، ومن ثمّ اعتمادِ تغييراتٍ نأمل أن تقودَ إلى تحقيق جميع متطلّبات التصميم. وتتضمن عملية التصميم عموماً الإعلان عن وجوبِ كون التكلفة والوزن أقل ما يمكن، شريطةَ كونِ هذَين العامِلَين من الأمور الواجب اعتبارُها.

يكمن المفتاحُ نحو ترشيد سيرورة التصميم في صياغة مجموعةٍ من العلاقات المُحدَّدة ميكانيكيّاً التي تربط التشكيلَ بأدائه. إن استعمالَ هذه العلاقات الميكانيكيّة هو ما يُميِّز المُصمِّمَ البنيوي عن مُصمِّم الألبسة.

من الناحية الفلسفيّة، التصميمُ أكثرُ من مجرّد مقلوبٍ للتحليل. ليس التحليلُ إزاء التصميم مسألةً رياضية مقلوبة. لقد انتقلنا من مسألةِ تحليلٍ حتميّة إلى مسألة تصميمٍ غيرِ حتميّة. تتطلب مسألة التصميم اتّخاذُ الكثيرُ من القرارات، وهذا ما يجعل التصميمَ سيرورة معقّدةً جداً إلى جانب كونها غيرَ حتميّةٍ. علاوةً على ذلك، لا تُمثِّل النتيجةُ النهائيّةُ لسيرورة التصميمِ حلاًّ وحيداً لمواصفات التصميم! يعني ذلك أن هناك تشكيلاتٍ عديدةً ممكنةً يمكنها تحقيقُ متطلّبات أداء التصميم. يغدو السؤال إذن: من بين التشكيلات الممكنة، ما هو التشكيلُ "الأفضل"؟

لنعتبر كمثالٍ على التبايُن بين التحليل والتصميم مسألةَ انبعاج عمودٍ. من أجل تحليل متانة الانبعاج لعمودٍ مُدعَّمٍ بشكلٍ بسيط، ومُحمَّلٍ محوريّاً، نستعمل معادلةَ أولر–بيرنولي:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (7.1)$$

المُشتقّة عادةً في أيّ مُقرَّرٍ أساسيٍّ في ميكانيك الموادّ، حيث P حمولة الانبعاج، E معامِل المرونة للمادّة، I عزم العطالة للمقطع العرضي للعمود، وL الطول غير المستند إلى العمود. تنصّ مسألةُ تحليلٍ نمطيّة على إيجادِ حمولة الانبعاج من أجل عمودٍ مُعيَّن.

من أجل ذلك، تكون المقاديرُ E, I, L معلومة، وهكذا تكون المسألةُ حتميّةً وضوحاً. يعني ذلك أن جميع المتغيرات على الطرف اليميني من المعادلة الناظِمة الوحيدة معلومةٌ، وبالتالي يمكن تقييمُ المعادلة مباشرةً.

وبخلاف مسألة التحليل، لنفترض أنه ينبغي علينا تصميمُ عمودٍ يقاوم الانبعاجَ تحت حمولةٍ مُحدَّدة مُسبقاً. من أجل ذلك، نبحث عن خصائص العمود E, I, L بمعرفة حمولة الانبعاج P، أي الحمولة الأعظميّة التي يمكن حملُها بدون حدوث انبعاج− فقط لا غير. مع ذلك، لدينا هنا ثلاثة مجاهيل، ومعلومٌ واحِد، ومعادلة ناظِمة واحدة، وبالتالي ليست المسألة حتميّة بشكل واضح. حتى ولو علمنا طولَ العمود، كما في أيّ مسألة تصميمٍ نموذجيّة، فإننا ما نزال لا نملك مسألةً قابلةً للحلّ. نجعل المسألةَ ممكنةَ الحلّ عبر انتقاء العمود من بين مجموعةٍ مُخصّصةٍ من موادّ ممكنة، مثل الفولاذ، أو الخرسانة، أو الخشب، أو الألمنيوم من أجل عمودِ بناءٍ اعتيادي. يعني ذلك أنه إذا عرفنا L وE من أجل حمولةٍ منشودةٍ P، أمكننا إيجادُ I من المعادلة (7.1):

$$l = \frac{PL^2}{\pi^2 E} \qquad (7.2)$$

مع ذلك، نحصل من المعادلة (7.2) على أربع قيم مختلفة لعزم العطالة من أجل كلٍّ من الموادّ الأربعة المختلفة (وبالتالي أربع قيمٍ مختلفة لمعامِل المرونة). مع ذلك، لا تدلنا معرفةُ عزم العطالة لعمودٍ ما على شكله أو على أبعادِه! نختار عادةً عموداً ذا عزم عطالة مساوٍ على الأقلّ للقيمة التي تُحدِّدها المعادلة (7.2). مع ذلك، ينجم عن عملية الانتقاء هذه عادةً اعتبارُ عدّة أعمدةٍ تُحقِّق كلُّها متطلّبات التصميم. وهكذا، علينا استعمالُ معيارٍ آخر ما إضافةً إلى معيار الانبعاج من أجل انتقاء العمود الفعليّ. يعني ذلك أن أعمدةً كثيرةً يمكن أن يكون لها نفسُ قيمةِ عزم العطالة المطلوبة، وبالتالي كيف يمكننا القرارَ حول أيِّ عمودٍ هو "الأفضل"؟ ربّما تكون التكلفةُ أساساً مناسِباً نعتمد عليه في مقارنتنا للأعمدة المتنوّعة، وبالتالي سوف نختارُ المادّةَ والمقطعَ العرضيَّ الموافقَين للعمود ذي التكلفة الأقل. أو من الممكن أن يكون الوزنُ موجه التصميم، وبالتالي سوف نختارُ العمودَ ذا الوزن الأصغريّ. على أيّ حال، يوضح هذا المثال بشكلٍ مناسب مدى تعقيدِ مسألة التصميم مقارنةً بمسألة التحليل، ويُلخِّص ذلك الشكل 7−6.

- تحليل حمولة الانبعاج

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad E, I, L \rightarrow P$$

- التصميم ضد الانبعاج
  - P المرغوبة $\quad E, I, L \nleftarrow$
  - إذا كان L معروفاً، $E, I \nleftarrow P, L$
  - إذا كان L معروفاً والمادة منتقاةً $I \leftarrow P, L, E$
  - أو إذا كان L معروفاً والمادة منتقاةً من الفولاذ والخرسانة والخشب والألومينوم $P, L, E_S, E_C, E_W, E_A \nrightarrow I_S, I_C, I_W, I_A$

الشكل 7–6: تصميم الانبعاج مقابل مثال التحليل

تحدث مسألةٌ حتّى أكثر صعوبةً إذا لم يكن القضيبُ موشوريّاً، أي إذا لم يكن عزمُ عطالتِه ثابتاً بموازاة طولِه. ينبغي علينا عندها إيجادُ حل عبارة $I(x)$ حيث x الإحداثيّة المحوريّة للقضيب. اقتصر تناول كيفيّةِ جعلِ توزيعِ المقاطع العرضيّة أمثليّاً على مسائل يكون فيها E و L ثابتَين، ولم يتم التطرّق لمسألة تصميم العمود العامّة.

يظهر مصطلَح التسوية أو التوازن (بين العوامل المؤثرة) كثيراً في مناقشات سيرورة التصميم. عندما نلاقي أهدافاً متعارِضة، فإنه ينبغي تحقيقُ تسويةٍ وحلٍّ وسط بينها. إن ممارسة التسوية يعني تبادُل (أو مقايضة) إنجاز بآخر. على سبيل المثال، يمكن التكيُّف مع زيادة وزن الطائرة عبر التقليل من المدى، وإنقاص حمولة الطائرة، وزيادة استهلاك الوقود، أو توليفةٍ ما بين هذه الإمكانيّات الثلاثة. لا يمكن الوصولُ إلى التسوية المناسبِة لهذه النتائج إلاّ عبر تفحُّص متطلّبات الأداء الناجِح للطائرة واتّخاذ قرارٍ حول توليفةِ العوامِل ذاتِ المعنى الأكثر جدّيّةً. تنحصر التسويات ضمن سيرورة التصميم غيرِ الوحيد بسبب وجود عدّة حلولٍ ممكنة لمسألة التصميم. لا توجد التسويات في مجال التحليل لأننا نتعامل في هذا المجال مع تشكيلاتٍ قد تمّ تعريفُها، وبالتالي لا يمكن إجراء أيّ تغييرات.

3.2.7 عناصر التصميم

لنتقصَّ عناصر التصميم البنيوي. سوف تتعرّف بالتأكيد على بعض العناصِر، ولكن عناصرَ أخرى قد لا تكون مألوفةً. مع ذلك، وبهدف الشروع بطريقةٍ مناسبة، دعنا نبتدئ بالأساسيّات بحيث تفهمَ المُصطلحاتِ والمفاهيمَ التي يتناولها هذا الفصل. تشرح الفقراتُ التاليةُ عناصرَ التصميم المبيّنة في الشكل 7–7.

- إمكانيات التصميم

  إذا كنا لا نستطيع تحليله، فلن نستطيع تصميمه
- بدائل التصنيع

  إذا كنا لا نستطيع تصنيعه، يضيع "التصميم"
- انتقاء المواد

  هل اخترنا المادة "الأفضل"؟
- انتقاء التشكيل

  ما هي التشكيلات البديلة الأفضل؟
- تقنيات التوصيل

  علينا التمكن من وضعها معاً
- الأمثلة

  هل لدينا التصميم "الأفضل"؟

الشكل 7–7: عناصر التصميم

علينا فيما يخصّ العنصرَ الأوّلَ أن نحدِّد فيما إذا كنّا قادرين على تحليل المنتج. ينبغي أن نعتبرَ ونُقيِّمَ إمكانيّاتِ التحليل لأنه في حال لم نستطع تحليلَ المنتج، فإننا عاجزون على الأرجح عن تصميمِه بطريقةٍ منطقيّة. إذا كان التصميم يعني تجميعَ مجموعةٍ من الأجزاء التي تجعلنا متأكِّدين من أنها سوف تقوم بالتشغيل المنشود، فإن التحليل باعتراف الجميع ليس جوهريّاً. نحن نحاوِل افتراضاً تصميمَ شيءٍ بطريقةٍ منطقيّة عندما نسأل: ما هو حجمُ وشكلُ كلِّ جزءٍ من أجل أن يقوم بعملِه ضمن البنية الإجماليّة؟ تتطلّب الإجابةُ عن هذا السؤال الأساسي أن نكون قادرين على إنجاز مجموعةٍ من

التحاليل الحاسمة والمُحدَّدة لتقييم مقدرة كلِّ جزءٍ من البنية، بالإضافة إلى مقدرة البنية الإجماليّة. وفقاً لذلك، يكون التحليلُ في شكل علاقاتٍ مُحدَّدة ميكانيكيّاً أساسيّاً وضروريّاً على نحوٍ قاطع.

يتمثّل العنصرُ الرئيسيّ الثاني للتصميم في مجموعة بدائلِ التصنيع، لأنه إذا كنّا لا نستطيعُ تصنيعَ المنتج، فإن تصميمَه غيرُ مُجدٍ اعتباريّاً. من الممكن أن تكون لدينا فكرةٌ لطيفةٌ عن بنية ما، ولكن إذا لم يكن هناك أيّ شخصٍ قادرٍ على بناء هذا البنية، فإن الفكرةَ مضيعةٌ للوقت.

بعد ذلك يأتي عنصرُ انتقاء المادّة: هل اخترنا "أفضل" مادّةٍ ممكنةٍ من أجل كلِّ جزءٍ في البنية؟ يكون السؤالُ أكثرَ عموميّةً من أجل البنية الإجماليّة: هل اخترنا المجموعةَ الصحيحةَ من الموادّ للتمكن من عمل البنية وفق "أفضل" طريقة؟

أمّا انتقاء التشكيل فيتمثّل في السؤال: هل وجدنا من بين جميع التشكيلات البديلة التشكيلَ الذي يحقّق أهدافَنا بـــ"أفضل شكلٍ"؟ هل هناك شيءٌ ما عن بنيةٍ مُركَّبةٍ تتضمّن حرّياتٍ تختلف عمّا نعتبره عادةً من أجل المعادنِ؟ هل تُخوِّلنا درجاتُ الحريّة الجديدةُ هذه بانتقاء "أفضل" تشكيلٍ ممكن من أجل بنيتنا الخاصّة؟

تمثِّل تقانياتُ التوصيلِ والربطِ العنصرَ التاليَ في التصميم. من غير المفيد على الإطلاق امتلاكُ مجموعةٍ من عناصرَ بنيويةٍ لا يمكن تثبيتُها مع بعضها البعض. وهكذا، تكون تقانيات التوصيل أساسيّةً في تقييمنا لكيفيّة تصميمِ بنية كاملة. لا معنى للبنية في غياب تقنيات التوصيل، إذ تكون عندها مجرَّد مجموعةٍ من قطع لا تعمل معاً. تحمل بعضُ المجالات في تقانيات التوصيل أوجهَ شبهٍ مع تقانيات وصلِ البنية المعدنيّة، بالرغم من وجود بعض الاختلافاتِ الكبيرةِ جداً.

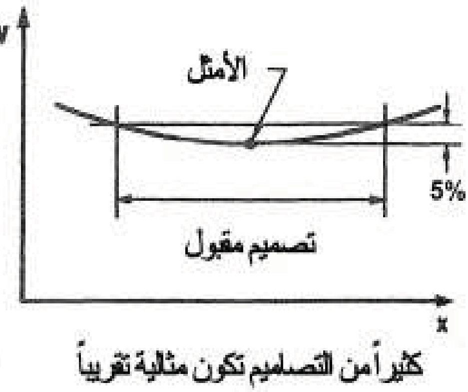
يُمثِّل عنصرُ الأمثَلة التالي حقيقةً السؤالَ الأساسيَّ في التصميم. إن التصميمَ. بالنسبة إلى أناسٍ كثيرين هو الأمثَلة. يعتمد مقدارُ نجاحِنا في أمثَلة بنية ما على عدد متغيرات التصميم الرياضيات المتوفّرة من أجل إنجاز سيرورة الأمثَلة هذه. مع ذلك، تعني الأمثَلةُ وجوبَ اعتبارِنا لجميع متغيرات التصميم العديدةِ، وإيجادَ "أفضل" توليفةٍ، أي التوليفة الأمثليّة، لقيم متغيرات التصميم. إن التصريحَ عن هذا الهدف أو الغرض مهمّة سهلة، ولكن عجزَنا عن تحقيق هذا الهدف فعلاً يرتبط بقيودٍ تُحدّ من قدراتِ تقانياتنا الحسابيّة والنظريّة، علاوةً على غياب استراتيجيّاتِ أمثَلةٍ فعّالة. عندما نحاول أتمتةَ

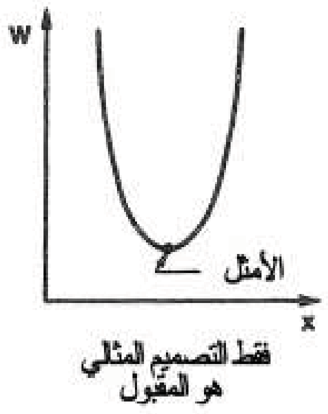
إجرائيّةِ التصميم، نجد أنه ينبغي، بمعنى من المعاني، محاكاةُ الأعمال المُعقَّدة للعقل البشري. نفكِّر غالباً بالتصميم على أنه مهمّةٌ نقدر على القيام بها في رؤوسنا، وهذا في الحقيقة ما نفعلُه تماماً من أجل تصاميم سهلة. مع ذلك، وفي حالةِ بنيةٍ مُركَّبة بكلّ متغيرات تصميمِها (الأكثر عدداً بكثير من حالة البنية المعدنيّة)، لا بدّ من أخذ مجالٍ واسعٍ جداً من الأفعال التي لا يمكن – في الوقت الحاضِر– لتقانتنا الحاسوبيّة القيامُ بها. لا يمكننا في الوقت الحاضِر أن نؤتمِتَ مجملَ تصميم طائرة البوينغ 747 النفّاثة الضخمة. مع ذلك، يمكننا تحقيقُ تقدُّمٍ هنا أو هناك باتّجاه هذا الهدف. نستطيع القيامَ ببعض الأقسامِ من المشروع الإجمالي، ولكن لو قُدِّر لك رؤيةُ رسمٍ للهيكل البنيوي في طائرة بوينغ 747، لأدركْتَ بسهولة أن عددَ القرارات التي يجب اتّخاذُها كبيرٌ جداً، وبالتالي سوف يقتضي إجرائيّةَ تصميمٍ مُؤتمتةٍ فائقة التعقيد. لاحظ أنني تناولت استعمالَ طريقة العناصر المنتهية في التصميم، ولكن ليس في التحليل! تمّ تحليلُ طائرة البوينغ 747 بطريقة العناصر المنتهية (التي طُوِّرت إلى حدٍّ كبيرٍ من قبل العامِلين في شركة بوينغ خلال الخمسينيّات من القرن المنصرم).

يعتمد قبولُ تصميمٍ ما في إجرائيّة الأمثَلة على طبيعة جانب (عنصر) السلوك الذي تتوخّى أمثَلتَه (ويُدعى غالباً دالّة الاستحقاق (merit function) أو الأهليّة) في جوار الوضع الأمثليّ. على سبيل المثال، إذا كان الوزنُ هو دالة الاستحقاق، فإننا نسعى إلى إيجادَ البنية الأقلّ وزناً التي سوف تحقّق متطلّبات التصميم. من أجل تبسيط المثال، نعتبر بنيةً بنيويةً بمتغير تصميمٍ واحدٍ فقط x. إذا كان الوزنُ الأمثليّ مختلفاً جداً عن الأوزان المجاوِرة في فضاء التصميم، كما في الشكل 7–8، عندها يكون التصميمَ الأمثليّ هو المقبول فقط. يعني ذلك وجودَ غرامةِ وزنٍ كبيرة من أجل تغيّراتٍ طفيفة في متغير التصميم بعيداً عن قيمته الأمثليّة. مع ذلك، إذا كان الوزن الأمثليّ أدنى بقليلٍ من وزن التصاميم العديدة المُجاوِرة في فضاء التصميم – كما في الشكل 7–9، فعندها توجد تصاميمُ كثيرةٌ يمكن قبولُها. يعني ذلك وجودَ غرامةِ وزنٍ صغيرة من أجل تغيُّراتٍ مُعتبَرة في متغير التصميم بعيداً عن قيمته الأمثليّة. قد لا يستحقّ بلوغُ التصميم الأمثليّ في هذه الحالة الأخيرة الجهدَ المبذولَ، أي أن الكسبَ في توفير الوزن باستخدام التصميم الأمثليّ يمكن ألاّ يساوي تكلفةَ إيجادِ الوضع الأمثليّ في هذه الحالة. يوجد يقيناً مثلُ هذا الوضع إذا أظهر قسمٌ ما من طائرة البوينغ 747 منحنيَ أمثَلةٍ يشبه ذلك في الشكل 7–9.

في هذا المثال، سوف تفوق تكلفةُ إيجاد التصميم الأمثليّ بعدّة مرّاتٍ تكلفةَ مجرد إيجاد تصميمٍ في مكانٍ من المنطقة العريضة الشبيهة نوعاً ما بالحوض.

ينبغي إنجازُ دراساتِ حساسيّةٍ من أجل متغيرات متنوّعةٍ للتصميم من أجل تحديد فيما إذا كان التصميمُ قابلاً للتأثُّر بشدة من قبل متغير مُعيَّنٍ، كما في الشكل 7–8، أو بشكلٍ ضعيفٍ من قبل متغير آخر، كما في الشكل 7–9. تعتمد شدّة التأثير في كون الميلُ (المشتقّ dW/dx) كما في الشكلَين 7–8 و7–9 عالياً أو منخفضاً بالقرب من التصميم الأمثليّ.





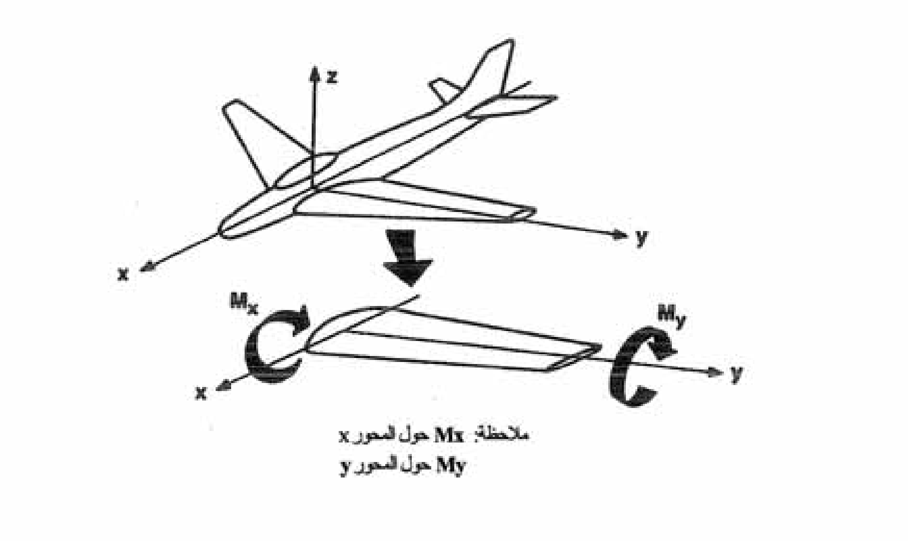
الشكل 7–9: تصميم أمثالي عريض **الشكل 7–8: تصميم أمثلي ضيق**

كلّ تصميمٍ في الحقيقة دالة لعدّة متغيرات تصميمٍ، مثل توجُّيهات الرُّقاقة، المسافات الفاصلة بين الدُّعامات، وارتفاعات شبكة الدعامات، إلخ. يَصف الشكلان 7–8 و7–9 اعتمادَ دالة الاستحقاق على متغير تصميمٍ واحد في كلّ مرّة، بدلاً من دالة لعدّة متغيرات لا يمكن تصويرُه في أبعادٍ ثلاثة، وبالتالي من الصعوبة بمكان إمكانيّةُ إظهارِه. تكون بعض متغيرات التصميم مُوجِّهاتٍ قويّةً للتصميم، كما في الشكل 7–8، بينما يكون بعضُها الآخر مُوجِّهاتٍ ضعيفةً للتصميم، كما في الشكل 7–9. وهكذا، لا بدّ من اعتبار مفهوم إقران مُوجِّهات التصميم القويّة بقيمٍ حرجة للمُشتقّات في الاتّجاهات المختلفة في فضاء التصاميم. تكمن إحدى أهمّ مسائل التصميم في تحديد أيٍّ من المتغيرات تكون

مُوجِّهات قويّة للتصميم، وأيٍّ متغيرات تكون مُوجِّهات ضعيفة للتصميم، وأيٍّ من المتغيرات لا تؤثِّر في التصميم الخاصّ المُعتبَر. يعني ذلك، ما هي القيم الحرجة للمشتقّات من أجل التصميم؟

أحد العناصر المفتاحيّة في تصميم البنى المُركَّبة متعددة الطبقات هو المقدرة على تفصيل الصفيحة الطبقية من أجل مُلاءمة التشغيل المزمع. يتألّف التفصيل من المراحل التالية. نرغب بتصميم مكوِّنات الصفيحة الطبقيّة، وتضمّ هذه المكوِّناتُ لبناتِ البناء البنيوي من الرُّقاقات المنفردة، علاوةً على كيفيّة توجُّهها ضمن الصفيحة الطبقيّة. نقوم بتصميم هذه المكوِّنات لكي نحقّقَ بالكاد (مع عامِل أمان مناسِب) المتطلّباتِ الخاصّةَ بالمتانة والجساءة، مثلاً، بالرغم من إمكانيّة وجودِ عوامِل تصميمٍ أخرى عديدة. من أجل ذلك، ينبغي على الأقلّ أن نقوم بتقييم عناصر المتانة والجساءة. يكمن أحد العناصرِ هنا في مقدار الحمولة القصوى، وهذه مسألةٌ سبق وعالجناها من أجل بنية معدنيّة، بتفصيل حجمَ البنية لكي تأخذ قيمةً مُعيَّنةً من الحمولة. نستطيع الآن أن نُدخل مع الصفيحة الطبقيّة خاصية مميزة مختلفةً جداً، ألا وهي الاتّجاه الذي تأتي منه الحمولة.

في الواقِع، كان بالإمكان أن نتحيَّز في تفصيلنا لبنية معدنيّة، بحيث تغدو قادرةً على تحمُّل حمولاتٍ أعلى في اتّجاه ما منه في اتّجاه آخر، وذلك باستعمال الدعامات. ولكن من أجل العنصر البنيوي الموافِق للصفيحة البنيوي المعدنيّة أحاديّة الجسم المُستعمَلة في جناح الطائرة مثلاً، فإن المقدرة على أخذ الحمولة هي نفسُها في جميع الاتّجاهات من قشرة ذاك الجناح. يمكن التحيز لمقدرات حملِ الحمولة للجناح المعدنيّ من خلال وضع دعامات في اتّجاهاتٍ متنوّعة. بعد ذلك، يكون الجناح قادراً على متانة عزم انحناء M_x وفق محور الجناح في الشكل 7−10 مختلفٍ عن عزم الفتل M_y حول محور الجناح. نقوم بهذه التغييرات في المقدرة عبر استعمال دعاماتٍ متباينةٍ في اتّجاهاتٍ مختلفة من البنية المعدنيّة.



الشكل 7–10: حمولات جناح الطائرة

بخلاف ذلك، لدينا في حالة البنى المُركَّبة طريقتان لبلوغ مقدراتٍ متباينةٍ على حمل الحمولة في اتّجاهاتٍ مختلفةٍ. تقع إحدى الطريقتَين على مستوى الصفيحة الطبقيّة، حيث يمكن الإخلالُ اتّجاهيّاً بمقدراتِ الصفيحة الطبقيّة بدون تغيير سماكتِها، وذلك ببساطة عبر تغيير دالة التنضيد للصفيحة الطبقيّة. لا يوجد في بنيةٍ معدنيّة مماثِلٌ لتغيير دالة التنضيد ضمن صفيحة طبقية مُركَّبة. أمّا الطريقةُ الثانية لبلوغ مقدراتٍ متباينةٍ لحمل الحمولة في الاتّجاهات المختلفة لبنيةٍ مركبة فتنصّ على أننا قادرون طبعاً على استعمال الدعامات، تماماً كما نفعل في حالة البنى المعدنيّة. مع ذلك، نستطيع في حالة بنى المُركَّبة الذهابَ خطوةً إضافيّةً أبعدَ ممّا هو ممكنٌ في حالة البنية المعدنيّة، من حيث إنه لدينا في حالة البنى المُركَّبة عددٌ أكبرُ بكثيرٍ من الدعامات الفعّالة. إذا كانت الدعامات (الموادّ المتانة للانفعال) مصنوعةً من موادّ مُركَّبة، فإننا نستطيع صنعَها من أنواعٍ مختلفةٍ من الموادّ المُركَّبة في مناطق مختلفة من الدعامات. نستطيع أن نستفيدَ من أفضل أداءٍ ممكنٍ لِليفٍ ذي معامِلٍ عالٍ جداً، وذلك بوضعِه على شفّة مقطع–I، وجعل النسيجِ الشبكيّ يتكوّن من مادّةٍ أقلّ مقدرةً، وذلك لأن هذا النسيج لا يُمثِّل المكانَ الذي تحدث فيه أكبرُ الأفعال البنيوية. إذا استطعنا نقلَ حمولة القصّ إلى ذاك النسيج، لَكُنّا قد قمنا بالتشغيل الواجِب فعلُه. يمكن غالباً نقلُ حمولة القصّ في نسيجِ إيبوكسي– زجاج، بينما يمكن أن تكون الشفّة من إيبوكسي– غرافيت أو بورونون– إيبوكسي. وهكذا، نستطيع تفصيل

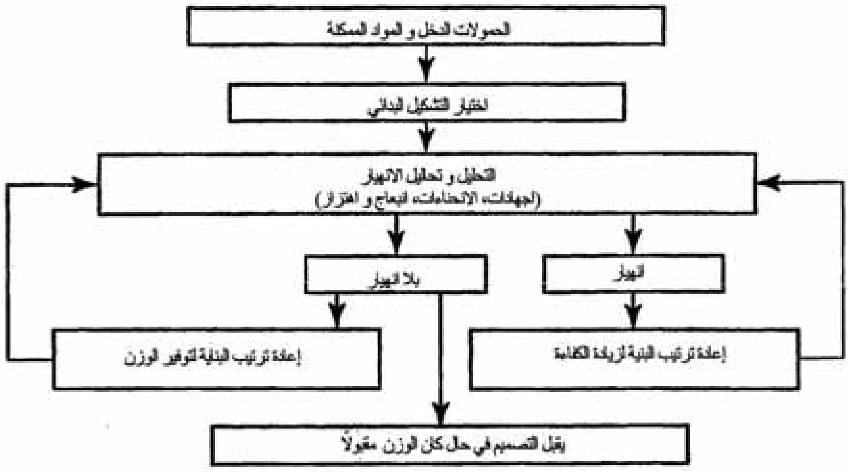
أقسامٍ من العناصِر البنيوية أو من مجمل الصفيحة الطبقيّة، من أجل أخذِ حمولاتٍ مختلفةٍ من ناحية الاتّجاه ضمن بنية بنيوية مُركَّبة.

4.2.7 خطوات في سيرورة التصميم البنيوي

نبدأ في التصميم البنيوي بمجموعة متطلّباتٍ التصميم من أجل تعريف أهدافِنا. إن متطلّبات التصميم هي ببساطةٍ إعلانٌ عمّا نرغب أن تفعلَه البنية. سوف نوسِّع هذا التعريفَ المُفرِط في البساطة خلال هذا الكتاب، وخاصّة في الفقرتيين 5.2.7 و6.7. واضعين هذا الهدفَ نصبَ أعيننا، سوف نقوم الآن بتفحّص الخطوات الواجِب اتّباعُها لتحقيق الهدف.

توصَف سيرورة التصميم البنيوي بواسطة المخطط الترسيمي (flow chart) في الشكل 7−11. يعني ذلك أن المخطط الترسيمي ليس مخطط برنامجٍ حاسوبيّ مُعرَّفٍ بدقّة، ولكنه بدلاً من ذلك مخطط أفكارٍ، ومفاهيم، وإجرائيّات. نبتدئ افتراضاً من معرفة الحمولات الواجِب حملُها والموادّ الممكن اعتبارُها من أجل تصميمنا. نختار بعدها عبر سيرورة ما تشكيلاً ابتدائيّاً لبنيتنا البنيوية. يمكن أن يكون هذا التشكيل خاماً وغيرَ مُتقَنٍ البتّة، لكنه يُشكِّل نقطةَ بدايةٍ سيرورة التصميم التكراريّة بالضرورة. يمكن أن نتعرّض عند هذه النقطة إلى مشكلة كبيرة، لأنه إذا كانت بنيتنا طائرةً، فنحن لا نعرف بالدقّة الحمولاتِ الديناميكيّةَ الهوائيّةَ ما لم نعرف التشكيل البنيوي الفعليّ.

وهكذا، هناك، أحياناً، كثيرٌ من التفاعل المُتبادَل بين انتقاء التشكيل الابتدائي وتحديد الحمولات المُستعملة في التصميم. وفقاً لذلك، لا تتمتّع سيرورة التصميم غالباً بالبساطة المعروضة هنا. مع ذلك، متى ما امتلكنا التشكيلَ الأوليّ، وبعض المعرفة عن الحمولات، وفكرةً ما عن الموادّ التي يمكننا الرغبة في استعمالها، فإننا نستطيع عندها البدءَ بسيرورة التصميم البنيوي الفعليّ.



الشكل 7–11: إجرائية التصميم البنيوي

1.4.2.7 التحليل البنيوي

نذهب الآن إلى كتلة التحليل وتحليل الإخفاق في الشكل 7–11. يعني ذلك أننا نعتبر التشكيلَ الابتدائيَّ مع مادّةٍ أو موادّ مُحدَّدَة. نقوم بعد ذلك، من أجل الحمولات المُحدَّدة مُسبقاً– بإجراء مجموعةٍ من التحاليل البنيوية للحصول على معلمات (بارامترات) الاستجابة البنيوية المتنوّعة، مثل الإجهادات، والانزياحات، وحمولات الانبعاج، والترددات الطبيعيّة، إلخ. إن هذه التحاليل جميعَها سيرورات حتميّة. يعني ذلك أننا قادرون، ضمن حدود الدقّة لتقانيات التحليل المتوفّرة، على التوقع بمجموعةٍ مُحدَّدةٍ من الاستجابات من أجل تشكيلٍ بنيوي خاصّ. يجب أن نعرفَ كيف يسلك تشكيلٌ بنيوي خاصّ بحيث نستطيع مقارنةَ السلوك الحقيقي بالسلوك المنشود، أي بمتطلّبات التصميم.

2.4.2.7 عناصرِ التحليل في التصميم

لنفحص الآن عناصرَ التحليل التي تحدث في إجمالي سيرورة التصميم الإجماليّ. يهدف التحليلُ إلى تحديد معلمات الاستجابة البنيوية الهامة في الشكل 7–12. علينا بعد ذلك أن نُقيِّم أنماطَ الإخفاق المتنوِّعة، وسوف توصّف أنماطُ الإخفاق من خلال ربطِها

بمميزات الاستجابة البنيوية. فالجساءة، على سبيل المثال، تتعلق بالمُتطلَّب االشائع الذي ينصّ على أننا لا نستطيع السماحَ بانحراف كبيرٍ جداً في أجزاء حرجةٍ متنوِّعةٍ من البنية. يحصل الانبعاج إذا كانت الحمولة عاليةً جداً بحيث لا تستطيع هذه البنية تَحمُل المستوى المنشود من الحمولة بدون أن تعانِيَ انحرافاتٍ إضافيّةً وتناقصاً في قيمة الجساءّة التي تُشكِّل سلوك الاستجابة البنيوية النمطيَّ لبنيةٍ خاضعة للانبعاج. ينبغي أن نكون قادرينَ على التوقع بأنماط الاهتزاز والترددات بحيث نعرف كيف نتجنّب الطنين أو، بدلاً من ذلك، ماذا ستكون الاستجابةُ الديناميكيّة. يجب أن نُقدِّرَ المتانة من خلال التوقع بالإجهاداتِ المتنوِّعة، كمرحلةٍ تحضيريّةٍ قبل مقارنتها بمعايير الإخفاق المناسِبة. تضمّ هذه الإجهاداتُ إجهاداتِ الغشاء، وإجهاداتِ الانحناء، والإجهاداتِ بين الطبقات، والإجهاداتِ حول الثقوب والشقوق والفراغات، والإجهاداتِ حول العيوب، إلخ. علاوةً على ذلك، ينبغي أن نكون قادرين على تحليل الوصلات لنتأكّد بأنه يمكن نقلُ حمولاتٍ بين عناصِرَ بنيوية.

- تحديد معلمات الاستجابة الإنشائية ذات الصلة
  - الانحناءات
  - حمــولات الانبعاج
  - ترددات الاهتزاز
  - الإجهـــادات
    - إجهادات الحقل الكامل
    - الإجهادات حول الإنقطاعات
    - الإجهادات حول العيــوب

الشكل 7–12: عناصر التحليل في التصميم

3.4.2.7 تحليل الإخفاق

نقوم بعد ذلك بإجراء تحليلٍ للإخفاق نقارن فيه معلمات (بارامبترات) الاستجابة البنيوية المتنوِّعة التي حصلنا عليها للتوّ بقيمِها المرغوبة أو المسموح به، كما في الشكل 7–13، من أجل الإقرارِ فيما إذا كان التصميمُ الحالي مُرضياً. إذا كانت جميعُ معلمات

الاستجابة واقعةً في مجالاتٍ مسموحة، فإننا نُقِرّ بهذه الحقيقة على الطرف اليساري من الشكل 7-11 عبر الخروج من صندوق تحليل الإخفاق إلى الصندوق الموسوم بـــ "دون انهيار". إذا لم ينتهك التصميمُ الحاضِرُ أيّاً من متطلّبات التصميم، فإن هذه الحقيقةَ تعني غياب الإخفاق. مع ذلك، لا يعني عدمُ وجودِ إخفاق أنّ لدينا أفضلَ بنية أو حتى بنية بنيوية مقبولة. إذا كان الوزنُ – مثلاً– هو العامِلُ الموجه في التصميم البنيوي، فإن البنية يجب أن يكون لها وزنٌ أصغريّ. بعد ذلك، إذا لم يكن هناك إخفاق، فإننا نستنتج أن البنية قد صُمِّمت بطريقةٍ تفوق ما هو مطلوبٍ إلى حدٍّ ما. سوف تشتمِل تحليلاتُنا بالتأكيد على جميعِ عوامِل الأمان المناسِبة في تحاليل الإخفاق. ينبغي تطبيقُ عوامِل الأمان إزاءَ إجهادٍ مفرِط، وإزاء انحراف كبيرٍ جداً، وإزاء وضعِ الاقتراب من حمولة الانبعاج، وإزاء وضعِ الاقتراب من تردّدٍ طبيعيّ من أجل تجنُّب الرنين، إلخ.

- هل معاملات الاستجابة الإنشائية ضمن حدود التصميم ؟
  - انحناءات عالية جداً ؟
  - حمولات الانبعاج قريبة جداً ؟
  - ترددات الاهتزاز قرب الطنين؟
  - الإجهادات عالية جداً ؟ أقل من المقاومة ؟
    - إجهـــادات كامل الحقل
    - الإجهاد حول الإنقطاعات
    - الإجهاد حول العيــوب

الشكل 7-13: تحليل الإخفاق في التصميم

يمكن لعوامِل الأمان هذه الموافِقةِ لأنماطَ متنوّعةٍ من الإخفاق أن تكون مختلفةً فيما بينها اعتماداً على كوننا نقوم بالتصميم إزاء حادثةِ إخفاق كارثيّ أو إزاء حادثة إخفاق حميدة. من الواضح أن عوامِل الأمان إزاء حوادث الإخفاق الكارثيّة يجب أن تكون أعلى بكثيرٍ من تلك الموافقة لحوادث إخفاق حميدة. على سبيل المثال، ينبغي على عامِل الأمان إزاء انبعاجِ عمودٍ أن يكون أعلى من عامِل الأمان إزاء انبعاجِ صفيحةٍ. يعود السبب في هذه العلاقة إلى الخاصية البنيوية المميزة للاستجابة الفيزيائيّة التي تقول بأن العمودَ لا يمكن أن يحمل أيَّ حمولةٍ أعلى من حمولة الانبعاج (انظر الفقرة 4.5).

بخلاف ذلك، يمكن للصفيحة أن تحملَ حمولةً إضافيّةً كبيرةً بعد الانبعاج، ولكنها تفعل ذلك مع جساءةٍ منخفضة. وهكذا، يكون انبعاجُ العمود حادثةً أكثر تقييداً وعنفاً من انبعاج الصفيحة. تنعكس طبيعةُ هذا الإخفاق وفقاً لذلك في قيمة عامِل الأمان، أي مقدار المسافة التي ينبغي أن تفصلنا عن حادثة الإخفاق. تكون أيضاً عوامِلُ الأمان من أجل بنية مأهولة أعلى من تلك المتعلّقة ببنية غير مأهولة.

عمليّاً، تكون عوامِل الأمان، ولأسباب متنوّعة، مختلفةً في بنى المُركَّبة عنها في البنى المعدنيّة. إن عامل الأمان هو عددٌ قيمتُه مُشرَّعةٌ قانونيّاً، تمّ التوصُّل إليها "في لجنةٍ" عبر تقدير النتائج المتنوِّعة لصنفٍ خاصّ من الإخفاق في نوعٍ مُعيَّن من بنى. يمكن لمثل هذه اللجنة أن تضمّ ممثِّلين من جمعياتٍ هندسيّة، وجمعيّات صناعيّة، وحكوماتٍ، وجامعاتٍ. يمكن أن ينتج عامِلُ أمانٍ في حالة قدرةِ تحمُّل برغي ضمن وصلةٍ ذات برغي في بنية مركبة مختلفٌ عنه في حالة وصلةٍ معدنيّة ذات برغي، ويعود ذلك إلى أسباب عديدة كما يلي. تكون القدرةُ على التحمُّل في وصلةٍ ذات برغي مصنوعةٍ من مادّة مُركَّبةٍ أقل عموماً منها في المعادِن. علاوةً على ذلك، يوجد عند الثقب عامِلُ تركيزٍ إجهادات أعلى في المادّة المُركَّبة منه في المعدن. إذا كان المعدن هو الألمنيوم ، فإنه توجد بعضُ مقدرات الخضوع حول منطقة تركيز الإجهادات ذلك الأمر الذي لا يمكن وجودُه في مادّة مُركَّبة أكثر قصافةً (brittle) (أي غير قابلة للخضوع). وهكذا يكون عامِل الأمان لمُثبِّتٍ في وصلةٍ معدنيّة مختلفاً جداً عنه في وصلةِ مادّةٍ مُركَّبة بسبب العوامِل العديدة التي تؤثِّر في مستوى الإجهاد إزاء الإخفاق الكامِن. توجد أمثلةٌ أخرى من طبيعةٍ مشابهة بسبب خصائص السلوك المميزة الفريدة للموادّ المُركَّبة مقارنةً بالمعادِن. ينبغي علينا أن نُقيّم إخفاق الموادّ المُركَّبة بطريقةٍ مختلفة عمّا نفعله من أجل المعادِن، وبالتالي من المناسِب اعتمادُ عوامِل أمان مختلفة.

أخيراً، إن **تحليلَ الإخفاق** هو إجرائية مقارنةِ الأداء الفعليّ بالأداء المنشود. وهكذا، يكون تحليلُ الإخفاق جزءاً غيرَ عديم الأهمية من أجزاء سيرورة التصميم البنيوي. يتم تناول أوجه تحليل الإخفاق، بما فيها ما يعنيه الإخفاق بالنسبة إلى بنية ما، في الفقرة 6.7 حول متطلّبات ومعايير إخفاق التصميم.

4.4.2.7 إعادةُ التشكيلِ البنيوي

ببساطة، تعني إعادةُ التشكيل لبنيةٍ ما أن نُغيِّرَ بعضاً من متغيرات التصميم أو جميعَها، مثل السماكات، واتّجاهات الألياف، وحجوم الدعامات، إلخ، من أجل بلوغ بنيةٍ أكثرَ مُلاءمةً من التشكيل الحالي. لاحظ أن للمصطلَح "أكثر ملاءمة" معنيين اثنين ممكنان. إذا كانت مقدرةُ البنية منخفضةً جداً بالنسبة إلى الحمولات وشروط تطبيقها عليها، فإن هذه البنية قد تمّ تصميمُها بشكلٍ تحت المطلوب، ويجب إعادةُ تشكيل البنية من أجل زيادة مقدرتها. مع ذلك، إذا كانت مقدرةُ البنية كبيرةً جداً، فإن تصميمَها يكون فوق المطلوب، وينبغي إعادة تشكيلها بهدف إنقاص مقدرتِها. سيتم مناقشة كلا البديلَين. اعترف أن إعادة التشكيل البنية تقع في قلب التصميم البنيوي.

لنفترض أننا نقوم بتقييم الإخفاق من أجل تشكيلٍ بنيوي وأننا وجدنا نوعاً ما من الإخفاق ، كأن يكون مثلاً انتهاكاً لواحِد أو أكثر من متطلّبات التصميم. وبالتالي، يكون تصميمُ البنية تحت المطلوب، وينبغي زيادة مقدرتِها. وفقاً لذلك، علينا أن نتحرّك نحو الصندوق التالي الموسوم بـــ "أعِدْ تشكيلَ البنية من أجل زيادة المقدرة". تُستعمَل كلمةُ المقدرة (capability) هنا بمعناها الواسِع جداً. يمكن لزيادة المقدرة أن تعني حقيقةً زيادةَ الجساءة بهدف تغيير شروط الانحراف. يعني ذلك أن زيادةَ المقدرة قد تعني إنقاصَ الانحرافات إذا كانت هذه الأخيرةُ شرط التصميم المُنتهَك. يمكن أن تعني زيادةُ المقدرة أيضاً زيادةَ حمولات الانبعاج أو زيادةَ ترددات الاهتزاز. يعني ذلك أنه ينبغي علينا نوعاً ما أن نُعيد تشكيل البنية من أجل زيادة المقدرات البنيوية. قد نرغب فعلاً تحت بعض الظروف إنقاص الجساءة من أجل تجنُّب تواترٍ مُحرِّض يقود البنية إلى وضع الطنين.

إذا لم يخفق التصميمُ الحالي في سيرورة التصميم التكراريّ الوارد في الشكل 7−11، فعندها يكون تصميمُ البنية فوق المطلوب. وفقاً لذلك، يجب علينا تغيير البنية − أي إعادة تشكيلها − بحيث تحمل الحمولةَ نفسها ولكن بوزنٍ أقلّ. علينا أن نُعيد تقييم أداء البنية من أجل هذا الوزن المنخفض. وبالتالي، علينا أن نجري سيرورة ما لإعادة تشكيل البنية من أجل التوفير في الوزن. بعد إتمام إعادة التشكيل، نعود إلى أعلى مخطط الشكل 7−11 نحو الصندوق الموافِق للتحليل وتحليل الإخفاق، وذلك لأنه لدينا الآن تشكيلٌ جديدٌ ينبغي تقييمُه. علينا القيام بالسيرورة برمّتها مرّة أخرى بهدف تحديد معلمات الاستجابة البنيوية ومقارنتها بقيمها المسموحة.

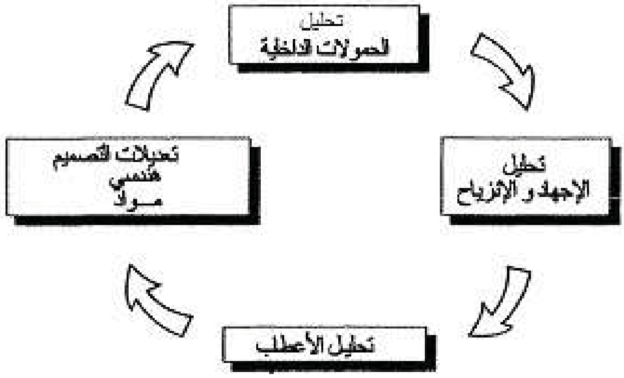
علينا مع البنية التي أعيد تشكيلُها حديثاً أن نعود إلى كتلة ""التحليل وتحليل الإخفاق في الشكل 7−11، وأن نُقيِّمَ التشكيلَ الجديد. نستمرّ في الدوران حول المُخطَّط (الكلام هنا على سبيل المجاز) بين حوادث الإخفاق وغيابه حتى يتمَّ تشذيبُ التصميم إلى الدرجة التي يمتلك فيها أقلَّ وزنٍ ويحقِّق جميعَ متطلّباتِ التصميم الوظيفيّة، أي لا ينهار بأيٍّ من الطرائق الممكنة. تُمثِّل هذه الشروط في الحالة العامّة ما نعنيه بعدم انتهاك التصميم لأيّ من متطلّبات التصميم. بعد ذلك، نقبل هذا التصميمَ إذا كان وزنُه مقبولاً. من الممكن أن نكون قد قرّرنا، من تحليلات أخرى، أن وزن الطائرة قيد التصميم يجب ألاّ يتجاوز مقداراً معيّناً، وإلاّ، بسبب متطلّبات الدفع المتنوّعة، فلن نستطيعَ جعلَ الطائرة تطيرُ بالسرعة المطلوبة، أو أن يكون لها المدى المطلوب، وهلمّ جرّا (هذه القضايا هي أيضاً متطلَّباتُ تصميمٍ). بعد تحقيق جميع متطلّبات التصميم وجعل الوزن أصغرَ ما يمكن، يتمّ الإعلان عن قبول التصميم. يمكن إنجازُ النوع نفسِه من عملية التصميم الإجماليّ عبر معلمة (parameter) ناظِمة غير الوزن. يمكن لمعلمة التصميم الأخرى هذه أن تكون التكلفةَ، أو أن تكون أهدافاً متنوِّعةً متعلِّقةً بالأداء، أو توليفةً ما من هذه المعلمات.

قمنا بدراسةِ صورةٍ واحدةٍ للتصميم البنيوي، وسوف نُركِّز اهتمامَنا لاحقاً في الفقرة 4.7 على كيفيّة إعادة تشكيل بنية مُركَّبة مقارنة ببنية معدنيّة. سوف تُمثِّل سيرورة إعادةِ التشكيل هذه موضوعَ اهتمامنا الأكبر. نتناول في هذه الفقرة ببساطة سيرورة التصميم البنيوي بقطع النظر عن الموادّ المُستعمَلة.

5.4.2.7 الطبيعة التكراريّة للتصميم البنيوي

يتم توضيح الطبيعةَ التكراريّةَ مميزة لسيرورة التصميم البنيوي − مع محتوى تحليل التصميم الواضِح، في الشكل 7−14، الذي يُبسِّط الشكلَ 7−11 الأكثر شموليّةً. لدينا في تكرارات التحليل−التصميم المُبسَّطة ثلاثة أنواعٍ من التحاليل: الحمولات، الإجهاد والانزياح، والإخفاق. عندما لا يُحقِّق تشكيلٌ خاصّ متطلّباتِ التصميم المفروضةَ في تحليل الإخفاق، فإنه يجب تغييرُ التصميم. تتألّف هذه التغييراتُ عموماً من إمّا (1) معلمات هندسيّة مثل السماكات والفراغات بين الدّعامات، أو (2) خصائص المواد مثل استبدال مادّةٍ بأخرى، أو (3) معلمات هندسيّة وخصائص المواد معاً. تتُكرَّر هذه

التغييرات والتحاليل ضمن سيرورة التصميم بصورةٍ تكراريّة حتى يتمّ تحقيقُ جميع متطلّبات التصميم.



الشكل 7-14: عمليات تكرار تحليل التصميم مبسطة

5.2.7 أهداف التصميم ومُوجِّهات التصميم

هدف التصميم هو إعلانٌ عمّا نريد أن تفعل و/أو تكون البنية. يُعبَّر عن أهداف التصميم الرئيسيّة الثلاثة بدلالة الوظيفة، والتكلفة، والوزن. الوظيفة هي مجموعة متطلّبات الأداء أو متطلّبات التصميم التي ينبغي على البنية أن تُحقِّقها أو أن تكون قادرةً على ذلك. التكلفةُ هي تكلفةُ دورةِ حياة البنية، أي سعرُ الشراء الابتدائي مُضافةً إليه تكاليفُ التشغيل والصيانة خلال مجمل حياة البنية يُطرح منه أيُّ قيمةِ خردةٍ عند نهاية حياة البنية، كمّا عرّفناها في الفقرة 2.3.1. أمّا الوزن فهو وضوحاً الوزنُ البنيوي، وقد يكون أو لا يكون مهمّاً. من الواضِح أنه من أجل الطائرة يكون الوزنُ المنخفض حاسماً. كذلك يتمتّع الوزن المنخفِض بأهمّية فائقة في المركبات الفضائيّة. أما من أجل الأبنية، فلا يمثِّل الوزنُ عادةً عامِلاً مهمّاً. لاحظ أن الوظيفةَ غالباً ما تكون لها عدّةُ أهدافٍ، بينما يكون كلٌّ من الوزنِ والتكلفةِ وحيدي الهدف.

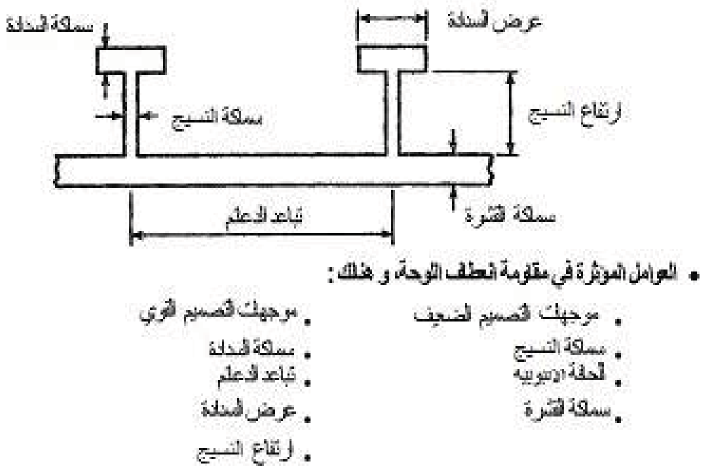
يمكن أمثَلةُ، أي تصميمُ، البنية وفقاً لأيّ هدف، أو هدفين، أو جميع أهداف التصميم الثلاثة. يعني ذلك أن أهدافَ التصميم يمكن أن تنصّ على امتلاكِ الوزنِ الأقلّ للطائرة من أجل مجموعةٍ مُحَدَّدة من الوظائف التي ينبغي إنجازُها. أو أن تكون السرعةُ الأعلى للطائرة الهدفَ الأكثرَ أهمّيّةً، مع السماح للتكلفة بالارتفاع من أجل تحقيق السرعة المنشودة. ومن الممكن أن يتمَّ تصغيرُ التكلفةِ مع بعض الحلول الوسط المُتَّخَذة من أجل الأداء، أو الوزن. في جميع الأحوال، ينبغي قياسُ أيِّ تصميمٍ إزاءَ أهداف التصميم البنيوي التي يُعبَّر عنها بدلالة الوظيفة، والتكلفة، والوزن.

مُوجِّه التصميم هو متغير تصميم يؤثِّر، عند تغيُّر قيمته، بشكلٍ كبيرٍ في أداء التصميم، كما في الشكل 7–8. يمكن لموجِّه التصميم أن يكون كذلك شرطَ تصميمٍ يؤثِّر بشدّة في تحديد أيٍّ من متغيرات التصميم هو الناظِم. يكمن أحدُ الأهداف المبكرة لسيرورة التصميم في تحديد هويّة موجِّهات التصميم، والتركيز على التعامل معها مقابل تغيير المتغيرات التي لا تؤثِّر بقوّة في التصميم. وهكذا، سوف نتّخذ عدة قرارات فيما يخصّ الطائرة اعتماداً على كيف نستطيع تحقيقَ كلِّ قسمٍ من التشغيل البنيوي بأقلّ مقدارٍ من الوزن، بسبب تأثيره القويّ في المدى، وفي فعاليّة الوقود الاقتصاديّة، وفي الأداء. وبشكلٍ مماثِل، يصلح هدفُ الوزن الأصغريّ للمركبات الفضائيّة، بسبب مُوجِّه التصميم الموافِق لتكلفةِ إطلاق المركبةِ نحو الفضاء. بناءً على ذلك، ليس مفاجئاً أن نستخدِمَ موادّ ذات جساءة عالية ووزنٍ منخفضٍ، مثل الموادّ المُركّبة، من أجل تحقيق هدف التصميم الموافِق للوزن الأصغريّ. تعتبر السيّاراتِ بدورها حسّاسةً بالنسبة إلى الوزن عموماً، ولكن بعض أقسامِها تكون حسّاسةً بشكلٍ خاصّ للمتانة والجساءة. تكون مجموعة الجمالون(*) حسّاسةً للجساءة بسبب ميل أعضائها إلى الانبعاج تحت الضغط.

يمكن تطويرُ مثالٍ خاصّ عن مُوجِّهات التصميم القويّة والضعيفة عبر فحص متانة انحناء اللَّوحة المُدعَّمة في الشكل 7–15. وهنا، يملك ارتفاعُ النسيج المُدعِّم تأثيراً قويّاً في متانة انحناء اللّوحة، بسبب التأثُّر الكبير بالارتفاع لعزم عطالة الدّعامة، الذي بدوره يؤثِّر كثيراً في متانة الانحناء (راجع مناقشة العزم الثاني لمنطقة الدّعامة في الفقرة

(*) دعامات بناء على صورة مثلّث لتدعيم سقف أو جسر (المترجم).

2.4.7). مع ذلك، لا تمثِّل سماكةُ نسيجِ الدّعامةِ مُوَجِّه تصميمٍ قويّ، لأن تأثيرَ سماكة النسيج في متانة الانحناء صغيرٌ. نستنتج من خلال محاكمةٍ منطقيّةٍ مماثلةٍ أن سماكةَ الشفة، وعرضَها، والمسافةَ الفاصلةَ بين الدّعامات المُقوِّيّة تُشكِّل مُوجِّهاتِ تصميمٍ قويّةً في الشكل 7–15، أمّا سماكة القوقعة فهي مُوجِّهُ تصميمٍ ضعيف. علينا أن نكون واعين لطبيعة مُوجِّهات التصميم في كلّ مرحلةٍ من مراحل تحليل التصميم الثلاث.



الشكل 7–15: تشريح اللوحة المقواة

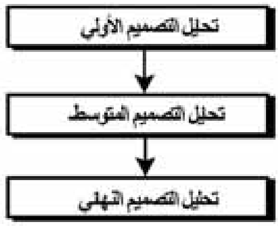
6.2.7 مراحِل تحليل التصميم

يُستخدَم مصطلح تحليل التصميم للتأكيد على دور التحليل الأساسيّ – لكن غير المُهيمِنَ– ضمن سيرورة التصميم البنيوية الشاملة. لا يلعب التحليلُ أيَّ دورٍ البتّة في تصميم الألبسة (مع الاستثناء الممكن للتحليل التقليديّ الآن لثوبٍ نسائيّ رسميّ بدون زنّار). مع ذلك، ينبغي على التصميم الهندسي للبنية البنيوية أن يتضمَّن تحليلاً على شكل علاقاتٍ مُحدَّدةٍ ميكانيكيّاً. يجب استعمالُ هذه العلاقات المُحدَّدة ميكانيكيّاً من أجل التحديد الكمّيّ لكيفيّة إيجاد المقدرات البنيوية، ثمّ مواءمتِها مع المتطلّبات البنيوية. من الممكن ألاّ

يكونَ التمييزُ بين التصميم وتحليل التصميم مهمّاً بدرجةٍ كبيرةٍ في حالة البنى المعدنيّة، كما هو الحال في البنى المصنوعة من موادّ مُركَّبة.

يستطيع مُصمِّمو البنى المعدنيّة الاعتمادَ بشكلٍ كبير على الخبرة. وفي غالب الأحيان لم يتمّ تأهيل هؤلاء المُصمِّمين كمهندسين، بل تمّ تدريبُهم "على طاولات (الرسم)". مع ذلك، لا يملك مُصمّمو بنى المُركَّبة مثل هذه القواعِد البسيطة والمُريحة القائمة على الخبرة والتجربة، لأن تشكيلَ وسلوك بنى المُركَّبة أعقدُ بكثير منهما في بنى المعدنيّة. وتتطلّب هذه التعقيداتُ في السلوك والخياراتُ التشكيليّة أن يستعمل المُصمِّم علاقاتٍ مُحدَّدةً ميكانيكيّاً لتوفير الأساس المنطقيّ لتحديد أبعاد الأقسام المتعددة في البنية. ينبغي على مصطلح التصميم أن يُذكِّرَك بصورة المهندس الذي يُطبِّق العلاقاتِ الميكانيكيّةَ ببراعة من أجل تصميم بنية بنيوية. مع ذلك، يُعطي المفهومُ الاعتياديّ بشكلٍ أكبرَ حالةَ تخيُّلِ مُصمِّمٍ ، ليس بالضرورة مهندساً، لا يستخدم إلاّ مجموعةً من القواعِد القائمة على الخبرة من أجل خلق التصميم. وفقاً لذلك، تمّ التركيزُ في هذا الكتاب على الدور الأساسيّ للتحليل في سيرورة التصميم البنيوي عبر استعمال مصطلح "تحليل التصميم".

إن مراحل تحليل التصميم التي نتناولُها هنا هي يقيناً منطقيّةٌ ومألوفةٌ على حدّ سواء: تحليل التصميم الأوّليّ، تحليل التصميم المتوسِّط، وتحليل التصميم النهائيّ، كما يوضِّح الشكل 7–16. سيتم الآن تعريف الاختلافاتِ بين هذه المراحِل الثلاث، وهي تُفسِّر نفسَها بنفسها، ولكننا مع ذلك سوف نتفحّص معانيَها الخاصّة.



الشكل 7–16: مراحل تحليل التصميم

1.6.2.7 تحليل التصميم الأوّليّ

نقوم في مرحلة تحليل التصميم الأوّليّ لبنية بنيوية ما بمحاولةٍ ابتدائيّة، أي نأخذ نوعاً من المقطع أو التقريب الأوّليّ نحو تحقيق تشكيلٍ بنيوي يساعدنا في تعريف الوزن. نأخذ أيضاً مقطعاً أوّليّاً نحو تحقيق متطلّبات النظام المتنوّعة التي ترتبط بـــالوظيفة، كما يقترح الشكل 7–17. نعتبر أيضاً في هذه المرحلة نوعاً من المقطع الأولي نحو تحديد جدوى التصنيع، ممّا له أثرٌ كبيرٌ في التكلفة المُحتمَلة للبنية البنيوية. بما أننا نتعامل في هذه المرحلة مع بنيةٍ بسيطةٍ نسبيّاً، لا بدّ أن يكون لدينا برنامج حاسوبيّ سهلُ الاستعمال من أجل التحليل. وفي بعض بنى ،كما في حالة نموذج العارضة، قد تكفينا معالجةٌ وحيدة البعد للتشكيل البنيوي.

• المقطع الأولي في ترتيب عملية البناء (وزن)
• تعريف تصميم ناقل الحركة
• احتمال استخدام بعد واحد في التحليل
• المقطع الأولي في متطلبات النظام (وظيفة)
• المقطع الأولي في التصنيع (التكلفة)
• استخدام برنامج حاسوبي بسيط

الشكل 7–17: تحليل التصميم الأولي

2.6.2.7 تحليل التصميم المتوسّط

تُدعى مرحلةُ تحليل التصميم المتوسّط أحياناً بالدراسات التجاريّة. تعتمد المُصطلَحاتُ المُستعمَلة فعلاً على مجال الصناعة أو الشركة الذي تعمل فيها. من الناحيّة البنيوية، إننا نعالِج تحليلَ المفاهيم المتنوِّعةِ للتصميم التي نأخذها بعين الاعتبار من أجل استخدامِها في البنية بطريقةٍ أكثر دقّةً وتعقيداً ممّا فعلناه في مرحلة تحليل التصميم الأوّليّ.

سوف نستخدم عموماً عند هذه المرحلة – وكما يُبيِّن الشكلُ 7–18 برنامجَ تحليلٍ حاسوبيّاً أكثر دقّةً ومقدرةً مقارنةً بمرحلة تحليل التصميم الأوّليّ. نقوم – خلال سيرورة استخدام هذا النوع من البرامِج وتقدير مفاهيم التصميم المتنوِّعة – بتحديد أثر جميع تلك المفاهيم المتنافسة في الأهداف الثلاثة البنيوية (الوزن، التكلفة، الوظيفة) لتصميمنا. نتوقّع عند هذه المرحلة أن نقومَ بتصنيع واختبار بعض النماذج البسيطة للمكوّنات الحرجة في هذه البنية من أجل التأكُّد بأن حساباتِ التصميم واقعيّةٌ بدلاً من أن تكون مجرَّد تمرينَ ورقيٍ يمكن ألاّ تقود إلى بنية بنيوية فعّالة.

•	تحليل أكثر تطوراً لمفاهيم تصميم منافسة
	موجهات تمرين التصميم
	احتمال استعمال التحليل على بعدين
•	تقدير تأثير كل المفاهيم في الوزن والتكلفة والوظيفة
•	استعمال برامج حاسوبي متوسط المستوى
•	تصنيع و تجريب نماذج بسيطة للعناصر الحرجة

الشكل 7–18: تحليل التصميم المتوسط

3.6.2.7 تحليل التصميم النهائي

ينبغي علينا في المرحلة الأخيرة لــتحليل التصميم النهائيّ، المَدعُوّة أحياناً بالتصميم التفصيليّ دراسةُ جميع التفاصيل النهائيّة للشكل، وللوصلات، وربّما أيضاً للفراغات وللدّعامات، وخاصّةً للدّعامات المُقوِّية حول الفراغات، وهلمّ جرّا، ولجميع التفاعلات في النظام وذلك ضمن نموذجٍ عن البنية فائق التعقيد والدّقة، كما هو واردِ في الشكل 7–19. يُعَدّ النموذج الميكروي والمُعقَّد ضروريّاً لتضمين جميع هذه الأنواع من التفاصيل. نستخدم عادةً برنامجاً حاسوبيّاً فائقَ التعقيد والدقّة ومتنوّع الأغراض مثل برنامج ناستران (NASTRAN). علينا في مرحلة تحليل التصميم النهائيّ هذه أن نُقيّم أثرَ جميع تفاصيل المفاهيم البنيوية المتنافسة في وزن، وتكلفة، ووظيفةِ البنية التي نحاوِل تصميمَها. هناك في الحالة الطبيعيّة مفهومٌ بنيوي وحيدٌ تنبغي معالجتُه عند مرحلة تحليل

التصميم هذه، لأننا سنكون عندها قد أزلنا جميعَ المفاهيم الأخرى خلال المراحِل المبكرة لتحليل التصميم.

- دراسة التفاصيل النهائية للوصلات و الفراغات والدعائم و نظام التأثيرات المتبادلة في نموذج معقّد
- تحسين موجهات التصميم
- احتمال استعمال تحليل ثلاثي الأبعاد
- استعمال برنامج حاسوبي فائق التطور مثل (ناستران)
- تقييم تأثير كل التفاصيل في الوزن و الكلفة و الوظيفة
- تصنيع و اختبار جودة محاكاة العناصر الحرجة

الشكل 7-19: تحليل التصميم النهائي

عند هذه المرحلة، نقوم عادةً بتصنيعِ واختبارِ بعضِ سيرورات محاكاةٍ جيّدةٍ لمكوِّناتٍ حرجةٍ من البنية. لا تكون هذه الاختباراتُ بالضرورةِ ذاتَ مقياس صغير – بالرغم من إمكانيّةِ قيامِنا ببعض هذه الاختبارات – ولكننا على الأرجح سوف نذهب بعيداً قدر المستطاع نحو اختباراتٍ على مقياسٍ كاملٍ. متى نعتبرُ أنه قد تمّ تصميمُ البنية؟ يكون تصميمُ البنية قد تمّ عندما نستطيعُ إثباتَ تحقيقِهِ لجميع متطلّبات التصميم، وغالباً ما يستلزم هذا الإثباتُ اختباراً بنيوياً كامِلَ المقياس، وكذلك رحلاتُ طيران اختباريّة عديدة ومستهلِكة للوقت في حالة الطائرة.

7.2.7 خلاصة

وصفنا بإيجازٍ في هذه الفقرة سيرورة التصميم البنيوي، مع التركيز على التحليل، وعلى تحليل الإخفاق، وعلى إعادة التشكيل البنيوي. تمّ تعريفُ وإيضاحُ مراحِل تحليل التصميم البنيوي الثلاث: تحليل التصميم الأوّليّ، والمتوسّط، والنهائيّ. في كلٍّ من مراحِل تحليل التصميم، يكون اختبارُ مكوِّناتٍ ممثلة للبنية البنيوية أو مجموعةٍ جزئيّةٍ منها أساسيّاً من أجل التأكُّد بشكلٍ معقول أنه لم يحصل خطأ أو لم يتم التغاضي عن أمرٍ مهمٍّ أثناء سيرورة التصميم.

3.7 انتقاء الموادّ

1.3.7 مقدّمة

يتمثّل الهدف الأساسيّ في هذه الفقرة بوصف العوامِل والإجرائيّات المُتَّبعة لانتقاء المادّة الصحيحة من أجل تطبيقٍ بنيوي محدد. إن "الجمالون الصحيح" من أجل مادّةٍ – كما هو من أجل قائد طائرة حربيّة أو رائد فضاء – هو توليفةٌ مُعقَّدةٌ من الخصائص مميزة. يتطلّب انتقاء مادّة مناسبة القدرة على توصيف مميزات وتقييم الموادّ المُركَّبة (أو المعادِن!) المتنوِّعة، وعلى مقارنة خصائصِها مميزة الجذّابة بالسمات السلوكيّة المطلوبة من أجل بنيةٍ خاصّة. أخيراً، سيتم تناول مثالٍ عن انتقاء الموادّ من أجل مسألة تصميم مجموعة جمالون فضائيّ.

2.3.7 عوامِل انتقاء الموادّ

تُقسَّم مناقشةُ عوامِل انتقاء الموادّ طبيعيّاً إلى ثلاثة أقسامٍ: (1) عوامِل إجماليّة وثيقة الصلة بانتقاء المادّة المُركَّبة نفسِها، (2) عوامِل ناظِمة لانتقاء الألياف، (3) عوامِل أساسيّة لانتقاء منظومة المصفوفة. سيتم وصف هذه الأنواع الثلاثة من عناصر المفاضلة في الانتقاء، ويتبع ذلك ملاحظات إيجازيّة حول سيرورة انتقاء مادّةٍ مُركَّبةٍ مناسبة.

إن عوامِل انتقاء الموادّ التي يمكن أخذُها بالاعتبار واضحةٌ إلى حدّ ما ويتم عرضها في الشكل 7–20. هذه العوامِل هي في الحقيقة نفسُ العوامِل المُستعمَلة عند تفضيل انتقاء مادّةٍ مُركَّبة على معدنٍ.

أهمّ عامِلَين ينبغي اعتبارُهما أوّلاً وقبل أيّ عامِلٍ آخر من أجل التطبيقات البنيوية هما الجساءة والمتانة. تركّزت غالبيّةُ الأعمال التطويريّة وأعمالُ تطبيقات الموادّ المُركَّبة على بنى حسّاسة للوزن مثل الطائرات. وهنا، تُعَدّ ميزتا النسبتَين العاليتَين للمتانة إلى الوزن وللجساءة إلى الوزن في الموادّ المُركَّبة أكثر مُوجِّهات التصميم شأناً. مع ذلك، ومن أجل تطبيقاتٍ عديدة، هناك عوامِل أو مُوجِّهاتٌ أخرى أكثر أهميّةً من الجساءة والمتانة.

• متانة	• متانة الإهتراء
• جساءة	• متانة التآكل
• عمر التعب	• الناقلية الكهربائية
• الكثافة	•الناقلية الحرارية
• المتانة	• العازلية الصوتية
• الكلفة	• العازلية الحرارية
• دالتية درجة الحرارة	
• تمدد حراري	

الشكل 7–20: عوامل انتقاء المواد

إن صلابة (toughness) مادّةٍ ما هي مُوجِّهُ تصميمٍ في كثيرٍ من البنى الخاضعة لحمولة صدم. من أجل هذه الموادّ التي يجب أن تعمل تحت مجالٍ واسعٍ من درجات الحرارة، تكون تبعية خصائصِ المادّة المتنوِّعة إلى درجة الحرارة ذات أهميّة كبيرة. تخضع بنى أخرى إلى الاهتراء أو التآكُل، وبالتالي تكون متانة المادّة لهذه التأثيرات عاملاً مهمّاً في انتقاء المادّة. يمكن للناقليّتَين الحراريّة والكهربائيّة أن تكونا موجِّهَي تصميمٍ من أجل بعض التطبيقات، وبالتالي ينبغي انتقاء موادّ ذات مجالاتِ أداءٍ "مناسبة" من أجل هذَين العامِلَين. وبشكلٍ مماثل، غالباً ما تُملي الخصائصُ مميزة للعزل الصوتيّ والحراري للمواد انتقاءها.

من أجل بنى من أيّ نوعٍ كان في الفضاء، ينصبّ الاهتمامُ الرئيسيّ على الأرجح على معلمات التمدّد الحراريّ والجساءات المتنوِّعة. ومن الممكن لغالبيّة القرّاء أن يكونوا مُدركين – من خلال اطّلاعِهم على مشاكِل المكّوك الفضائيّ المتنوّعة – أن أحد جوانب المكّوك يسخن أكثر من الجانِب الآخر إذا لم يستمرّ في دورانِه بالنسبة إلى الشمس. في إحدى الرحلات، تمّ فتْحُ أبواب حُجيرة الحمولة، ولكن لم يكن ممكناً إعادةُ إغلاقِها. قال المعلِّق التلفزيونيّ أن الأبوابَ تمدّدت وانفتَلت بشكلٍ كبير بحيث ما عادت تدخل من جديد في فتحة الباب التي يجب إغلاقُها. مع ذلك، لم يكوِّن التمدُّد الحراريّ مشكلةً على الإطلاق، لأن معلمات التمدّد الحراري لنسيج الإيبوكسي–غرافيت في

الأبواب تُلائم نوعاً ما – في أسوأ الأحوال وفي اتّجاهاتٍ عديدة – البنية المعدنيةَ المُحيطةَ وتنسجم معها. في الحقيقة، تعرّض الجانِب السفليّ للمكّوك بشكلٍ أكبر إلى الشمس، وبالتالي تمدّد ممّا سبّب انحراف المكّوك ليغدوَ بشكل موزة. وهكذا، أضحت الفتحةُ التي يجب على أبواب الإيبوكسي–غرافيت سدُّها أصغرَ تماماً. تمثّلت الطريقةُ الوحيدةُ التي كان بإمكانِها حلُّ المسألة في تدوير المكّوك الفضائيّ، وهذا تماماً ما فعلته وكالة ناسا. عطف روّادُ الفضاء المكّوكَ لينقلبَ وضعُه ويغدو جانبُه السفليّ بعيداً عن الشمس لبرهةٍ، واستطاعوا بعدها إغلاقَ الأبواب.

تكون دقّةُ التصويب والتوجيه من أجل مقرابٍ فضائيّ عاليةً جداً، ويمكن النظرُ إليها بالطريقة التالية. إذا كان المقراب في نيويورك وتمّ توجيهُه نحو سان فرانسيسكو، فإن الدقّةَ التي ينبغي توجيهه بها تقع ضمن قطرِ برتقالةٍ ننظر إليها من مسافة ثلاثة آلاف ميل! ولهذا لا يمكن السماحُ بأيّ انفعال للمقراب أو لهيكله الداعِم. يكمن الهدفُ الإجماليّ في القدرة على توجيه المقراب ضمن حدود هذه الدقّة، وبالتالي ينبغي علينا فعلُ ما هو ضروريّ من أجل بلوغ هذه الدقّة المطلوبة. ضمن نطاق مشروعٍ مثل مقراب هَبْل (Hubble) الفضائيّ الذي تتجاوز كلفتُه الإجماليّة مليارَ دولار، توجد حريّةٌ في انتقاء الموادّ التي سوف تقوم بالتشغيل. إذا كان هناك عملٌ ما يتوجّب فعلُه، فإنه علينا إيجادُ المادّة التي سوف تقوم به. وبالتالي لا تتمثّل القضيّةُ الأهمّ هنا بالتكلفة، بل بـــالوظيفة!

توجد أمثلةٌ أخرى حيث تكون موجِّهاتُ التصميم عوامِلَ أخرى مختلفةً موجودةً في لائحة عوامِل انتقاء الموادّ (الشكل 7–20). مع ذلك، اقتصرتِ القضايا الأهمُّ في زمن التطبيقات الابتدائيّة للموادّ المُركَّبة المتقدّمة على المتانة والجساءة. يمكن لقضيِّةِ عمر التعبِ أن تكون أكثرَ أهميّةً في بعض التطبيقات. يتمّ اعتمادُ بعض التطبيقات، بالرغم من بعض المميزات السيّئة للموادّ المُركَّبة في بعضٍ من عوامِل انتقاء الموادّ هذه. على سبيل المثال، لا تكون الناقليّة الكهربائيّة للغرافيت – إيبوكسي كافيةً عند تصميم طائرةٍ تخضع لضربةِ برقٍ (صاعقة) (كما تكون جميع الطائرات). ينبغي على جميع أقسام الطائرة أن تكون قادرةً على تبديد وتشتيت الشحنات الكهربائيّة للصواعِق. وهكذا، تنبغي إضافةُ مادّةٍ تكميليّة ما أو أنُظُمةٍ مادّيّة ناقلةٍ كهربائيّاً إلى الغرافيت–إيبوكسي من أجل تزويد الطائرة بميزاتٍ مناسبةٍ متانة للصواعق.

3.3.7 عوامِل انتقاء الألياف

يُنظَر إلى الألياف غالباً على أنّها المُكوِّنات المُهيمنة ضمن مادّة مُركَّبة مُقوّاة ليفيّاً. مع ذلك، يقود التحليلُ الميكانيكيّ الميكروي البسيط الموصوف في الفقرة 5.3.7، أهميّة المكوِّنات، إلى الاستنتاج بأن الألياف تهيمن فقط على المعامِل وفق اتّجاه الألياف في رُقاقة مُقوّاة محوريّاً. من الأكيد أن خصائص الرُّقاقة في هذا الاتّجاه لها المقدرةُ الكامنة على المساهمة بأكبر مقدارٍ في متانة وجساءة الصفيحة الطبقيّة. وهكذا، تلعب الأليافُ الدورَ المُسيطرَ في صفيحةٍ طبقيّة مُصمَّمة بشكلٍ مناسِب. ينبغي على هذه الصفيحة الطبقيّة أن تمتلكَ أليافاً موجهة في الاتّجاهات المتنوّعة الضروريّة لمتانة كلّ الحمولات الممكنة.

عادةً، يعتمد انتقاء الألياف بشكلٍ رئيسيّ على المتانة والجساءة المطلوبتَين. إن سيرورة الانتقاء هذه مباشرةٌ وبسيطةٌ نسبيّاً، ولكن عوامِل انتقاء أخرى ،مثل تلك الوارِدة في لائحة الشكل 7–20 تتطلّب اعتباراتٍ إضافيّةً. تمتلك أليافُ الكربون في بنى الفضاء التي ينبغي أن تكون مستقرّةً الأبعاد، مقرابات أو هوائيّات، مثلاً، قيمةً سالبةً لمعامِل التمدّد الحراريّ، ممّا يمكن استعمالُه لموازنة القيمة الموجبة عادةً للمصفوفات، وينجم عنه مادّةٌ بنيوية جذّابةٍ للغاية ذات معامِلِ تمدّدٍ حراريّ تقترب قيمته من الصفر. في جميع التطبيقات، تكون الرابِطةُ بين الليف والمصفوفة ضروريّةً، وبالتالي ينبغي غالباً إجراءُ معالجةٍ سطحيّة أو طلاءٍ للّيف.

4.3.7 عوامِل انتقاء المصفوفة

يتضمّن انتقاء مادّة رابطة مناسبة لمادّة مُركَّبة عوامِلَ عديدةً، ويتمتّع بأهميّة كبيرة لأن المصفوفة تؤلِّف عادةً المكون الرابِطَ الضعيف والليّنَ في جميع خصائص المادّة المُركَّبة ثنائيّة الطور. تشمل عوامِل انتقاء المصفوفة مقدرتَها على تبليل الليف (ممّا يؤثِّر في متانة السطح البيني للّيف – المصفوفة)، وسهولةَ معالجتها، وجودة الصفيحة الطبقيّة الرقائقيّة الناجمة، ودرجة الحرارة القصوى التي يمكن إخضاع المصفوفة لها. تضمّ العوامِلُ الأخرى المرتبطةُ بالأداء، الانفعال – إلى – الإخفاق، والمتانة البيئيّة، والكثافة، والكلفة.

تُستعمل عوامِل انتقاء المصفوفة البنيوي هذه كأسسٍ من أجل مقارنة الأنواع الرئيسيّة الأربعة للمصفوفات، ونعني البوليميرات، والمعادِن، والموادّ الكربونيّة، والموادّ السيراميكيّة، الواردِة في الجدول 7–1. من الواضح أنْ لا مادّةً رابطةً وحيدةً تكون الأفضلَ من أجل جميع عوامِل الانتقاء. مع ذلك، إذا لم تشكِّل درجةُ الحرارةِ العالية وشروطٌ بيئيّةٌ متطرِّفةٌ أخرى قضيةً، فإن الموادَّ بوليمير– مصفوفة تعتبر أنسبَ المكوِّنات، وهذا هو السببُ في أن تطبيقاتٍ راهنةٍ عديدةٍ تتضمّن موادّ مصفوفات بوليميريّة. في الحقيقة، تُعَدّ هذه التطبيقاتُ الأسهلَ والأكثرَ مُباشرةً من بين تطبيقات الموادّ المُركَّبة. ينبغي استعمالُ الموادّ كربون– مصفوفة أو السيراميك – مصفوفة في التطبيقات ذات درجات الحرارة العالية، أو الخاضعة لشروطٍ بيئيّة قاسيةٍ. تكون الموادّ ذات الرابِط المعدنيّ مناسبةً أكثر من البوليميرات من أجل التطبيقات ذات درجات الحرارة المعتدلة، أو الخاضعة لشروطٍ بيئيّةٍ متواضعة غيرِ درجة الحرارة المرتفعة.

من الناحيّة التاريخيّة، تم أوّلاً تفضيلُ الموادّ المُركَّبة ذات الرابِط البوليميريّ، مثل بورون – إيبوكسي أو غرافيت–إيبوكسي، في التطبيقات، تليها الموادّ معدن– مصفوفة مثل بورون – ألمنيوم. لا تزال الموادّ سيراميك – مصفوفة في طور التطوير عند لحظة هذه الكتابة، ولكن الموادّ كربون – مصفوفة قد تمّ تطبيقُها في المجالات المحدودة نسبيّاً مثل نهايات مقدمات مركبات إعادة الدخول (إلى الغلاف الجوّيّ) ذات الشكل الأنفيّ، ومقدّمات الصواريخ، ومكّوك الفضاء منذ أوائل السبعينيّات.

الجدول 7–1: عوامِل انتقاء المصفوفة

عامِل الانتقاء	تصنيف الموادّ المصفوفة			
	سيِّئ ←			جيّد ←
ابتلال الليف	سيراميك	معدن	كربون	بوليمير
سهولة المعالَجة	سيراميك	معدن	كربون	بوليمير
جودة الصفيحة الرقائقيّة	سيراميك	كربون	معدن	بوليمير
الانفعال–إلى–إخفاق	سيراميك	كربون	معدن	بوليمير
المتانة البيئيّة	بوليمير	معدن	كربون	سيراميك
الكثافة	معدن	سيراميك	كربون	بوليمير
الكلفة	معدن	كربون	سيراميك	بوليمير

تتضمّن الموادّ بوليمير مجالاً واسعاً من موادّ معينة. ومن الأرجح أن تكون المادّةُ البوليميريّة ذاتُ الاستعمال الأكثر هي مادّة الإيبوكسي. تضمّ الموادُّ البوليميريّة الأخرى مادتَي الفينيل إستِر والبولي إستِر. يمكن للبوليميرات أن تكون إمّا من النوع المتصلِّب حراريّاً، حيث يكون تصالب السلاسل البوليميريّة غيرَ عكوسٍ، أومن النوع المتلدّن حراريّاً، حيث لا يحدث تصالبٌ بل تتقسّى المصفوفة وحدها فقط، ويمكن تقسيتُها وتمييعها مراراً، على سبيل المثال، يمكن تسخينُ الموادّ ذات التلدُّن الحراريّ وإعادةُ تسخينِها، حيث يكون هذا الأمرُ أساسيّاً في أيّ سيرورة قولبةٍ بالحقن. بالمقابل، لا تنصهر البوليميراتُ ذات التصلُّب الحراريّ عند إعادة التسخين، وبالتالي لا يمكن قولبتُها بالحقن. تمتلك البولي إيميدات درجةُ حرارةٍ قصوى أعلى من موادّ الإيبوكسي (650 °Fمقابل°F 250 أو 350 °F) (343 °C مقابل 121 °C أو 177 °C)، ولكنها تكون أكثرَ قصافةٍ بكثير، وبالتالي أصعبَ بكثيرٍ على المعالَجة.

5.3.7 أهميّة المُكوِّنات

إن سيرورة انتقاء التوليفة المناسبة للألياف والمصفوفة من أجل تطبيق مُعيَّن هي سيرورة مُعقَّدةٌ إلى حدّ ما. سوف تساعد متطلّباتُ التصميم المفروضةُ على استبعاد بعضِ الموادِّ الرابِطة أو الأليافِ أو توليفاتٍ منها من الاعتبارِ. مع ذلك، لا تعتبر بعض توليفات الموادّ المُكوِّنة سهلة التقييم.

يمكن الحصولُ مباشرةً على قرينةِ أداءٍ مُبسَّط من أجل الجساءة انطلاقاً من أساسيّات نظريّة الميكانيك المجهريّ (انظر، مثلاً، الفصلَ الثالث). يمكن تحليلُ الثوابت الهندسيّة البنيوية من أجل رُقاقة مُقوّاة محوريّاً $E_1, E_2, \upsilon_{12}, G_{12}$ بسهولة بواسطة حساباتٍ بسيطةٍ (يمكن لسهولتِها إجراؤها على ظهر ظرف الرسالة) تكشف أيّاً من الثوابت الهندسيّة تهيمن عليه خصائصُ الليف، وأيّاً تسيطِر عليه خصائص المصفوفة، وأيّاً لا يخضع لأيّ من خصائص الليف أو المصفوفة. تذكّر أن المعامِلَ وفق اتّجاه الليف E_1 يُهيمَن عليه الليف. أكثر من ذلك، تسيطر المصفوفة على كلٍّ من المعامِلِ العرضانيّ بالنسبة إلى الألياف E_2، ومعامِلِ القصّ G_{12}. أخيراً، لا يهيمن على نسبة بواسون υ_{12} لا من قبل الألياف، ولا من قبل المصفوفة. وفقاً لذلك، إذا تمّ انتقاء المصفوفة من أجل تحقيقِ أغراضِ تصميمٍ ما، ووجدنا أن قيمةَ E_1 غيرُ كافيةٍ، فعندها لا بدّ من اعتمادِ

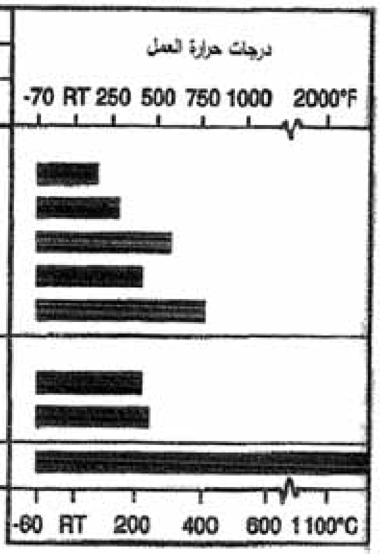
منظومةٍ ليفيّة أكثر مقدرةً. مع ذلك، إذا كانت كلتا قيمتَي E_2 و/أو G_{12} غيرَ كافيتَين، فإن انتقاء نظامٍ ليفيّ مختلفٍ لن يجلب معه فوائدَ سيرورة. تكمن المشكلةُ الحقيقيّة هنا في منظومة المصفوفة! تصلح الحججُ نفسُها من أجل التغيُّرات في النسب المئويّة النسبيّة للّيف وللمادّة الرابِطة من أجل منظومةٍ مادّةٍ ثابتة.

يمكن تطبيقُ تحليلِ المكانيك الميكروي، الذي أشرنا له في الفقرة الماضية، أيضاً على الخصائص الفيزيائيّة الحراريّة مثل التمدّد الحراريّ، والتمدُّد الناجم عن الرطوبة، والناقليّة الحراريّة، إلخ. مع ذلك، كنْ على درايةٍ بأن التحليلَ الميكانيكيَّ الميكروي يكون عموماً مُرشِداً وصفياً نحو تصميم المادّة أكبرَ قيمةٍ بكثيرٍ منه في أيّ اعتباراتٍ كمّيّة. يعني ذلك أن دقّةَ التوقعات الميكانيكيّة الميكروية للخصائص التي تهيمن عليها المصفوفة منخفضةٌ جداً. وفقاً لذلك، من غير الممكن إجراءُ توقعات موثوقةٍ كمّيّاً عن الأداء. بكلماتٍ أخرى، لا يمكن استعمالُ خصائص المكوِّنات من أجل التوقع بسلوك المادّة المُركَّبة عند هذه اللحظة من بيئة التصميم البنيوي. إن الميكانيك الميكروي ملائمٌ جيداً من أجل فهم وتصميم المادّة نفسها. ولا يمكن تجنُّب ضرورة إجراء قياساتٍ فعليّة لخصائص المادّة المُركَّبة.

عندما تُفحَص بعض التوليفات الممكنة لنُظُم الألياف والموادّ الرابِطة، تبدأ بالتشكُّل صورةٌ عن فوائد الموادّ المُركَّبة. وتُقاس هذه الفوائد فقط من وجهة نظر مجال درجات حرارة التشغيل (operating) في الجدول 7−2. تتحكّم مادة المصفوفة هنا، سواء أكان ذلك مع بعض الموادّ ذات الرابِط المتصلِّب حرارياً (thermoset) أم مع بعض الموادّ ذات الرابِط المتلدّن حرارياً (thermoplastic)، بدرجة حرارة التشغيل للمادّة المُركَّبة. والاستثناءان الوحيدان في الجدول 7−2 هما عدم انسجامُ الموادّ الفينوليّة والموادّ البولي إيميديّة مع الكيڤلار. يتحكّم نظام المصفوفة كربون أيضاً بدرجاتِ حرارة التشغيل، ولا تنسجم، لأسبابٍ تتعلّق بالمعالَجة (سوف ينصهر كلا الزجاج والكيڤلار عند درجة حرارة المعالَجة للمصفوفة الكربونيّة)، إلاّ مع ألياف الكربون. يعني ذلك أن أليافَ الكربون وحدها تستطيع احتمالَ درجاتِ الحرارة العاليةَ اللازمة من أجل إيجاد المصفوفة الكربونيّة حول الألياف. لن يتم هنا محاولة إنشاءَ موسوعةٍ عن الموادّ المُركَّبة. من أجل هذا الهدف، راجع كتب لوبن (Lubin) [7−1] وشفارتز (Schwartz) [7−2] الممتازة.

الجدول 7-2: درجات حرارة التشغيل لبعض نُظُم الموادّ المُركَّبة

المادة المكوّنة			
المادة الرابطة	الليف: كربون	الليف: كيفلار	الليف: زجاج
ذات تصلّب حراري			
إيبوكسي (تصلّب 250°F)*	نعم	نعم	نعم
إيبوكسي (تصلّب 350°F)**	نعم	نعم	نعم
مواد فينولية	نعم	لا	نعم
بيسمال إيميد	نعم	نعم	نعم
بولي إيميد	نعم	لا	نعم
ذات تلدّن حراري			
بولي سلفون	نعم	نعم	نعم
بيك	نعم	نعم	نعم
كربون	نعم	لا	لا

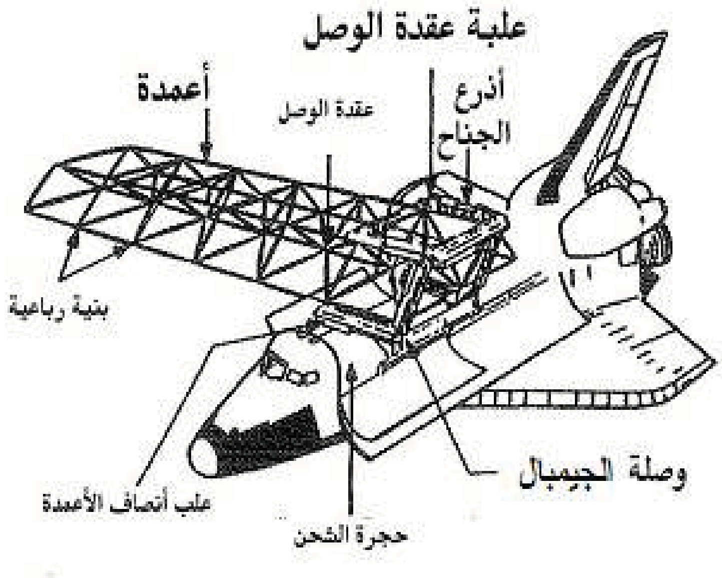


*(تصلّب 121°C) **(تصلّب 177°C)

6.3.7 مثال على انتقاء موادّ مجموعة الجمالون

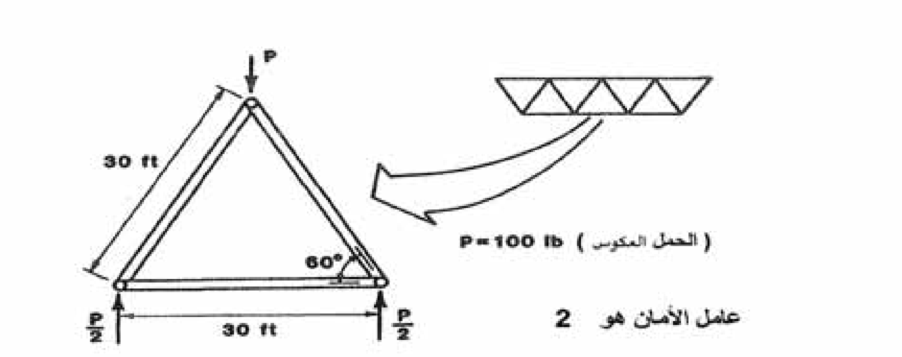
لنصمِّمْ مجموعة جمالون فضائيٍّ مع هدفٍ رئيسي يكمن في انتقاء المادّة المناسبة. تُستعمل مجموعة الجمالون لإنشاء محطّة فضائيّة أو لإنشاء هوائيٍّ كبير. نفترض أن مجموعة الجمالون قد تمّ تجميعُها انطلاقاً من أنواع مختلفة من دعاماتٍ وركائزَ في حُجيرة الحمولة لمكّوك الفضاء، كما في الشكل 7-21. تكون هذه الركائز (Struts) مخروطيّة الشكل يتداخلُ واحدُها ضمن الآخر، تماماً كما تتواجد أكوازُ (قرون) البوظة الواحد ضمن الآخر في مخزن قبل استعمالِها. يتمّ تثبيتُ الطرفَين الكبيرَين لدعامتين معاً كما في الشكل 7-21، أمّا الأطرافُ الصغيرةُ للدعامات فتُثبَّت بوصلات. تُخزَن مجموعاتٌ من أنصاف الدعامات المتداخِلة هذه في علبٍ صغيرةٍ فوق المكّوك، كما تُخزَن الوصلاتُ أيضاً في علب. إن حجمَ مجموعة الجمالون هذه كبيرٌ جداً، ولكن وزنَها صغيرٌ، وبالتالي لا يمكن نقلُها إلى الفضاء في حالةٍ مُجمَّعةٍ مُسبقاً. لذلك ينبغي تجميع مجموعة الجمالون في الفضاء. تكمن المسألةُ هنا في انتقاء المادّة التي سوف تُصنَع منها

مجموعة الجمالون. تُعطى الإجابةُ في الشكل 7–21، أي أن الأعمدةَ تُصنَع من غرافيت–إيبوكسي، ومن الأرجح أن هذا الحلّ قد راودك. السؤال إذاً هو: لماذا؟ وأيٍّ من موادّ الغرافيت–إيبوكسي العديدة ينبغي استعمالها؟



الشكل 7–21: مركبة فضائية مع بناء هيكل معدني

يجب تبسيط المسألة بشكلٍ كبير لكي تقبلَ حلاً في سياق هذا الكتاب. لنفترض أن مثلّثاً متساوي الأضلاع يخضع لحمولةٍ ما في الاتّجاه الشاقولي، كما في الشكل 7–22. تُطبَّق حمولةُ P مساوية لـ 100 lb (445 N) على الوصلة العلويّة، ويمكن لهذه الحمولة أن تذهب إمّا نحو الاتّجاه العلويّ أو السفليّ (في المُخطّط وليس في الفضاء!). ينبغي على مجموعة الجمالون هذه أخذُ حمولتها العكوسة بعامِل أمان تساوي قيمتُه اثنَين ،مثلاً، إزاء أيّ حادثةٍ تتسبّب بإخفاقها. ما هي المادّةُ التي سوف تختارها لعنصرِ مجموعة الجمالون، وبأيِّ أبعادٍ ووزنٍ، من أجل تحقيق متطلّبات التصميم التي تشمل وجوبَ بناء البنية بأصغر كلفة؟



الشكل 7–22: أمثلة الهيكل الفضائي

من أجل تقييم واحدةٍ من القضايا ذات الصلة الوثيقة جداً بهذا الاختيار الموادّ، ينبغي معرفةُ كلفةِ إيصال عناصرِ مجموعة الجمالون إلى الفضاء. في عام 1985، كلّفت رحلةُ المكّوك 90 مليون دولار. إذا كان المكّوك قادراً على حمل حمولةٍ وزنُها (2700 kg) 6000 lb، فإنه من أجل أيّ lb نرفعه إلى الأعلى في المكّوك تكون نفقاتُ النقل مساويةً لـــ 1500$. إن هذه التكلفةَ أعلى بقليل من التكلفة الأصليّة المتوقعة لرحلةِ مكّوكٍ فضائيّ. اعتادت وكالةُ ناسا على التفكير بأن رحلةً واحِدةً تُكلِّف حوالى 15 مليون دولار، وهذا يوافِق تكلفةَ نقلٍ مساويةً لعدّة مئات من الدولارات من أجل كلّ رِطل (700 $/كغ). تكمن الحقيقةُ في أننا الآن نحتاج حتى إلى أكثر من 1500 دولار للرطل (3300 $/كغ) لوضع شيءٍ في الفضاء. إن تكلفةَ الإطلاق والدفع نحو الأعلى مستقلّةٌ عن المادّة المعنية. وهكذا، لا بد وأن يكون الدافِع قد توفّر لديك الآن من أجل انتقاء المادّة الأقلّ كثافةً التي تحقّق المتطلّبات الوظيفيّة.

تشمل العوامِل الأخرى التي تدخل في سيرورة انتقاء الموادّ هذه كلفةَ صنع الأقسام من موادّ متنوّعة. اعتبرْ أربع موادَّ مختلفة مُرشَّحة: فولاذ عاديّ قد يُكلِّف كمادّة خامّ دولاراً للرطل (2 $/كغ)، ألمنيوم يمكن أن يُكلِّف 5$ للرطل (11 $/كغ)، غرافيت–إيبوكسي AS-3501 عالية المتانة بتكلفةٍ حوالى 20$ في الرطل (44 $/كغ)، وغرافيت–إيبوكسي GY-70-HYE-1534 عالي المتانة يمكن أن يُكلِّف حوالى 200 $ في الرطل (440$/كغ) (لا يمكن الآن شراءُ GY-70 بمثل هذا السعر المنخفض). يُظهِر الجدول 7–3 أيضاً التكاليفَ المتنوّعةَ للتصنيع والتجميع. تكون كلفةُ التصنيعِ والتجميعِ لكلتا مادَّتي الغرافيت – إيبوكسي أقل منها في الفولاذ والألمنيوم. تذهب عينُك إلى الكلفة

الأعلى: يُكلِّف GY-70-HYE1534 $200 للرطل (440$/كغ)! تشمل كلفةُ التجميع نفقاتِ التجميع في الفضاء، وتجميعِ مُثبِّتاتٍ عند نهاياتِ أعمدة الغرافيت–إيبوكسي تسمح بتثبيت عمودٍ ضمن الآخر، وعند النهايات الأصغر للتمكن من تثبيت عمودٍ بالوصلة. تعتبر الأرقامَ في الجدول ممثلة، ولكنها ليست صحيحةً بالضرورة: مع ذلك فإنها ستكون كافيةً من أجل مثالنا.

الجدول 7–3: تكاليف التصنيع والتجميع

المادّة	طور التصنيع (الصنع)		
	مادّة خامّ	تصنيع	تجميع
فولاذ	(1$/kg (2.2 $/kg)	4$/lb (8.8$/kg)	3$/lb (6.6 $/lb)
ألمنيوم	5$/lb (11$/kg)	4$/lb (8.8$/kg)	3$/lb (6.6 $/lb)
غرافيت–إيبوكسي GY-70-HY1534	200$/lb (400$/kg)	3$/lb (6.6 $/lb)	2$/lb (4.4$/kg)
غرافيت–إيبوكسي AS-3501	20$/lb (44$/kg)	3$/lb (6.6 $/lb)	2$/lb (4.4$/kg)

إن السؤالَ الحقيقيّ هو التالي: أيُّ مادةٍ من مادّتَي الغرافيت – إيبوكسي ينبغي استعمالُها؟ يوجد عامِلا كلفةٍ: (1) كلفة المادّة نفسِها وما يتمّ فعلُه معها أثناء الصنع، والتصنيع، ولاحقاً خلال تجميعها، و(2) كلفة الإطلاق نحو الفضاء. يورِد الجدولُ 7–4 مجموعةً من الخصائص التي تشمل الجساءات والمتانات، مع معلمات التمدّد الحراريّ وقيم الكثافة من أجل موادّ متنوّعة. يمتلك الفولاذ الكثافة الأعلى، بينما تمتلك مادّة الغرافيت–إيبوكسي GY-70-HYE1534 القيمةَ الأقل الثانيةَ للكثافة. تمتلك مادّةُ الغرافيت–إيبوكسي ذاتُ المتانة العالية الكثافةَ الأقل. توجد المتانات الأعلى على قاعدةٍ مطلقة في مادّة الغرافيت – إيبوكسي ذات المتانة العالية، حيث توجد المتانة الأعلى في الاتّجاه الليفيّ، ولكن ليس في الاتّجاه العمودي على الألياف. من أجل الجساءة، تمتلك مادّةُ الغرافيت–إيبوكسي، ذات المعامِل العالي، القيمةَ الأعلى للجساءة المُطلقة. توجد بعضُ نقاطٍ علويّة وأخرى سفليّة في الخصائص وفي التكاليف. ما هو الميزان؟ ما هو الأمر المهمّ بالنسبة إلى هذه المسألة الخاصّة؟

يعتمد ما هو مهمّ بالنسبة إلى مسألة مجموعة الجمالون الفضائيّة هذه على أيٍّ من القضايا التقانية المتنوِّعة تؤثِّر في التصميم. هل تُشكِّل الجساءةُ قضيةً؟ إذا كان الأمر

كذلك، فلماذا؟ هل الانبعاجُ قضية؟ هل يمكن للتعب أن يُشكِّل مشكلةً؟ أو التآكُل؟ أو التمدُّد الحراريّ أو الوصلات؟ تظهر جميعَ هذه العوامِل في الشكل 7–23.

الجدول 7–4 أ: خصائص موادّ مُرشَّحة (الجملة الدولية للواحدات المعياريّة)

المادّة	الجساءة	المتانة	التمدّد الحراري 10^{-6} in/in/°F	الكثافة lb/in^3
فولاذ	$E=30\times10^6$ psi $\upsilon=0.3$	$\sigma_{max}=30$ ksi	$\alpha=6.5$	0.282
ألمنيوم	$E=10\times10^6$ psi $\upsilon=0.25$	$\sigma_{max}=55$ ksi	$\alpha=12$	0.097
غرافيت–إيبوكسي عالي المعامِل (GY-70-HY1534)	$E_1=42\times10^6$ psi $E_2=1\times10^6$ psi $\upsilon_{12}=0.25$ $G_{12}=0.7\times10^6$ psi	$X_t=90$ ksi $X_c=90$ ksi $Y_t=2$ ksi $Y_c=28$ ksi S=4 ksi	$\alpha_1 = -0.58$ $\alpha_2 = 16.5$	0.061
غرافيت–إيبوكسي عالي المتانة (AS-3501)	$E_1=18.5\times10^6$ psi $E_2=1.6\times10^6$ psi $\upsilon_{12}=0.25$ $G_{12}=0.65\times10^6$ psi	$X_t=169$ ksi $X_c=162$ ksi $Y_t=6$ ksi $Y_c=25$ ksi S=7 ksi	$\alpha_1 = -0.25$ $\alpha_2 = 15.2$	0.055

الجدول 7–4 ب: خصائص موادّ مُرشَّحة (النظام الدولي للوحدات المعياريّة)

المادّة	الجساءة	المتانة	التمدّد الحراري 10^{-6} m/m/°C	الكثافة N/m^3
فولاذ	E=207 GPa $\upsilon=0.3$	$\sigma_{max}=207$ MPa	$\alpha=11.7$	49.4
ألمنيوم	E=69 GPa $\upsilon=0.25$	$\sigma_{max}=380$ MPa	$\alpha=21.6$	17
غرافيت–إيبوكسي عالي المعامِل (GY-70-HY1534)	$E_1=290$ GPa $E_2=6.9$ GPa $\upsilon_{12}=0.25$ $G_{12}=4.8$ GPa	$X_t=621$ MPa $X_c=621$ MPa $Y_t=13.8$ MPa $Y_c=193$ MPa S=27.6 MPa	$\alpha_1 = -1.04$ $\alpha_2 = 29.7$	10.7
غرافيت–إيبوكسي بقاومة عالية (AS-3501)	$E_1=128$ GPa $E_2=11$ GPa $\upsilon_{12}=0.25$ $G_{12}=4.5$ GPa	$X_t=1170$ MPa $X_c=1120$ MPa $Y_t=41$ MPa $Y_c=170$ MPa S=48 MPa	$\alpha_1 = 0.45$ $\alpha_2 = 27.4$	9.63

- جساءة
- متانة
- انبعاج
- تعب
- تآكل
- تمدد حراري
- وصلات

الشكل 7–23: العوامل التقانية المحتملة ذات الصلة

تنصّ المسألة على الطلب منك أن تقارنَ استعمالات الموادّ الأربع المختلفة من أجل مجموعة الجمالون الفضائيّ هذه عبر استخدام طريقة مُبسَّطة لكيفيّة صنع الدعامات نفسِها. تتبسّط المسألةُ كثيراً مقارنةً بالمسألة الإجماليّة المعروضة في الشكل 7–21. يتطلب الأمر أن تكون الأعمدةُ الحالية بأقطار متساوية على كامل طولها. لا مشكلةَ فيما يخصّ ربطَ هذه الأعمدة عند منتصفاتِ الدعامات أو كيفيّةَ ربطِها ببعضها البعض عند الوصلات. تفحَّصِ التصميمَ البنيوي الأساسيَّ، واسألْ نفسك فيما إذا كنتَ قادراً على تعيينِ أيٍّ من الموادّ تؤدي أفضل التشغيل، ولماذا بالنسبة إلى القضايا الممكنة التقانية ذاتِ الصلة الوثيقة بالقضايا الوارِدة في الشكل 7–23.

هناك على الأقلّ طريقتان لصنع الدعامات. يمكن أن تكونَ أعضاءَ مُصمَتة، أو أعضاءَ مُجوَّفة. تستطيع تماماً أن تتخيَّل أنه تحت بعض الظروف تكون الأعضاءُ المُصمَتة مُفضَّلةً ربّما على الأعضاء المُجوَّفة، بينما يكون العكسُ صحيحاً من أجل أسبابٍ وظروفٍ أخرى. تعود إليك مهمّةُ اكتشافِ أيٍّ من هذَين الخيارَين سيكون الأفضلَ من أجل هذا التطبيق. انظر إلى كلا الخيارَين، أو، بشكلٍ بديل، أعطِ حجّةً مُقنِعةً لصالحِ التشكيل الذي تستعمله، أهو المقطع العرضي المُصمَت أم المقطع العرضي المُجوَّف– مع تركيزٍ على سبب ذلك. عندها، لن يتوجّبَ عليك إجراءُ الحسابات الأخرى.

ينبغي أن تعتبرَ العوامِلَ التقانية الوارِدة في الشكل 7–23، وأن تكتشف أيّاً منها يَنْظُم هذا النوعَ الخاصّ من المسائل. من الممكن أنك تستطيع تخيُّلَ أنّ التعب والتآكُل قد لا يُشكّلان مصدراً للقلق، لأنك لم تُعطَ أيِّ معطياتٍ عنهما. وبما أننا أهملنا الوصلات، فإنك ستخمِّن أنها بدورها لا تُشكِّل قضيّةً. وهكذا، ينبغي أن تقعَ القضيّة الحرجة في مكانٍ آخر من قائمة القضايا التقانية تلك.

لم نعتبرْ بعدُ تهلكة (degradation) تقادُمَ الموادّ في الفضاء. وحيث لا يُعرف ما يكفي عن هذا الأثر لغاية الآن، فإنك لا يمكن أن تأخذَه بعين الاعتبار في مسألة التصميم هذه. إذا ما واجهتْكَ مسألةُ تصميمِ شيءٍ ما، وأنت لا تعرف آثار البيئة، فإنه من الممكن لك أن توصيَ بأنه تمّ تبنّي التصميم اعتماداً على عدم وجود تهلكة. في الحقيقة، لو كان هناك أيّ نوعٍ من التهلكة، لكان على التصميم أن يُقوّى أو يُمتَّن بطريقةٍ تأخذ بالحسبان أمرَ التهلكة. أو أن تفرض التهلكة ربّما استعمال مادّة مختلفة. وهكذا، جميعُ هذه العوامِل قضايا تطرح أسئلةً لا تعرف الإجابةَ عنها. مع ذلك، يجب عليك على الأقلّ أن تضعَ نوعاً من التنصُّل عن المسؤوليّة على التصميم. يعني ذلك أن تُفيد بأنّ هناك بعضَ الأخطار المتضمَّنة عند استعمال التصميم بالطريقة التي وصفتَه بها، لأن تأثيرَ عوامِلَ مُعيَّنةٍ في أداء البنية التي صمّمتَها غيرُ معروف.

يجب عليك أن تتناول عدّةَ أسئلة. أسئلة أساسيّة مثل: بافتراض معرفة المعلمات (البارامیترات)، أيٌّ من هذه الموادّ الأربعة سوف يقود إلى التصميم الأكثر فعاليّةً من ناحية الكلفة؟ أيٌّ منها سيقود إلى الحلّ ذي الوزن الأصغريّ من أجل المسألة؟ بعد ذلك، تناولْ مسألةً أخرى: لنفترض أنه كان عليك القيام برحلة طوارئ مع المكّوك لتضع عدداً من مجموعات الهيكل في المدار. لنفترض أنه وجبَ عليك وضعُ 5000 حجيرةِ هياكل، كلّ حُجيرة تضمّ الوحداتِ الثلاثَ المُبيَّنة في الشكل 7–22 في رحلة مكّوك واحدة. فوق ذلك، افترض مثلاً أنه إمّا أن تكون لديك إطاراتٌ متوفِّرةٌ مصنوعةٌ من المادّة التي تختار، أو أنه بالإمكان صنعُها خلال يومَين مع تشغيلِ عمّالٍ صباحَ مساءَ لهذا الغرض. أيَّ مادةٍ سوف تختار تحت هذه الظروف؟ أمّا السؤال الثالث فينصّ على ما يلي: افترضْ أن تصميمَ مجموعة الجمالون الفضائيّ إمّا حرِجٌ للانبعاج، أو أنه حرجٌ للمتانة. أيٌّ من الاثنيَن صحيحٌ؟ إذا قلتَ أنه حرجٌ للجساءة بدلاً من كونه حرجاً للمتانة، فعندها ماذا

سيحصل لو كان التصميمُ في الواقِع حرجاً للمتانة؟ ما هي المادّة التي ستختارُها تحت هذه الظروف؟ وأخيراً، السؤال الختاميّ سؤالٌ لا يتعلّق مباشرةً بهذه التقييمات، بل بالنوع الآخر من القضايا الذي بسببه قد تمّ إعطاؤك معطياتٍ عن التمدّد الحراريّ. من غير المسموح لمجموعة الجمالون الفضائيّ أن تُغيِّر أبعادها خلال مرورِها داخِل الأشعّة الشمسيّة وخروجِها منها. في الحقيقة، نرغب بتمدّد حراريّ معدوم، أو بتقلُّص حراري مساوٍ للصفر. يُعتبَر التمدّدُ والتقلُّص كلاهما أمرَين سيِّئَين لأنهما يتسبّبان بتغييرٍ في الأبعاد. تحت هذه الظروف، ما هي المادّة التي سوف تستعملها من بين الموادّ الأربعة، وبأيّ طريقةٍ عامّة سوف تستعملها لكي تحقّق تلك الأهداف؟ يعني ذلك أن تقوم بوصفِ مفهومٍ ما بدون أن تحتاج إلى إجراء حساباتٍ.

من أجل حلّ هذه المسألة، سوف تستدعي معادلاتٍ بسيطةً نسبيّاً. لا شيءَ مُعقّداً في المسألة الإجماليّة كما تم تبسيطِها هنا. فكِّر بما تفعل، وتأكَّد أنك أخذت بعين الاعتبار جميع العوامِل وثيقة الصلة بالموضوع. لن تحتاجَ إلى أكثر من آلةٍ حاسبةٍ قابلة للبرمجة لكي تقيم العباراتِ بشكلٍ مُتكرِّر من أجل الموادّ المختلفة. إن وجود لوحةٍ جدوليّة أو برنامجٍ حاسوبيّ موجَز قد يُريحك كثيراً. ينبغي عليك – من أجل إيجاد مجموعةِ هياكل تحقّق متطلَّبات أبعاد مُعيَّنة – التصريحُ بمدى كِبَر قطر القضيب في حال كان مُصمتاً، أو أبعاد قطره الخارجيّ، والداخليّ، وسماكتِه في حال كانت الدعامة ذاتَ مقطعٍ عرضانيّ مُجوَّف. تستطيع بعد ذلك، بالاعتماد على هذه الأبعاد والكثافات – أن تُحدِّد كم تَزِنُ مجموعة الجمالون، وبهذه الطريقة تصل إلى قضيّة كلفةِ التنصيب في المدار. ينبغي صرفُ نقودٍ من أجل أيّ رطلٍ يُرسَل إلى المدار، وبالتالي ينبغي أن تعلمَ مقدار الوزنِ تماماً. هذه مسألةٌ لا يمكن تجنُّبُها في مثل هذا النوع الخاصّ من ظروف التصميم. تتضمّن قضايا أخرى في انتقاء الموادّ أموراً، مثل ماذا تستطيع أن تفعلَ بالمادّة، وهذا يعتمد غالباً على كيف تمّ صنعُها أوّلاً، وخاصّةً من أجل الموادّ المُركَّبة.

قد تكون التوجيهاتُ والتَّذكيراتُ التاليةُ مُفيدةً. من أجل عمودٍ مُدعَّمٍ وبسيط الاستناد عند طرفَيه، تُعطى معادلة الانبعاج لأولِر– بيرنولي بالشكل:

$$P = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (7.3)$$

فوق ذلك، يُعطى عزمُ العطالةِ لمقطعٍ عرضيّ دائريّ مُصمَت:

$$I_{solid} = \frac{\pi d^4}{64} \qquad (7.4)$$

حيث d القطر. أخيراً، يمكن تقريبُ عزمِ العطالة لمقطعٍ عرضيّ رقيق أجوَف بالعلاقة:

$$I_{hollow} = \frac{\pi d^3 t}{8} \qquad (7.5)$$

حيث t سماكة الأنبوب.

تبدو مجموعة الجمالون الفضائي هذه مثالاً غيرَ مألوف، ولكن الفضاءَ في الوقت الراهِن جزءٌ من حياتِنا اليوميّة. وهكذا، هناك أمثِلةٌ فضائيّة عديدة ينبغي أن تتوقّع استعمالَ موادَّ مُركَّبةٍ فيها، لأنها تُمثِّل حلَّ التصميم الأقل كلفةً. أمّا كلفةُ الموادّ الخامّ فهي لا تقارِب حتّى كلفةَ الخطّ الأخير الواقعيّة[*] (bottom-line cost). هناك علاقة بين كلفة المادّة الخامّ وكلفة الخطّ الأخير الفعليّة، ولكن ترتيبَ انتقاءات الموادّ الذي اعتمدتَ فيه على تكاليف الموادّ الخام مهملٌ، ولا يعني شيئاً مقارنةً بترتيب التكاليف الحقيقيّة للخطوط الأخيرة الواقعيّة.

7.3.7 خلاصة

يُعتبَر الإلمامُ بمقدارٍ هائلٍ من المعلومات التفصيليّة عن تنويعةٍ واسِعةٍ من الموادّ أمراً أساسيّاً للتمكن من انتقاء موادَّ مناسبةً بطريقة منطقيّة من أجل تطبيق مُعيَّن. تذكَّر أنه حتى المعدن يمكن أن يكون المادّةَ الصحيحة للاستعمال!

4.7 انتقاء التشكيل

1.4.7 مقدّمة

انتقاء التشكيل هو سيرورة انتقاء التوليفة المناسبة للعناصر البنيوية التي تؤلِّف البنية قيد التصميم. يمكن لهذه العناصِر البنيوية أن تكون العارضات، والصفائحَ، والقواقع

[*] يُظهِر الخطّ السفليّ الأخير في التقرير الماليّ الربحَ أو الخسارةَ الصافية، وبالتالي فهو يمثِّل النتيجة النهائيّة الفعليّة (المترجم).

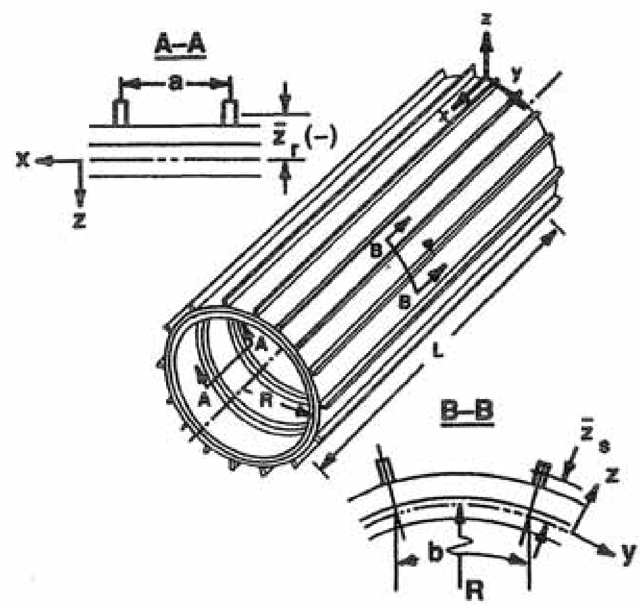
المألوفةَ، أو أن تكون عناصرَ بنيويةً أكثر تعقيداً مثل القواقع المُقوّاة بقلبٍ على هيئة قرص العسل. تشمل المظاهرُ الأكثرُ غرابةً للبنى البنيوية المُركَّبة التفاصيلَ والمجالاتِ الواسعةَ لأنواعِ الموادّ الدّاعِمة، بالإضافة إلى المُقوِّيات المتنوِّعة حول الفراغات والثقوب، إلخ. يعتبر التشكيل الإجمالي لعناصرَ الصفائح والقواقع الجزء السهل من مسألة التصميم. أمّا الجزء الأكثرُ صعوبةً فهو تصميمُ التفاصيل الموضعيّة بحيث تسنح الفرصةُ للعناصرِ الكلّيّة للقيام بعملِها. ينبغي إجراءُ انتقاء التشكيل ضمن علاقةٍ وثيقةٍ مع انتقاء الموادّ، وأيضاً مع انتقاء سيرورة تصنيعٍ مناسِبة. سوف نتناول أوّلاً بنى المُقوّاة، وهذا موضوعٌ يساهِم في الهدف المتمثل بامتلاك القدرة على الانتقاء المنطقيّ لتشكيلٍ مُعيَّن من أجل بنية. في هذه الفقرة، سيتم الكشف عن بعض الاختلافات بين بنى المُركَّبة والمعدنيّة.

2.4.7 بنى المُقوّاة

ينبغي علينا عادةً أن نذهب أبعدَ من مجرّد المفهوم البسيط للقشرة الأحاديّة أو للقشرة ذات السماكة الوحيدة، وذلك من أجل أيّ بنيةٍ نقوم بتصميمِها. يعني ذلك أنه يجب علينا عادةً أن نعتبِر جساءةَ الانحناء، وأن نقوِّيَ غالباً البنية بطريقةٍ ما من أجل تحقيق فعاليّةٍ بنيوية. سوف نتناول أوّلاً مصطلحات التقوية وكيفيّةَ استعمالِها. بعد ذلك، سوف نعتبر أنواعَ الدعامات التي يمكن استخدامُها. يلي ذلك قضيّةٌ مهمّةٌ تبزغ عند تصميم الدعامات (الموادّ المتانة للانفعال)، تتمثّل فيما إذا كان للدعامة مقطعٌ عرضيّ مفتوحٌ أو مغلَق. نتناول بعدها بعضَ باراميترات تصميم الدعامة (المتانة للانفعال) وبعضَ اعتبارات التصميم من أجل الدعامات. أخيراً، سوف نفحص مفهوماً جديداً للبنى البنيوية المُركَّبة المُقوِّية والدّاعِمة، ألا وهو مفهوم الشبكة المتعامِدة (Orthogrid).

تُستعمَل بعضُ المُصطلَحاتِ عموماً لوصف بنى المُقوَّاة في الطيران والفضاء. يُستعمل تشكيلُ القوقعة الاسطوانيّة الدائريّة المُقواة بشكلٍ كبير والمألوفُ نسبيّاً كمثالٍ بغرض المناقشة. اللوحة هي الصفيحةُ غيرُ المُقوّاة، المستويّةُ أو المتقوسة، الواقعة بين دعامات. على سبيل المثال، تُشغل اللوحةُ الحيز a مضروباً بـــ b في القوقعة المُبيَّنة في الشكل 7–24. للدعامات أسماءٌ مختلفةٌ اعتماداً على اتّجاهها، وغالباً على نوع البنية (مثلاً، طائرة إزاء سفينة). الحلقاتُ هي دعامات محيطيّة كما يُبيِّنها الشكل 7–24 على

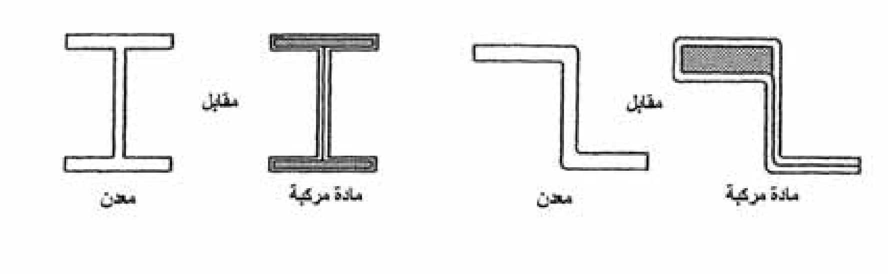
الوجه الدّاخليّ للقشرة. يمكن للدعامات الحلقيّة أن توجَد على الوجه الخارجيّ للقشرة، ما لم يُمنَع ذلك لأسبابٍ ديناميكيّة هوائيّة أو لأسبابٍ ديناميكيّة مائيّة. تُدعى الحلقاتُ أحياناً بالإطارات (frames) أو الأضلاع (ribs). أمّا الأضلاع الطولانيّة (stringers) المُساعِدة فهي دعامات محوريّة، كما تتبيّن على الوجه الخارجيّ للغلاف في الشكل 7-24. بالتأكيد، يمكن وضعُ هذه الأضلاع الطولانيّة على الوجه الداخليّ للقوقعة. تُعرَف الأضلاعُ الطولانيّة أيضاً باسم العوارِض (longerous) أو الأوتاد (spars) في مجال صناعة الطائرات. غالباً ما توضَع كلتا الحلقاتِ والأضلاعِ الطولانيّة على الجانِب نفسِه من القوقعة، ممّا يُنتِج دعامات متقاطعةً. على سبيل المثال، ينبغي وضعُ جميع المُدعِّمات – في التطبيقات الخاصّة بالطائرة، أو بالغوّاصة، أو بجسم الصاروخ الطائر– على الجانِب الداخليّ من أجل المحافظة على وسطٍ خارجيٍّ نظيف من الناحية الديناميكيّة الهوائيّة، أو الديناميكيّة المائيّة. والأمرُ الآخر هو أن الحلقات غالباً ما تكون مستمرّةً، بينما تكون الأضلاع كافية الطول لتوافق المكان بين الحلقات.



الشكل 7–24: قوقعة أسطوانية دائرية مدعمة خارج المركز

1.2.4.7 فوائد الموادّ المُركَّبة في بنى المُقوّاة

تكون أشكالٌ عديدةٌ للدعامات المعدنيّة منتظمةً نوعاً ما، كما إنها تمتلك عادةً سماكةً ثابتةً ما لم تكن مشغلة (مما يزيد الكلفة كثيراً). مع ذلك، لا يعتبر هذا الانتظامُ ضرورياً في حالة الموادّ المُركَّبة. في الحقيقة، يمكن تفصيل وتكييفُ عناصرَ تقويةٍ منفردةٍ من موادّ مُركَّبةٍ من أجل فعاليّةٍ أقرب إلى الوضع الأمثليّ ممّا لو كانت من المعادِن. وفقاً لذلك، تمتلك عناصرِ مُقوِّيةٌ مختلفةٌ على السواء سماكاتٍ متباينةً، وموادَّ مختلفةً في أماكنَ متغايرةٍ، كما في الشكل 7–25. يعني ذلك أنه في حالة المعادِن، فإن جدارَ الدعامة ينبغي أن يكون ثابت السماكة ومنتظَم توزيعِ المادّة على السواء، ما لم يكن تشغيلها مُكلِف و/أو أن يتمّ تثبيتُ عناصرَ تقويةٍ لموادّ مختلفة بطريقة ميكانيكيّة. بخلاف ذلك، يمكن لجدار الدعامة أن يكون له سماكاتٌ عديدة وطرائق مختلفة لتوضُّعات الصفائح الطبقيّةٌ، بدون أيّ تغييرٍ أساسيٍّ تقريباً، بما في ذلك الكلفة، في سيرورة التصنيع. يعني ذلك أن السماكاتِ المختلفةَ وطرائق التوضُّعاتِ الطبقيّةَ المتباينةَ تُشكّل سمةً طبيعيةً لتصنيع بنى المُركَّبة.



الشكل 7–25: أشكال الدعامات المعدنية مقابل الدعامات المركبة

يمكن الكشفُ عن تباينٍ أبعد بين الدعامات المعدنيّة والمُركَّبة عندما نتفحّص أهدافَ وميزاتِ تصميم الدعامة (المادّة المتانة للانفعال). من أجل دعامة معدنيّة منتظمة السماكة – أو حتى غير منتظمة–، فإننا نسعى إلى جعل قيمة عزم العطالة للدعامة أعظميّةً من أجل تكبير جساءة الانحناء للدعامة. هذان العامِلان متناسبان طرداً أحدهما مع الآخر، عندما نُدرِك أن جساءةَ الانحناء لدعامات معدنية متوضِّعة بالقرب من السطح الأوسط لصفيحةٍ أو لقوقعة ترتبط مع الدعامات تُساوي:

$$EI = E \iint y^2 dxdy \quad (7.6)$$

وأن معامِل المرونة – بسبب التوزُّع المنتظَم (المتجانِس) للمادّة عبر الدعامة المعدنية– يمكن وضعُه خارج إشارة التكامل. يُختزَل تكاملُ المعادلة (7.6) بالتأكيد إلى نتيجة نظريّة المحور الموازي المألوفة:

$$I_{middlesurface} = I_c + Ad^2 \quad (7.7)$$

حيث I_c العزم الثاني للمنطقة حول محور الدعامة المركزيّ الموازي للسطح الأوسط للَّوحة؛ وA مساحة سطح الدعامة؛ بينما d هي المسافة الفاصلة بين السطح الأوسط والمركز المتوسِّط (centroid) للدعامة (المادّة المتانة للانفعال). وهكذا، يمكن زيادةُ جساءة الانحناء عبر جعل الدعامة أطولَ بدون زيادةٍ في A، ولكن مع زيادة I_c وd.

بخلاف ذلك، وبسبب الطبيعة المتغيّرة مكانيّاً (غير متجانسة) للمادّة في دعامةٍ مصنوعةٍ من مادّة مُركَّبة، لا يمكن فصلُ وتحليلُ جساءة الانحناء إلى عامِل مادّة مضروبٍ بحدٍّ هندسيّ، كما في المعادلة (7.6). بدلاً من ذلك، تُعطى جساءة الانحناء للدعامة المُركَّبة بـــ

$$EI = \iint E(x, y) y^2 dxdy \quad (7.8)$$

حيث لا يمكن وضعُ الطبيعة المتغايرة لتوزيع المادّة E(x,y) خارج إشارة التكامُل. يعني ذلك أن السمةَ الهندسيّة لجساءة الانحناء لا يمكن فصلُها عن سمة المادّة. وهكذا، لا يتضمّن التصميمُ الصحيحُ لدعامةٍ بالضرورة جعلَ قيمة عزم العطالة للدعامة أعظميّةً. في الحقيقة، لا معنى الآن لعزم العطالة بحدّ ذاته عندما ننتقل من دعامات معدنيّة إلى دعامات مركبة. ينبغي علينا تفصيل مكوِّنات الدعامة لتحقيق توليفة خاصةٍ أعظميّة (جساءة الانحناء) EI وفق معنى التكامُل.

من أجل توزيعات للرُّقاقات مثل تلك التي يُبيِّنها الشكل 7–26، لا أهمّيةَ لعزم العطالة نفسه. ينبغي أن نضع الموادّ ذاتَ القيمةِ العاليةِ لــ E على أبعد مسافة من محور انحناء الصفيحة أو القوقعة، بحيث يكون لها أكبر التأثير، أو تقوم بأفضل الأفعال الجيّدة (أي تُؤدي أكبر مساهمة في جساءة الانحناء). نقوم بتفصيل مكوِّنات الدعامة في اتّجاه الليف، ومنطقته، وموقع منطقتِه بهدف تحقيق قيمة جساءة الانحناء العالية الضروريّة. وهكذا، توضَع الرقاقات مع الألياف في الاتّجاه المحوريّ للدعامة في أعلى مقطع القبّعة

في الشكل 7–26 بغرض جعل مساهماتِها في جساءة الانحناء أعظميّة. توضَع رُقاقات أخرى بزاوية ±45° مع الألياف في النسيج (Web) لكي تنقل إجهاداتِ القصّ من أعلى مقطع القبّعة إلى اللوح السفلي. لا تُساهم هذه الرُّقاقات المائلة بزاوية ±45° بشكلٍ كبيرٍ في جساءة الانحناء، ويعود ذلك إلى سببَين: (1) لها قيمةٌ منخفضة لـــ E في الاتّجاه المحوريّ للدعامة، و(2) لها مساحةُ سطحٍ صغيرة على مسافةٍ غير بعيدةٍ جداً عن أسفل الدعامة.



- سماكة غير منتظمة
- خصائص متغايرة
- الجساءة: $EI= \iint E(x,y)y^2\, dxdy$
- الهدف: EI عالٍ

(تصميم عناصر الدعامة)

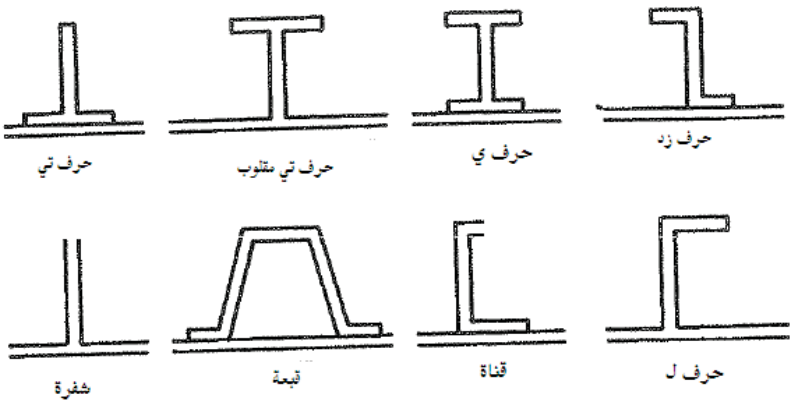
- سماكة موحدة
- خصائص متجانسة
- الجساءة: $EI= E\iint y^2\, dxdy$
- الهدف: EI عالٍ

الشكل 7–26: خواص الدعامة المعدنية مقابل الدعامة المركبة

2.2.4.7 أنواع الدعامات (الموادّ المتانة للانفعال)

يمكن للحلقاتِ والأضلاع الطولانيّة (stringers) أن تمتلكَ تنويعةً من أشكال المقاطع العرضانيّة، يُبيِّن بعضَها الشكلُ 7–27. من أجل الدعامات المعدنيّة، تكون بعض هذه الأشكال عادةً مقاطعَ مُدرفَلة يتمّ تثبيتُها لاحقاً باللوحة، مثل، الأشكال الشبيهة بأحرف T، أو I، أو z، أو القبعة أو الشبيهة بالأقنية. يمكن للتثبيت أن يكون ميكانيكيّاً، أو بالالتصاق، أو بواسطة اللحام.

يتمّ عموماً تشغيلُ أشكالٍ أخرى غيرِ اعتياديّة أو توزيعاتٍ للسماكات فوق المقطع العرضي بشكلٍ متكامِل حيث يكون اللوح مصنوعاً من مادّة لا تقلّ سماكتُها عن ارتفاع الدعامة إضافة إلى سماكةُ الدعامة، أي بأشكالٍ شبيهة بحرف T مقلوب، أو حرف J، أو شفرة . يكون هذا التشغيلُ إمّا ميكانيكيّاً، مُنتجاً للرقاقة (chip)، أو كيميائيّاً، معروفاً بالتغريز الكيميائيّ (milling). وتعتبر كلتا عمليّتَي التشغيل هاتَين مُكْلِفتين جداً.



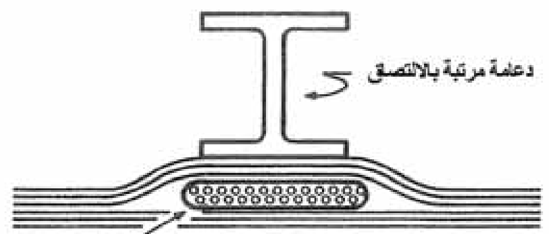
الشكل 7-27: أشكال مقاطع الدعامات الأساسية

تُبنى جميعُ الأشكالِ من أجل الدعامات المُركَّبة انطلاقاً من طبقاتٍ منفردة من المادّة. بالتأكيد، يمكن إنتاجُ بعض أشكال الدعامات عبر التشكيل بالدرفَلة أو بالسحب المستمرّ، مثلاً، ثمّ تُثبَّت إلى الوحات. أو أن يُمكن أن يُصنَع اللوح المُدعَّم في سيرورة واحدة تتضمّن وضعَ رُقاقاتٍ (صُفَيحات) منفردة، عادةً باليد، بأبعادٍ مختلفة في مواقِع بحيث ينجم عنه بناء بنية بنيوية. يمكن تثبيتُ الدعامات إلى اللوحات بواسطة اللصق، أو اللحام النقطي (stictching)، أو بتثبيتٍ ميكانيكيّ.

ليس مُتوقَّعاً من أجل غالبيّة تطبيقات الفضاء والطيران اعتمادُ أشكالٍ معياريّة للدعامات المُركَّبة. هنا، تضمن قيمةُ ووظيفةُ البنية أمْثَلةَ لتصميم الدعامة. بخلاف ذلك، تقود الضغوط التنافسيّةُ من أجل تطبيقاتٍ مألوفةٍ أكثر في الحياة اليوميّة، مثل السّقالات،

والسلالِم، وممرّات المشاة في المصانِع الكيميائيّة، إلى أوضاعَ تُقبَل فيها الحلولُ الوسطُ في فعاليّة الدعامة مباشرةً (تصميم فوق المطلوب) بغرض تحقيق كلفةٍ أقل من الكلفةِ المتعلّقة بالتصميم الأمثليّ.

إن مفهومَ السوار (الحزام) الداعم المدمج مفهومٌ مهمٌ من السهل تطبيقُه على الموادّ المُركَّبة. تُصنَع قشرةُ اللوحة من مادّة نقدِر، بسبب صنعِها بشكل طبقاتٍ، على فصلِها عند المستوى المُحدَّد الذي نريد دمج سوارٍ مُقوٍّ ضمنَه، كما في الشكل 7-28. بشكلٍ أكثرَ دقّة، نتوقّف ببساطة عن توضيع الرُقاقات على اللوحة بشكل كافٍ لكي نبني سواراً، ثمّ نُكمِل توضُّع الطبقات على اللوحة ونكسي ونستر مادّةَ اللوحة فوق السوار. نكون وفق هذه السيرورة قد دمجنا سواراً في اللوحة. يمكننا بعد ذلك أن نضعَ دعامةً أخرى أعلى ذاك السوار، في حال اخترنا فعلَ ذلك. يمكن للسوار أن يتألّف من جميع الأليافِ المائلة بزاوية $0°$، بهدف الحصول على الأثر المُقوّي الأعظميّ في اتّجاهٍ واحِد، بخلاف الأثر المُقوّي متعدّد الاتّجاهات للصفيحة الطبقيّة المُحيطة. يكمن الهدفُ الأساسيّ من السوار الداعم في تقوية وزيادة جساءة اللوحة التحتيّة، بحيث يمكن لشفة الدعامة أن تلتصقَ بشكلٍ أكثرَ سهولةً باللوحة المُشوّهة (التي تُظهر الآن انفعالاتٍ أصغر). تتمثّل الصعوبةُ الوحيدةُ لمفهوم التقوية هذا في إمكانِ وجودِ مناطق غنيّة بالراتنج بالقرب من أطراف السوار المدمج. تعتبر هذه المناطق الغنيّة بالراتنج ضعيفةٌ، وتُشكِّل بالتالي مصدراً ممكناً لانفصال الطبقات.



الشكل 7-28: سوار تدعيم مدمج

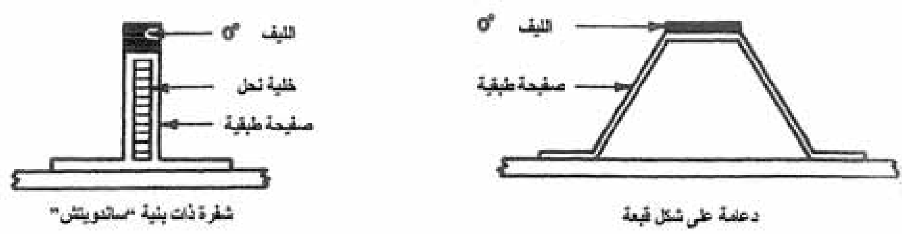
من المؤكَّد أن ربطَ دعامة بلوحةٍ بواسطة لاصقٍ إجرائيّةٌ طبيعيّةٌ قابلة للتحقيق جداً عند إنشاء البنى المُركَّبة النموذجيّة. لم نناقش أيّ إجرائيّة لوصل أجزاء ببعضها البعض ما خلا إجرائيّة التسخين المشترك. كبديلٍ عن ذلك، ومن أجل استخدام غشاءٍ لاصقٍ لربط الأجزاء مع بعضها البعض، نقطع ببساطةٍ صفيحةً أو غشاءً من اللاصِقِ بالحجم المناسِب، ثم نضع ما قطعناه بين الجزأين اللذَين نرغب ربطهما معاً، ثم نُجري دورةَ معالجةٍ حرارية تتسبَّب بالتصاق اللاصِق بكلٍّ من الدعامة واللوحة نفسِها. نستطيع أيضاً تثبيتَ أيِّ دعامة نختار بلوحةٍ ميكانيكيّاً.

3.2.4.7 الدعامات ذات المقطع المفتوح إزاء الدعامات ذات المقطع المغلَق

تدور قضيّةُ الدعامة ذات المقطع المفتوح إزاء الدعامة ذات المقطع المغلَق بشكلٍ رئيسيّ حول مسألة جساءة الفتل للدعامة. من الممكن ألاّ تظنّ أن جساءة الفتل مهمّةٌ جداً من أجل الدعامة، ولكنها في الحقيقة يمكن أن تكون كذلك لأن الدعامة تنفتل غالباً عندما تتبعج اللوحة المُقوّاة. عند إجراء الحسابات من أجل تقدير متانة الانبعاج للَوحةٍ قشرية مُقوّاة، تلعب متانة الفتل للدعامة تأثيراً كبيراً. يعني ذلك أنّ جساءةَ الفتل تساعد اللوحَة المُقوّاة على متانة انفعالات الانبعاج التي يمكن على الأرجح ألاّ تكون اعتياديّة. ولا تكون انفعالاتُ الانبعاج هذه ببساطة انحناءً صرفاً؛ فهي أحياناً نوعٌ من الالفتل. وحتى لو كانت انحناءً صرفاً في مستوٍ واحِد، فإننا سوف نفرض نوعاً من الفتل على الدعامة إذا تقاطعت هذه الأخيرة مع ذاك المستوي بزاويةٍ ما.

وهكذا، تكون متانة الفتل للدعامة مهمّةً جداً في متانة انفعالات الانبعاج والانحناء تلك. بالتعريف، لا تكون جميعُ أجزاء محيط الدعامة ذات المقطع المفتوح مرتبطةً ببعضها البعض. يعني ذلك أنه من أجل دعامةٍ نمط الشفرة الشفة – شطيرة على يسار الشكل 7–29، فإن جزءاً من الشفرة يرتفع في الهواء، ولا يرتبط الجزءُ في الأعلى بالشفاه (flanges) الجانِبية. وبشكلٍ طبيعيّ، يُظهر مثل هذا النوع من البنى متانة الفتل أقل بكثير منها في الدعامة ذات المقطع المُغلَق على يمين الشكل 7–29، حيث ترتبط جميعُ أجزاء مُحيط الدعامة ببعضها البعض. بالتأكيد لا ترتبط الشفة على يسار الدعامة

ذات المقطع الشبيه بالقبّعة بالحافّة على اليمين بواسطةِ أيّ دعامة، ولكن الشفاه ترتبط من خلال اللوحة، وبالتالي يكون المقطع مغلقاً فعليّاً.



الشكل 7–29: دعامات مقفلة المقطع مقابل دعامات مفتوحة المقطع

لنفاضِل بين دعامة نمط الشفرة – شطيرة ودعامة القبّعة عبر تناول عدّة قضايا تخصّ الأداء. على سبيل المثال، من السهل نسبيّاً، من وجهة نظر التصنيع، صنعُ دعامة نمط نصل – شطيرة بالرغم من وجود جزء مدمج على شكل قرص العسل (خلية النحل) في الوسط. إن بناءَ الدعامة على شكل الشفرة أمرٌ سهلٌ وطبيعيّ عندما نقوم بصنع دعامةٍ مُركَّبةٍ، لأننا ببساطة نكون قد أصبحنا حتى الآن في إطارِ بناء شكلٍ هندسيّ و/أو مادّة. بدلاُ من وضعِ طبقاتٍ من غرافيت–إيبوكسي، نضع بدلاً منها نوعاً من بنيةٍ على شكلِ قرص العسل. أمّا الدعامة على شكل القُبَّعة، فهي أكثرُ صعوبةً من حيث التصنيع من الدعامة على شكل الشفرة – الشطيرة، بسبب الهندسة الأكثر تعقيداً (وبسبب الحاجةِ إلى نوعٍ من الدعامة الداخليّة المساعدة حتى تصلّب الدعامة).

من وجهة نظر التفتيش (المعاينة) بغرض التأكُّد من تصنيع الدعامة بشكل جيّدٍ أو لا، فإنه من السهل نسبيّاً تفتيش الدعامة نمط الشفرة – شطيرة، بينما تكون معاينة الدعامة على شكل القبّعة أمراً صعباً من الداخِل. ينبغي أن نحصلَ على نوعٍ من جهازٍ أو أداةٍ بهدف الحكمِ من الداخِل. لو حاولنا المعاينةَ من الخارِج، فإن كلَّ ما نستطيعُ الحصول عليه بواسطة الموجات فوق الصوتيّة يتعلّق بمدى جودة ارتباط الشفاه مع قاعدة اللوحة. يجب علينا عموماً امتلاك نوعٍ من قالبٍ محيطٍ بالدعامة، ثمّ ينبغي علينا إزالةُ هذا القالب.

هذا القالبُ ضروريّ بحيث لا تتحطّم الدعامة أثناء سيرورة التسخين عندما تكون تحت تأثير ضغطٍ. في الحقيقة، من الممكن أحياناً، وبغرض تبسيط سيرورة التصنيع، أن نرغب بإبقاء لبّ أو قالبٍ من نوعٍ ما داخل الدعامة، وذلك لمجرّد الصعوبةِ الجمّة في إخراج القلب من الداخِل. هذا الوضعُ صحيحٌ بشكلٍ خاصّ من أجل دعامات متقاطعة بزاوية 90°، أو أيّ زاوية أخرى، فيما بينها، حيث تمرّ في منطقة التقاطعِ نُسُجُ دعامة واحِدة ضمن نُسُجِ دعامة أخرى وتتقاطع معها. لا نملك الحريّةَ لقطع جوانِب الدعامة وإزالةِ أيّ لُبٍّ موجودٍ في الداخِل لمنع تحطُّم الدعامة أثناء التسخين. إذا تركنا اللُبَّ داخلاً فإننا لا نستطيع تفتيش الدعامة من الدّاخِل. وهكذا، إن المعاينة سيرورة أكثرُ تعقيداً بكثير في حالة الدعامة ذات مقطع القبّعة منه في حالة دعامة نمط الشفرة – شطيرة.

تُقارَن الفعاليّةُ النسبيّة للدعامتين بشكلٍ رئيسي على أساس متانة الفتل. يكمن سببُ معدل الفعاليّة الأقل الاسمية لدعامة الشفرة – شطيرة في مقاومتها المنخفضة للفتل (وفي كونِ جساءة الانحناء غيرَ عالية)، بينما يعود سببُ فعاليّة دعامة القبّعة العالية إلى مقاومتها العالية للفتل بفضل قضيّة الدعامة ذات المقطع المفتوح إزاء المُغلَق. تُؤثِّر متانة الفتل للدعامة في حمولة الانبعاج لِلَوحة أو لقوقعة مُقوّاة، كما بيَّنه كارد (Card) وجونز (Jones) [3–7].

لنفترض أننا نرغب في تحليل الإجهادات في الدعامتين. إن هندسةَ دعامة الشفرة– شطيرة في الحقيقة أكثرُ تعقيداً وأقلّ طواعيّةً للتحليل منها في الدعامة على شكل قبَّعة. تشتمل القضايا التي تبرز أثناء التحليل بهدف تحديد آثار الأقسام المختلفة للدعامات على جساءةَ القصّ في المستوي. هناك مقدارٌ مُعيَّن من جساءة القصّ في مستوى الشفرة الشاقوليّ. يعني ذلك أن جساءةَ القصّ ضروريّةٌ لنقل الحمولة من الألياف بزاوية 0° في أعلى الدعامة نحو الأسفل إلى اللوحة. إن جساءةَ القصّ هذه هي الطريقةُ الوحيدةُ في الدعامات على شكل قبّعة لنقل الحمولة من ألياف الزاوية 0° في أعلى الدعامة إلى اللوحة في الأسفل. وهكذا، تُمثِّل جساءةُ القصّ القضيّةَ المهيمنة على التصميم. هذا هو عموماً سببُ وضعِ أليافَ بزاوية °45± ضمن نُسيج الدعامة على شكل قبّعة.

يظهر أن هناكَ قضيّةً أخرى مهمّةً جداً من أجل دعامة الشفرة – شطيرة، ولكنها ليست مهمّةً على الإطلاق من أجل الدعامة على شكل القبّعة – ألا وهي القصّ في النسيج

الشاقوليّ؛ أي القصّ في المستوي العمودي على النّسيج، وليس القصّ في مستوي النسيج. يتبين أن جساءةَ القصّ العرضانيّة هذه تُهيمِن على السلوك، أو أن تكون مهمّةً جداً في سلوك الشفرة– شطيرة، بينما لا يتم ببساطة تناولها على الإطلاق في الدعامة على شكل القبّعة. يمكنك أن تتخيّل أن جساءةَ القصّ العرضانيّ سوف تكون أكثرَ أهمّيّةً في الشفرة – شطيرة عندما تأخذ بعين الاعتبارَ ملاحظة كونِ الشفرة – شطيرة عنصراً سميكاً، بينما تكون الدعامة على شكل قبّعة عنصراً رقيقاً. يعني ذلك أن الانحناء والقصّ في المستوي يهيمنان على هذه الاستجابة، بينما يمكن للقصّ العرضانيّ، بسبب كون الشفرة–شطيرة سميكاً، أن يكون بسهولةٍ جمّةٍ عامِلاً مهمّاً فيها (الشفرة– شطيرة). تمّ، من أجل كلتا الدعامتين، تطويرُ محاكماتٍ منطقيّةٍ وتحاليلَ مناسبةٍ للتمكن من اعتماد دعامةٍ ذات شكلٍ أمثليّ.

4.2.4.7 تصميم الدعامة

تشتمل معلمات تصميم الدعامة ذات الأهمّيّة بعضَ العوامِلَ الواضحةً وبعضَ العوامِل الأقلَّ وضوحاً، كما في لائحة الشكل 7–30. وعلى الأرجح، نفكِّر أوّلاً بجساءةِ الانحناء لِدعامةٍ (وليس بعزم العطالة) على أنها العامِل الأكثر أهمّيّة. لا نحتاج إلى معرفة معلمات جساءة الانحناء حول كلٍّ من المحاوِر فحسب، بل يمكن أن نحتاجَ أيضاً إلى معرفة جساءة الانحناء القطبيّة في بعض التحليلات. تُشكِّل جساءةُ الفتل للدعامة، كما ذكرنا سابقاً، قضيّةً مهمّةً كذلك. يُمثِّل هذا العامِل الاختلافَ الرئيسيّ بين دعامة الشفرة– شطيرة والدعامة على شكل القبّعة اللذين تحدّثنا عنهما. وبدرجةٍ أقلّ، يمكن لثابت الاعوجاج أو للطريقة التي يعوَج فيها المقطع العرضيّ خارج مستواه الأصليّ عندما يتمّ فتلُه أن يكونا مهمَّين من أجل بعض الدعامات. بالتأكيد، نرغب دوماً تناول دعامة ليس كدعامةٍ كامِلةٍ، بل كمكوِّناتٍ من العناصِر التي تؤلِّفه، أي الشفاه، والنُّسُج (Webs)، وكيفيّة اتّصالها مع بعضها البعض. وهكذا، نريد أن نعرف، ضمن سياق تصميم دعامةٍ من مادّة مُركَّبة، ما هي معلمات جساءة الصفائح الطبقيّة المنفردة التي تُشكِّل كلاً من مكوِّنات الدعامة تلك. من أجل عنصرٍ على شكل نسيجٍ، سوف نهتمّ بقيمة جساءة القصّ في المستوي الخاصّة به، كما ذكرنا سابقاً. علاوةً على ذلك، تعتبر جساءةَ القصّ العرضيّة للنسيج مهمّةٌ كذلك من أجل النُّسُج المُقوَّاة وفق بنية قرص العسل.

- معاملا جساءة الانحناء $(EI)_x$, $(EI)_y$
- جساءة الانحناء القطبي $(EI)_p$
- جساءة الفتل $(GJ)_x$
- ثابت الانفتال (warping) Γ
- معلمات جساءة الصفيحة الطبقية لعناصر الدعامة
- جساءة القص في المستوي للنسيج
- جساءة القص العرضانية للنسيج
- خارج المركز، $\bar{z}$
- التباعد
- التوجيه
- المواد

الشكل 7–30: معلمات التصميم للدعامة

تُشكِّل أهمّيّةُ لامركزّيةِ الدعامة قضيّةً قد لا يكون متنبهاً لها. ببساطة، تُعبِّر اللامركزيّةُ $\bar{z}$ عن المسافة بين المركز المتوسِّط للدعامة والسطح المرجعيّ للّوحة الذي تلتصق به الدعامة، كما في الشكل 7–24. على سبيل المثال، لا تتوفّر لدينا، في حالة لوحة جسم الطائرة، حريّةٌ كاملةٌ في وضعِ الدعامات على الوجهَين الدّاخليّ والخارجيّ بنفس القدر من الأهميّة. مع ذلك، سيكون الأمر مختلفاً تماماً فيما إذا وضعنا الدعامات على الوجه الداخلي أم على الوجه الخارجيّ بالنسبة إلى متانة الانبعاج ،مثلاً، لتلك اللوحة المدعَّمة. تحت بعض الظروف، يمكن لمجرَّد تغيير موضع الدعامات من داخِل قوقعة اسطوانيّة دائريّة إلى خارجها أن يؤدّيَ إلى اختلافٍ بمقدار مرّتَين أو ثلاث مرّات في حمولة الانبعاج [7–3]!.

من الواضِح أن أيّ تحليلٍ يتمّ فيه إهمالُ اللامركزيّة قد يكون ناقصاً وضعيفاً بشكلٍ كبير. يوجد النوعُ نفسُه من السلوك من أجل بنى المُركَّبة، حيث من السهل جداً

فهمُه. يتعلّق أثرُ لامركزيّة الدعامة بشكلٍ متأصّل بالإقران انحناء- استطالة لعنصر التدعيم، وليس للرُّقاقة ضمن الصفيحة الطبقيّة، التي لا يختلف عن الطبقات بالنسبة إلى طبقات أخرى، أو عناصرِ أخرى. يمكن لهذا الإقران بين الانحناء والاستطالة أن يكون مهمّاً جداً، وبالتالي ينبغي اعتبارُه في أيّ تحليلٍ لبنيةٍ مُدعمة، باستثناء تلك البنى التي تتضمّن صفيحةً مستويةً، لأننا لا نستطيع هنا تمييزَ الفرق فيما إذا كانت الدعامة متوضِّعة في أعلى أو في أسفل الصفيحة. سوف يؤثِّر الإقران بين الانحناء والاستطالة في الأداء إلى حدّ ما، ولكن لا أهمّيّةَ لكون الدعامات متوضِّعةً في أعلى أو في أسفل صفيحةٍ طبقيّة مستويّة، إلاّ في التأثير في الطريقة التي سوف تنحني بها اللوحة تحت تأثير قوّة محوريّة.

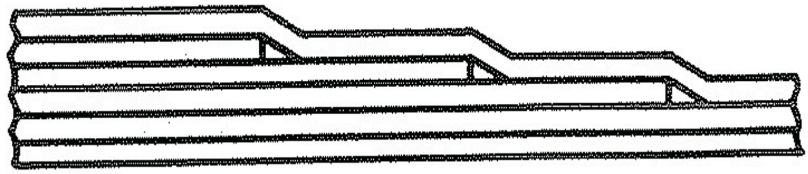
يشتمل معظم ما وصفناه لغاية الآن عن تصميم الدعامات شكلَ وأبعاد الدعامة. تتضمن هذه القضايا انتقاء نوع الدعامة، وانتقاء المقطع العرضي على شكل حرف H، أو الشفرة، أو الشكل الشبيه بالقبّعة، إلخ، بالإضافة إلى الأبعاد المحددة وتركيب المادة لكلّ عنصرٍ داعم. تشتمل معلمات أخرى واضحةٌ في تصميم الدعامة مقدارَ المسافة التي تفصل بينها، وما هي اتّجاهات توضّعها، و- بشكلٍ قد يكون الأكثرَ وضوحاً فيما يتعلّق بما تناولناه في الفقرة 3.7 ماهي الموادّ التي نصنع منها هذه العناصرِ. وكما رأيتَ في بعضٍ من الرسوم السابقة عن الدعامات، نستطيع في حالة الدعامات المُركّبَة أن نستعمل بسهولةٍ موادَّ مختلفةً في أماكن متباينة، وأن نجري بشكلٍ أساسيّ أَمْثَلَةَ استعمال موادّنا بحيث تأتي التقوية بأجود شكلٍ نستطيعه.

تشتمل بعضُ الاعتبارات التصميميّة للدعامات قضايا تتعلّق بأبعاد اللوحة، ويمكن للّوحة هنا أن تعنيَ أمرَين. نستطيع أن نأخذ بعين الاعتبار مساحةَ سطح المنصّة (Platform)، أو سماكةَ اللوحة. يعني ذلك أننا نتناول هنا ثلاثة أنواعٍ من الأبعاد: ما مدى السماكة، وما مدى الطول، وما مدى العرض ؟ ينبغي تكامل هذه القضايا عموماً بطريقةٍ ما مع قضيّة أنواع الدعامات التي نتعامل معها. على سبيل المثال، يمكن أن نحتاج إلى لوحةٍ سميكةٍ من أجل الاستفادة من دعامات عريضة، وإلاّ فإن دعاماتٍ جَسِيمةً على لوحةٍ رقيقةٍ يمكن أن تزيد ببساطة من تحميل اللوحة. من ناحية أخرى، يمكن لنا أن نأخذ بعضَ الدعاماتِ الصغيرة جداً، ولكن المتوضّعة بالأحرى بشكلٍ متقاربٍ على لوحةٍ

رقيقة. وهكذا، ينبغي أخذُ التأثير المتبادل للأبعاد النسبيّة للدعامات واللوحات بعين الاعتبار.

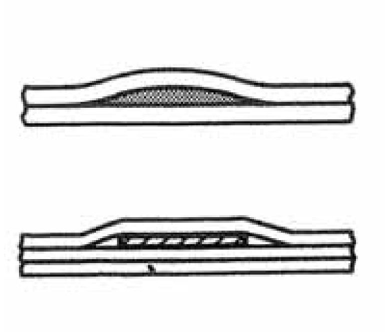
تُصمَّم اللوحة غيرُ المُدعمة في الحالة العامّة عبر انتقاء أبعاد اللوحة الأعظميّة في المستوي وسماكتِه الأصغريّة لمتانة الانبعاج. بعد ذلك، يمكن اختزالُ أبعاد مساحة اللوحة، وزيادة السماكة من خلال سيرورة أمثَلة اللوحة المُدعمة.

من أجل تصغير سماكة صفيحةٍ طبقيّة ، ينبغي إيقافُ بعض الرّقاقات انتقائيّاً، أو إسقاطُها أو إنهاؤها. علاوةً على ذلك، تُغطَّى الرُّقاقات المتوقِّفة برقاقةٍ مستمرّة واحدةٍ على الأقلّ، كما في الشكل 7-31. تنشأ هنا مناطِق غنيّةٌ بالراتنج بشكلٍ طبيعيّ في جوار انحدار (إسقاط) الرّقاقة. تكون مثلُ هذه المناطِق أيضاً مواقع موضعيّة لتركيز الإجهادات. مع ذلك، تؤدي الصفيحة الطبقيّة المُستدقّة بشكل إجماليّ إلى تركيز إجهاداتٍ مُخفَّفةٍ.



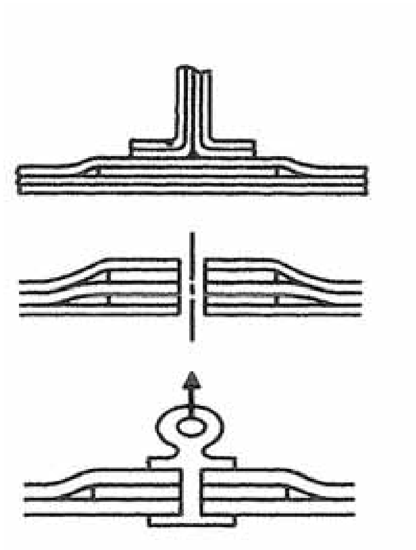
الشكل 7-31: انحدارات الرقاقة

بخلاف انحدارات الرقاقة التي تُنقِص سماكةَ الصفيحة الطبقيّة، فإن الحشْوَ والتبطينَ هما زيادةٌ موضعيّة للسماكة تنشأ عبر إضافة طبقات (بطانات). يتمّ عادةً كبسُ مثل هذه الطبقات المُركَّبة المُضافة، ثمّ قولبتُها بأشكالٍ مختلفة، كما في الشكل 7-32. مع ذلك، إذا كانت الطبقاتُ الإضافيّة صلبةً بشكلٍ أساسيّ كصلابةِ طبقةٍ معدنيّة، فعندها تنشأ فجواتٌ أو مناطق غنيّة بالراتنج. يُستخدَم الحشْوُ والتبطين من أجل (أ) تأمين قاعدةٍ أمتن من أجل تطبيقِ دعامات على اللوحات، و(ب) زيادة قدرة التحملّ الموضعية، و(ت) توفير منطقة التصاق أكبر متانةً وجساءةً، كما في الشكل 7-33.



- المضغوطات و القوالب في حالة طبقة مركبة
- نواة قاسية في حالة طبقة معدنية (تتــرك تجاويــف أو منطقة غنية بالراتنج)

الشكل 7–32: بناء الطبقات الداخلية



- توفير أساس صلب للدعامات على اللوحات
- زيادة قدرة التحمل
- توفير منطقة توصيل

الشكل 7–33: تطبيقات بناء الطبقات الداخلية

5.2.4.7 الشبكة المتعامدة

الشبكةُ المتعامدة مفهومُ تدعيمٍ مثيرٌ للاهتمام يُعَدّ تغييراً خاصّاً لمفاهيم التدعيم التي درسناها لغاية الآن. يتألف هذا المفهومُ من بناء دعامةٍ متقاطِعةٍ من نوع الشفرة

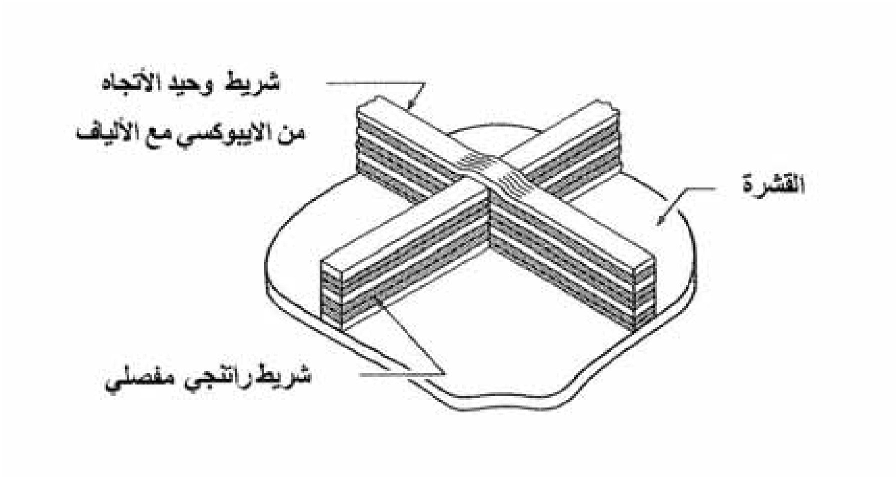
ضمن تشكيلٍ من نوع شبكة الوَفْل[*]. يعني ذلك أن اللوحة المُدعمة نفسَها تُشبِه شيئاً مثل كعكة الوَفْل ولكن، ربّما، مع مسافاتٍ فاصلةٍ أكبر بين النِّصال الشاقوليّة، ولكن الفكرةَ البنيوية تكمن في أننا نقدر حقيقةً على إنشاء الدعامات المتقاطعة من النوع الشفريّ بطريقةٍ مُؤتمتةٍ خاصّة جداً. على سبيل المثال، لنفترض أننا كوّنا قشرةَ اللوحة ثمّ أننا نُدوِّر أو نلفّ شرائطَ من ألياف أحاديّة الاتّجاه ومسبقة الإشباع بالإيبوكسي حول القوقعة في مساراتٍ مُحدّدة، بحيث نبني في مناطِق يمكن تسميتُها هندسيّاً دعامة الشفرة. نجري هذا البناءَ والنموّ بطريقةٍ متقاطعة متخالِطة بحيث تتشابك النِّصال المتنوّعة. يعني ذلك أنه يمكن رؤية اتّجاهات متناوبة للألياف في الشكل 7–34 بحيث يتشابك نصلان متقاطعان مع بعضهما البعض، تماماً كما يمكنك تشابك أصابعَ يديكَ الواحدَة بالأخرى. في الحقيقة، تعتبر الدعامات قضباناً صفائحيّة مبنيّة من خلال طبقاتٍ متناوبة من شريطِ إيبوكسي مُقوّى بالألياف، يليه شريط راتنج مفصليّ.

إن أشرطَة إيبوكسي– ليف أرقّ وأعلى كثافةً من أشرطة الراتنج المفصليّ. يُستعمل شريطُ الراتنج المفصليّ القابل للكبس لتباعد طبقات الألياف بشكلٍ شاقوليّ بحيث يكون البناء وتراكب الطبقات قليلاً عند التقاطعاتِ بين الدعامات. تكمن الفائدة الرئيسية من مقاربة الشبكة العموديّة هذه في إنتاجها الآليّ عبر لفّ الأسلاك أو أيّ ما يتفرع عنه.

لهذا التشكيل البنيوي، الشبكة المتعامدة، المقدرةُ الكامنة على التصنيع الفعّال للوحات جسم طائرةٍ، وهذا أحد أهمّ الأسباب التي تجعل المُصنِّعين يهتمّون كثيراً به. تُستعمَل بنى المدعمة عندما تُحمَّل بشكلٍ كبير، حيث تكون بنى المدعمةُ أكثرَ فعاليّةً من بنى أحاديّة الطبقة. يتمّ التفكيرُ ببنى ذات الشبكات المتعامدة من أجل طائرات النقل الكبيرة التي تُصنَع من قطعٍ اسطوانيّة نوعاً ما، وبذلك يمكن إزالةُ عمود (نواة) الدوران الخاصّ بلفّ الأسلاك بسهولة من الداخِل، وإعادةُ استعمالِه.

---

[*] Waffle: كعكة تُعدّ من دقيق وحليب وبيض تُحمَّص في أداة تحميصٍ خاصّة (المترجم).



الشكل 7-34: الشبكة المتعامدة

ليست الشبكةَ المتعامدة جديدةً كمفهومٍ بنيوي، ولكنها اُستعملت في الستينيات مع المعادِن (امتلكت مرحلةُ الصاروخ "زُحَل Saturn 4B" المصنوعة لنقل روّاد فضاء إلى القمر نمطاً شبيهاً بالوَفْل). ابتدأت الشبكة المتعامدة المعدنيّة بصفيحةٍ سميكةٍ من الألمنيوم تمّ تشغيلها وترقيقُها بين الأماكِن التي نرغب بوضع دعاماتٍ فيها، وذلك حتى سماكة اللوحة، بحيث تُترك الدعاماتُ ناتِئةً. وُجِد أن التشغيل (الحفر) الكيميائيّ أقلُّ كلفةً من مجرّد التشغيلِ بالقوّة العمياء لمجمل المادّة الداخليّة إلى خارِج البنية.

تعتبر الشبكة المتعامدة مجرّد طريقةٍ حديثةٍ لتحقيق الشكل البنيوي نفسِه، وهي أقلّ كلفةً لأننا نبني البنية المُركَّبة بدلاً من التخلص من المعدن. أمّا التشغيل الكيميائيّ فهو سيرورة ذاتُ تكلفةٍ عاليةٍ جداً، ومن الواضِح أن سيرورة مجرَّدِ استخدام قوّةٍ عمياء للتخلص من مجمل المادّة هي أيضاً سيرورة باهظة التكاليف. ليس من الضرورة أن تكون زاويةُ تقاطُع أيّ زوجٍ من الدعامات مساويةً لــ 90°، أي أن صفةَ "المتعامدة" في مصطلَح "الشبكة المتعامدة" مُقيِّدةٌ جداً. في الحقيقة، إذا كانت الزاويةُ بين الدعامات مساويةً لــ 60°، وبالتالي شكّلت الدعامات مثلّثاتٍ متساويةَ الأضلاع، يكون عندها تأثيرُ التقويةِ متماثِلَ المناحي (متناحياً) بشكلٍ أساسيّ، وتُدعى هذه الدعامات عندها بالشبكة المتماثلة (lsogrid).

3.4.7 التشكيل في كلفة التصميم

لننظر إلى بعضٍ مُوجِّهات (مُحرِّضات ودوافِع) الكلفة من أجل صناعةٍ مُعيّنة، ولتكن صناعة الفضاء والطيران. أوّلاً، دعنا نذهب إلى ذلك الوضع عبر النظر لما سيحصل في الصناعات الأخرى. عموماً ،وفي أيّ صناعة، ينبغي أن نعتبرَ كلفةَ الطاقة– بغضّ النظر عن نوعيّة المادّة التي تُستعمَل في السيرورة التي نتعامل معها – والتجهيزات الضروريّةَ لمعالَجة الطاقة والمادّة. بشكلٍ خاصّ، تكون سيرورات إزالة المعدن في صناعة الفضاء والطيران مُوجِّهات قويّة للكلفة، بينما تكون المادّةُ المُركَّبة العكسَ تماماً، لأنه لا يوجد افتراضيّاً عندها شيءٌ اسمُه إزالةُ الموادّ. يُعَدّ عددُ الأجزاء العالي أيضاً مُوجِّهاً كبيراً للكلفة، بينما تواجه بنى المُركَّبة هذه المسألة بجمع وتوحيدِ قطعٍ من بنى أو عناصرِ بنيوية، بشكلٍ طبيعيّ وغير مُكلِف. تعني الأجزاء الأقلُّ مُثبِّتاتٍ أقلَّ، وهذا مُوجِّه كلفةٍ آخر ذو أهميّة كبيرة في كلٍّ من سعر الشراء وكلفة التركيب (فكِّرْ في كلفة حفرِ آلافٍ من الثقوب المتراصِفة بدقّة في بنية بنيوية ما!). إن استعمال الموادّ هو مُوجِّهُ تكلفةٍ عاليةٍ آخر، وتواجِه الموادّ المُركَّبة هذا بطريقتَين مختلفتَين: (1) بواسطة أنواع سيرورات التصنيع الفعّالة لبناء المواد المركبة بدلاً من إزالة المعدن، و(2) عبر استبدال موادّ أخرى نتحكّم بمصادرها ببعض الموادّ الاستراتيجيّة النادرة.

بشكلٍ خاصّ، ومن أجل الطائرة في مجال صناعة الطيران والفضاء، فإن تصنيعَ هيكل الطائرة نفسه يُعَدّ واحِداً من أهمّ مُوجِّهات الكلفة الرئيسية وفق العوامِل التي ناقشناها أعلاه. لننظر إلى طبيعة كيفيّة تصنيع مركبةٍ فضائيّة. هناك عموماً تبعية كبيرة على القوى البشريّة. وتعتبر هذه الصناعةُ نفسُها دوريّةً بسبب تأرجح الطلبات بين الانحسار والانسياب. كما أن الأتمتةُ ضعيفةٌ عموماً، ويعود ذلك ببساطة إلى مُعدّلاتِ (سرعات) الإنتاج المنخفضة نسبيّاً، والعددِ القليل جداً من الزبائن. لكن، وبالرغم من جميع هذه الخصائص مميزة، هناك أيضاً وبشكلٍ نمطيّ طاقةٌ كبيرة قائمةٌ على العديد من العامِلين ذوي المهارات العالية، وتكون نزعةُ التوجُّه نحو التوسُّع في استخدام

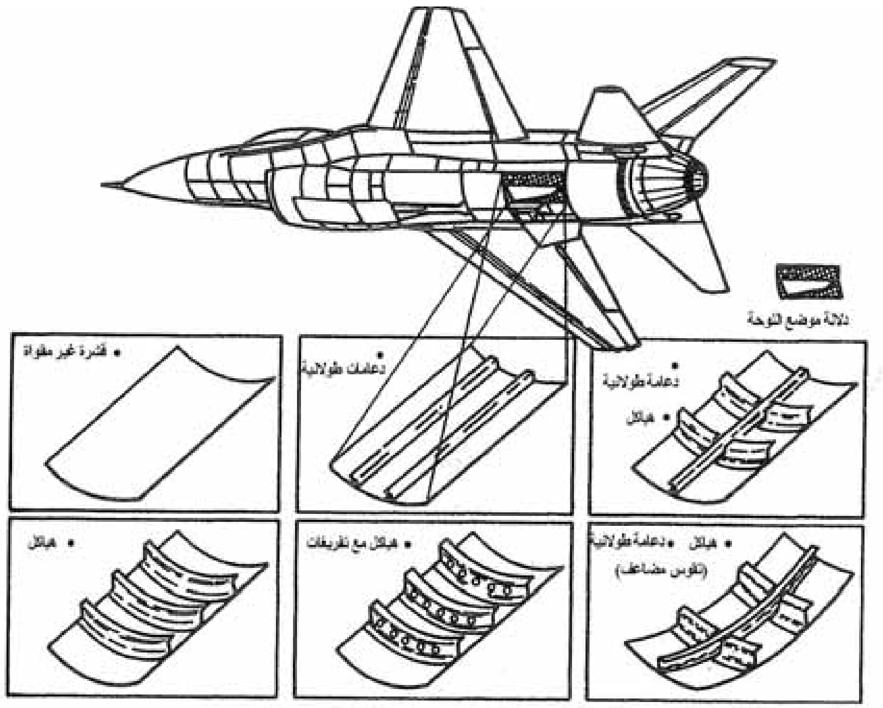
التكنولوجيا العالية أكبرَ بكثير من الصناعات الأخرى. لولا وجودُ تميز المنتَج كعاملٍ مُوجِّهٍ ودافِعٍ، لوقعت هذه الصناعةُ برمّتها في فوضى وورطة لا مجال للخروج منهما.

لننظر إلى طبيعة دراسةٍ حول الحلول الوسط للتشكيل عبر محاولة تطبيقَ بعضٍ من تلك العوامِل التي تفحّصناها للتوّ من أجل لوحة جسم الطائرة. يكمن هدفُنا بشكلٍ أساسيّ في الحصول على التشكيل البنيوي ذي الكلفة الأقل، الذي يُحقّق متطلّباتِ التصميم المتمثلة في الجساءة والمتانة ،صديقتَينا القديمتَين، بالإضافة إلى الوزن الأصغريّ. نحتاج من أجل الطائرات عالية السرعة أداءً مقبولاً في درجات الحرارة العالية، نحتاج إلى بعض المتانة ضدّ التعب. لا نريد صرفَ مبالغ طائلةٍ على الصيانة. نرغب أن تكون للطائرةُ متانة قوية جداً ضد آثار الصدمات، ومتانة ضد التآكُل، ومُتحمِّلةً للأضرار، وسهلة الإصلاح في حال وقوعِ حادثٍ صغير.

افترض أننا بدأنا نفكِّر ببعض المفاهيم البنيوية المختلفة كبدائل للمقاربات الاعتياديّة. لننظر إلى هذه المفاهيم البديلة من وجهة نظر الموادّ التي سوف نستعملها، وأبعاد اللوحة القشرية المتوفرة، وأشكالُ الهياكِل التي نحتاجُها، ومقدار الخير الذي تمتلكه، ثم نطرح النوعَ نفسَه من الأسئلة من أجل الدعامات أو الأضلاع الطولانيّة. كيف نضع مجملَ هذه البنية معاً؟ هل نلصق كلَّ شيءٍ، أم نلحمه بالدرزة؟ أو هل نستعمل نوعاً من المُثبّتات الميكانيكيّة؟ في الحالة العامّة، ما هي طرائق التصنيع التي ينبغي لنا الاهتمامُ بها؟ وبأخذ جميع هذه العوامِل بالاعتبار، تقع حينئذٍ علينا مسؤوليّةُ تقدير كلفة كلٍّ من المفاهيم البديلة من وجهة نظر التصنيع، والتجميع، والاختبار، والمعاينة، ونوعيّة الموادّ، ومصاريف المعدات.

اعتبرْ دراسةً حول لوحات جسم طائرة الـــ F16 أعلنها نوتون (Noton) [7-4]. تقع اللوحة التي تمّ تناوُلُها بالدّراسة في أسفل جسم الطائرة، كما في الشكل 7-35. أمّا المفاهيم المُرشَّحة المتنوِّعة فهي القوقعة غير المدعّمة (أي جسم طائرة وحيد القوقعة)، أضلاع طولانيّة فقط، ضلع طولانيّ مع تنويعةٍ من الهياكِل، ثلاثة هياكِل، بعض الهياكِل مع فراغات في النسيج والضلع الطولاني، هيكلان مع تقوسين مُضاعفَين. هذه هي أنواع التشكيلات التي علينا المُفاضلة بينها وفحصُها. ومع الموادّ المُركَّبة، لدينا التعقيدُ الإضافيُّ المُتمثِّل في السؤال عن كيفيّة تثبيت هذه العناصِر البنيوية مع بعضها

البعض. هل هناك طريقةٌ وحيدةٌ نرغب باعتمادِها لإنشاء كلٍّ من هذه الدعامات؟ هل ينبغي علينا صنعُها مع تدعيمٍ انتقائيّ في الشفاه؟ هل هذا التدعيمُ يستحق الجهدَ المبذول من أجله؟ إذا كان التدعيمُ الانتقائيّ في الحقيقةِ أقل كلفةً في الحالة العامّة، فهل سيكون كذلك من أجل هذا التطبيق الخاصّ؟ يعني ذلك أنه هل هناك مجالٌ كافٍ في سياق هذه الدراسة لتعلّمَ كيفية توفير تلك الأنواعِ من التقويات الانتقائيّة وكيف نجعلها الانتقاء من أجل التوفير في الكلفة لهذه اللوحة الوحيدة من جسم الطائرة؟ أو هل تشكل حلاً وسطاً يمكن تبنيه إذا كنّا ذاهبين نحو إعادة تصميم مجمل الطائرة؟ يمكن أن يكون الوضعُ موافقاً تماماً لهذه الحالة الأخيرة، أي أن الإعادةُ الكلّيّةُ للتصميم هي الوضعَ الوحيدَ الذي يمكن أن تنجح فيه التقويةُ الانتقائيّة. توجد بعض القيود القاسية جداً إذا كنّا نحاوِل إجراءَ بعض التغييرات في منطقةٍ محدودةٍ جداً على لوحةٍ واحِدةٍ فقط.



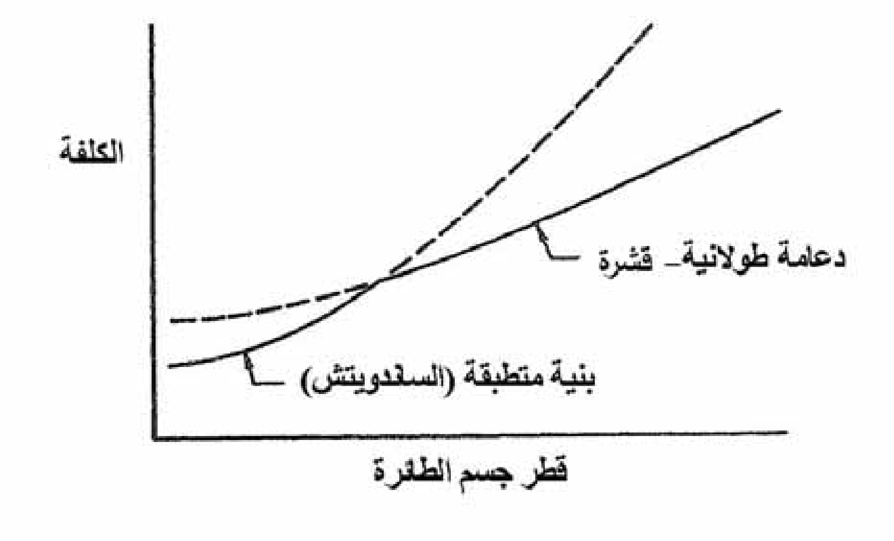
الشكل 7–35: دراسة العوامل الناظمة في لوحة جسم الطائرة F-16

4.4.7 التشكيل مقابل أحجام البنية

ينبغي على اللوحات الكبيرة لجسم الطائرة ،وخاصة طائرة النقل الكبيرة، أن تكون لها قشرةٌ مُقوّاة لتمكينها من تحمُّل حمولاتِ انحناء بالغة الشدة. تكمن النقطةُ هنا في أن طائرةَ النقل الكبيرة تُظهر حمولةً ثقيلةً جداً على القسم المركزيّ من جسمِها، بشكلٍ أكبر بكثير من طائرة أعمال صغيرة لستّة مسافرين أو حوالى ذلك. وهكذا، سوف نرى تشكيلَين متباينَين تماماً لهذين الحجمَين من الطائرات. سوف يمتلك القسمُ المركزيّ من جسم طائرة الأعمال ذات القطر الصغير على الأرجح بنيةً بنيويةً شطيريّةً شبيهةً بقرص العسل، لأن تكلفتَها أقلّ من تكلفة بنية بنيوية مُقوّاة. وكلّما ازدادت الحمولةُ التي نرغب بتحقيقها، ازداد احتمالُ استعمال هيكليّة بنيوية مُقوّاة بشكلٍ متقطِّع، كما هو الحال في طائرة النقل ذات القطر الكبير للقسم المركزيّ من جسمِها.

حتى الآن وفيما يخصّ التشكيلات، يمكننا أن نرى قشرةً من الكيفلار فوق قلبٍ على شكل قرص العسل مصنوعٍ من نوميكس يمثِّل جسمَ الطائرة الأوّليّ من أجل طائرةٍ صغيرةٍ نسبيّاً، ولكن ليس من أجل طائرةٍ كبيرة. يبين الشكل 7–36 الكلفةَ النسبيّة لبناء القلب على شكل قرص العسل وللبناء المُقوّى مقابل قطر القسم المركزيّ من جسم الطائرة، مع إشارةٍ في حالة أجسام الطائرات ذات القطر الصغير إلى أن مقاربةَ قلب الشطيرة في جسم الطائرة تُمثِّل على الأرجح خياراً ذا كلفةٍ أقلّ من خيار استخدامِ قشرياتٍ مع أنواعَ مختلفة من الدعامات عليها. مقابل ذلك، ومن أجل أقسامٍ مركزيّةٍ ذات أقطارٍ كبيرةٍ جداً لجسم الطائرة، يكون تشكيلُ القوقعة – الضلع الطوليّ البديلَ الأقلَّ كلفةً بين البديلَين. وهذا هو، بكلماتٍ قليلة، الفرق بين طائرةٍ صغيرة، مثل طائرة ليرفان Learfan، وBeech Starship وغيرها– وطائراتٍ أكبر – مثل 747، أو 777، أو C-5A.

وهكذا، لا تزداد عادةً بشكلٍ خطّيّ متناسِبٍ مع الحجم المقارباتُ التي نراها مُستعملةً في الطائرات الصغيرة عند الانتقال إلى طائراتٍ أكبر، إذ تختلفُ تماماً مفاضلة التشكيلُ في حالة جسم الطائرة ذي القطر الكبير.



الشكل 7-36: العوامل الناظمة للتشكيل

5.4.7 إعادةُ تشكيل البنى المُركَّبة

تذكّر من مناقشة سيرورة التصميم البنيوي في الفقرة 2.7 أن إعادة تشكيل البنية هي خطوةٌ مهمّة. تحدث إعادةُ التشكيل إمّا لزيادة المقدرة أو لإنقاص الوزن لأن مقدرة البنية أكثرُ من المناسِب. يُقصَد بمصطلَح "المقدرة" (Capability) أن يتوفر هامش من الأمان بالنسبة إلى الكسر، ومن المتانة ضدّ الانبعاج، ومن الاختلاف الكافي بين تردُّد التحريض والترددات الرنينية، إلخ.

كيف نغير أو نعيد تشكيل البنية المُركَّبة بالتحديد؟ أوّلاً، في حالة بنية بنيوية من صفيحة طبقية مُركَّبة مُقوّاة بالألياف سوف نُعيد توجيهَ الطبقات المتنوّعة. سوف تُغيِّر هذه الإجرائيّةُ الخصائص اللمميزة المتانة والجساءةِ للمادّةِ المُركَّبةِ المتعلقةَ بالاتّجاه. وبشكلٍ هامّ، لن تُسبِّبَ إعادةُ تدوير الرُّقاقات أيَّ جزاءٍ وزنيّ! لم نضِف عند التغيير البسيط لتوجّهات الطبقات أيَّ مادّةٍ، كما لم نحذفْ أي موادَّ، وبالتالي لا تغيير في الوزن. لا توجد مقاربةٌ مماثلةٌ لإعادة تشكيل التصميم في حالة بنية بنيوية معدنيّة بدون تغيير وزنِها، إذ لا يمكن فعلَ شيءٍ من أجل بنية كهذه عدا عن تغيير الموادّ، كأن يتم الانتقال من ألمنيوم إلى سبيكة ألمنيوم – ليتيوم. سوف يُغيِّر هذا التغييرُ في المادة من البنية ومن

أدائها بفضل فعاليّةِ وزنٍ أفضل. إن هذا التغيُّرَ المادّي هو النوعُ الوحيد من الأوضاع الذي يشابه بطريقةٍ ما إعادةَ توجيه رُقاقات المادّة المُركَّبة. يمثِّل استبدالُ الموادّ هذا مقاربةً واضحةً لاختزال الوزن. نقول في حالة بنى المُركَّبة "سوف نُصلِح المادّة"، وكل ما ينبغي فعله هو إعادة توجيه الطبقات المتنوّعة من أجل تغيير المقدرات البنيوية بشكلٍ كبير.

يتمثّل خيارٌ مهمٌّ ثانٍ لإعادة التشكيل في إعادة ترتيب الرُّقاقات المنفردة أو الطبقات ضمن الصفيحة الطبقيّة بدون تغيير اتّجاهاتِها. لا تختلف معلمات جساءة الاستطالة الناتجة من إعادة الترتيب هذه عمّا كانت قبلها. مع ذلك، يمكن أن تتغيّر كثيراً معلمات جساءة الإقران انحناء–استطالة وبشكلٍ أهمّ، معلمات جساءة الانحناء. تكمن النقطةُ الرئيسيّة هنا في أن إعادة ترتيب الرُّقاقات لا تُغيّر وزنَ الصفيحة الطبقيّة. لا تمتلك مقاربة التصميم هذه مشابِهاً في تصميم بنى المعدنيّة.

يتمثّل خيارٌ آخر لإعادة التشكيل في إضافة طبقاتٍ إلى الصفيحة الطبقيّة، لكن ذلك يؤدي إلى جزاءٍ من ناحية الوزن. يتمثل مشابه ذلك في بنى المعدنيّة بوضوح في جعل المعدن أكثر سماكة. ومع ذلك، إذا ما تمّ تشغيل البنية المعدنيّة، فسيكون لها تغير ممكن في السماكة أكثر نعومة منه في الصفيحة الطبقيّة المُركَّبة. ينبغي أن تمتلك الصفيحة الطبقيّة عدداً صحيحاً من الطبقات ما لم تكن راغباً في تشغيلِ قسمٍ من سماكةِ طبقةٍ ما وطرحِه إلى الخارِج. مع ذلك، لا يرغب أغلب المُصنِّعين المخاطرة في حصول تهلكة في الألياف عبر تشغيل طبقةٍ ما.

يمكننا من أجل بنية بنيوية يُهَيمِن عليها الانحناء أن نُضيفَ دعاماتٍ تساعد حسب تعريفِها، في اختزال الوزن. لا تُقدِّم الدعاماتُ، بالتأكيد، أيّ نفعٍ لعنصرٍ بنيوي تُهيمِن عليه الاستطالة. تسمح لنا الدعامات المساس في قيمة جساءة الانحناء للبنيةِ البنيوية بشكلٍ أكبر في أحد الاتّجاهات، الموافِقة لجهة الدعامات، منه في الاتّجاهات الأخرى. أو يمكننا أن نضع دعاماتٍ في اتّجاهَين مختلفَين (يكونان غالباً، ولكن ليس دائماً بالضرورة، متعامِدَين). تؤدي إضافةُ الدعامات إلى اختزالٍ في الوزن في كلٍّ من بنى المعدنيّة والمُركَّبة، وذلك مقارنة ببنيةٍ أحاديّة القوقعة (غير مُدعّمة). مع ذلك، يمكن للدعامات

المُركَّبة أن تكون أكثرَ فعاليّةً بكثير من الدعامات المعدنيّة، وبالتالي يمكن للتدعيم أن يُمثِّلَ مقاربةً نحو التوفير في الوزن بشكلٍ أكبر في بنى المُركَّبة منه في بنى المعدنيّة.

نستطيع بعد ذلك بالتأكيد أن نقوم بسيرورة استبدالٍ للموادّ. يمكننا غالباً أن نستبدِلَ مادّةَ إيبوكسي– غرافيت مُعيَّنةً بعضوٍ آخرَ في عائلة الإيبوكسي– غرافيت. يمكننا وبوضوح أن نستبدلِ معدناً ما بمعدنٍ آخر. نستطيع أيضاً استبدالَ مادّةٍ مُركَّبة بمعدن. تُعتمَد جميعُ هذه المقارَبات بهدف تحقيق توفيرٍ في الوزن أو في الكلفة، بالرغم من أنه يمكن أن تُجرى الاستبدالاتُ أيضاً، وذلك لتحقيق وظيفةٍ مُعيَّنة للبنية البنيوية فقط.

يُعَدّ استخدامُ صفيحةٍ طبقيّة على شكل قرص العسل، أي تمتلك نوعاً ما من قلبٍ خفيفِ الوزن يشبه شكلَ قرص العسل في عشّ النحل ويقع داخِل الطبقات الخارجيّة للصفيحة الطبقيّة، طريقةً نموذجيّةً لزيادةِ جساءة الانحناء لبنية بنيوية تترافق مع زيادةٍ طفيفة في الوزن. يعني ذلك أننا نستطيع استعمال صفيحةٍ طبقيّة سميكةٍ جداً – وبالتالي ثقيلة، من أجل أن تقوم بالتشغيل المطلوب، أو أن نحصلَ على معلمات جساءةِ الانحناء نفسِها عبر صفيحةٍ طبقيّة رقائقيّة، لها مجموعتان من الصفائح الطبقيّة الرقيقة، واحدة في الأعلى والأخرى في الأسفل، مع قلبٍ قابلٍ للانفعال بواسطة القصّ ملتصقٍ عند منتصف الصفيحتَين الطبقيّتَين. يمتلك مثل هذا العنصر البنيوي جساءة انحناء عالية جداً. إن الصفيحةَ الطبقيّةَ على شكل قرص العسل هي بالتأكيد أكثرُ سماكةً، ولكنها أخفُّ وزناً من الصفيحةِ الطبقيّةِ أحاديّةِ القوقعة المتساويةِ معها في جساءة الانحناء. نستطيع أيضاً استخدامَ قلوبِ قرص العسل في بنى المعدنيّة، حيث نكون فعلاً قد أَوْجَدْنا شكلاً آخرَ من بنيةٍ مُركَّبة. يوضَع قرصُ العسل غالباً داخل بنى عديدةٍ من الألمنيوم، وبالتالي تكون هذه المقاربةُ مألوفة جداً.

لنقمِ الآن بمراجعةٍ للطرائق المختلفة الستّة المتّبعة من أجل إعادة تشكيل بنى المُركَّبة. بعضُ هذه الطرائق له مماثِل في حالة بنى المعدنيّة، وبعضُها لا. تكون الطريقةُ الأولى، إعادة توجيه الطبقة في الشكل 7–37 مقتصرةً على البنى المُركَّبة. أمّا تغييرُ ترتيب الطبقات، مثل إعادة توجيه الطبقة، فلا يصلح أيضاً إلاّ للبنى البنيوية المُركَّبة، وهو يوفر عدداً لا حصر له من الإمكانات من أجل التحكُّم بالمتانة والجساءة. بسبب القدرات المتأصِّلة في المادّة المُركَّبة التي تتعلّق بقيمتَين عاليتَين لنسبة الجساءة إلى الوزن

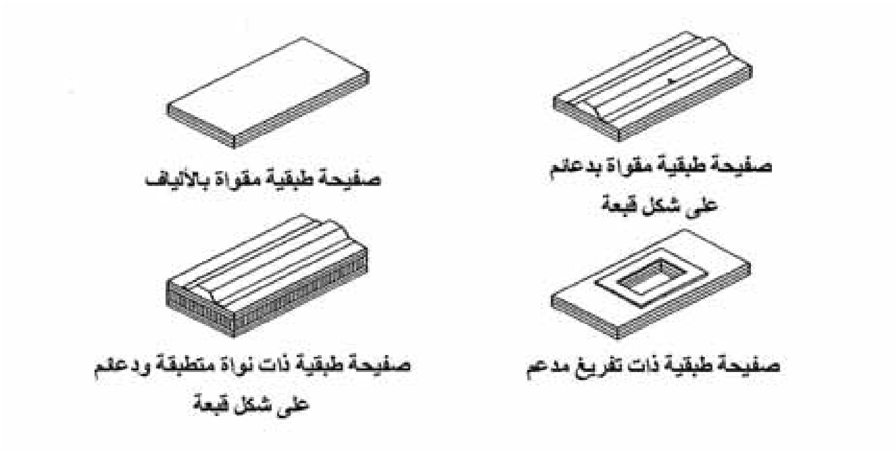
ولنسبة المتانة إلى الوزن، تُعتبَر طريقةُ إضافة طبقاتٍ طريقةً أكثرَ فعاليّةً من أجل إضافة الجساءة المتانة ممّا يمكن فعلُه في حالة المعادِن. يمكننا القيام بتقويةٍ في بنى المُركَّبة بشكلٍ أفضل ممّا في بنى المعدنيّة. ويتمتع استبدال المادة بإمكانيات أكبر بكثير في المواد المركبة المتنوعة منه في المعادن. ومع الصفائح الطبقيّة ذات القلب الشبيه بقرص العسل، يمكننا أن نقومَ بعملٍ أكثر فعاليّةً في المواد المُركَّبة مقارنةً بما نستطيعُ فعلَه في المعادِن. وهكذا، تكون لإعادة تشكيلِ بنية بنيوية ما مجموعةٌ جديدةٌ من الأبعاد في حالة بنية بنيوية مُركَّبة مقارنة بحالة بنية بنيوية معدنيّة.

- إعادة توجيه الطبقات (بدون جزاءٍ على الوزن)
- إعادة ترتيب الطبقات (بدون جزاءٍ على الوزن)
- إضافة طبقات (جزاء على الوزن)
- إضافة مواد داعمة (توفير في الوزن)
- تغيير المادة (توفير في الوزن)
- استعمال صفيحة طبقية ذات قلب على شكل قرص النحل (توفير في الوزن)

الشكل 7–37: إعادة تشكيل بنى المركبة

ما هي أنواعُ التشكيلات الممكنة من أجل بنى المُركَّبة؟ التشكيلُ الأكثر وضوحاً هو الصفيحة الطبقيّة المُقوّاة بالألياف. نستطيع في حالة صفيحةٍ طبقيّة أن نغيِّرَ اتّجاهاتِ رُقاقاتِها، ودالة تنضيدها، وموادَّ رُقاقاتِها للوصول إلى بنيةٍ مناسبة. نستطيع أن نُدعِّم الصفيحةَ الطبقيّةَ، أو نستطيع أن نضعَ قلباً شطيريّاً في منتصف تلك الرّقاقات.

يمكننا القيامُ بجميع هذه الإمكانيّات، مع الإدراك بأنه سوف يوجد، عمليّاً لسببٍ ما، في أيّ بنيةٍ، نوعٌ من الثقوب أو الفراغات. وهكذا ينبغي أن تكون لدينا إجرائيّةٌ لوضع مقدارٍ مناسِبٍ من التدعيم حول هذه تفريغ (cur-out)، بحيث يمكن نقلُ الحمولة حولها. بدون هذا التدعيم، لا تستطيع البنية القيام بعملِها المطلوب. يُبيّن الشكلُ 7–38 هذه التشكيلاتِ المتنوِّعةَ الممكنة.



الشكل 7−38: تشكيلات بنيوية محتملة

6.4.7 خلاصة

تستطيع مفاهيمُ فريدةٌ وغيرُ مألوفة من التدعيم أن تجعلَ بنى المُركَّبة أكثر فعاليّة بكثير من بنى المعدنيّة. قدّمنا بعضاً من مفاهيم التدعيم هذه، ولكن مفاهيمَ أخرى لا تزال قيد التطوير. علينا أن نتطلّع في المستقبل إلى مفاهيمَ تدعيمٍ أكثر ابتكاراً خاصّة ببنى المُركَّبة.

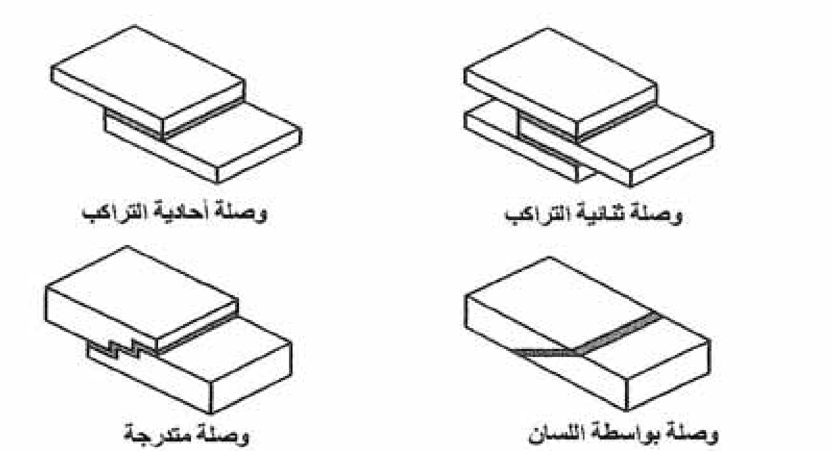
5.7 وصلات الصفائح الطبقيّة

1.5.7 مقدّمة

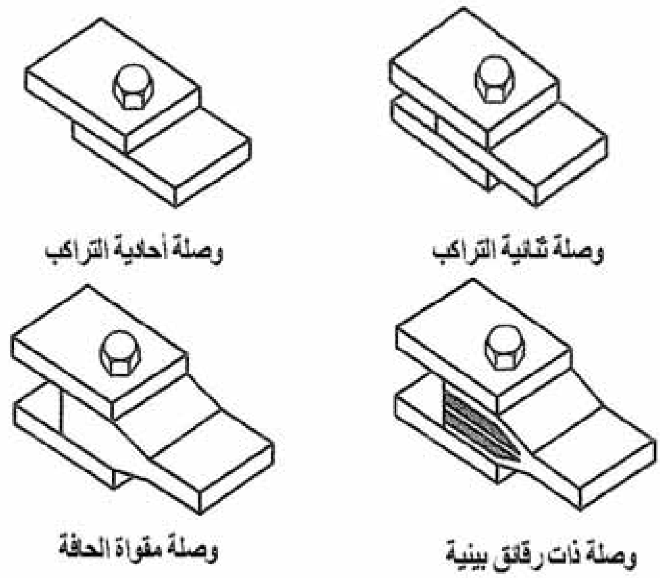
يمكن الوصول إلى قيمٍ عاليةٍ لمعلمات الجساءة والمتانة في الصفائح الطبقيّة المُركَّبة. مع ذلك، تعتبر هذه الخصائص مميزة مختلفةً جداً عنها في الموادّ المألوفة التي نحتاج غالباً أن نثبت عليها صفائح طبقيّة مُركَّبة. على الأغلب، لا يمكن نقلُ كامِل مُميِّزاتِ الجساءة والمتانة للصفيحة الطبقيّة خلال الوصلة بدون جزاءٍ مُعتبَر في الوزن. من أجل ذلك، يُعَدّ موضوعُ الوصلات أو أدوات التثبيت الأخرى حرجاً من أجل الاستعمال الناجح للموادّ المُركَّبة.

يكمن هدفُ هذا الفقرة الفرعية في جعلِ بعض الخصائص المميزة والبنيوي ومسائل وصلات الصفائح الطبقيّة المُركَّبة مألوفةً بالنسبة إلى القارئ. إن التصميمَ الخاصّ للوصلةِ أكثرُ تعقيداً ممّا يستطيع كتابٌ استهلاليّ كهذا عرضَه. تُلخِّص حالة الفن في تصميم وصلات الصفيحة الطبقيّة في دليل التصميم البنيوي من أجل تطبيقات الموادّ المُركَّبة المتقدّمة [7–5]، والكتاب الدليليّ العسكري 17A، والموادّ البلاستيكيّة من أجل مركبات الفضاء والطيران، القسم 1، والموادّ البلاستيكيّة المُقوّاة [7–6]. يمكن أن تجد تطويراتٍ إضافيّةً في الأدبيّات والمراجعات التقانية الموجودة في المرجِعين السابقين.

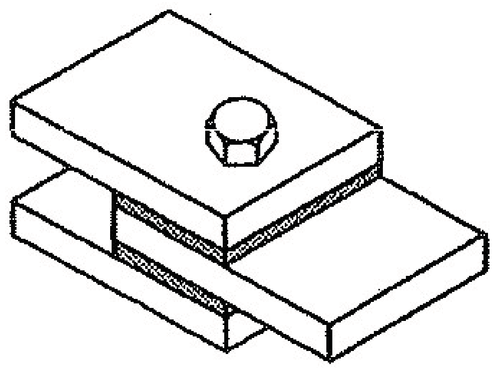
العائلتان الرئيسيتان لوصلات الصفيحة الطبقيّة هما وصلات الالتصاق ،كما في الشكل 7–39، ووصلات البرغي ،كما في الشكل 7–40. وفي الغالِب، تُجمَع هاتان العائلتان كما في وصلة الالتصاق والبرغي في الشكل 7–41، مثلاً. تكون الوصلاتُ ذات الصلة بالموادّ المُركَّبة غالباً وصلات التصاق، بسبب الوجود الطبيعيّ للراتنج في المادّة المُركَّبة، بينما تكون غالباً وصلاتٍ بالبرغي من أجل أسباب، سوف نناقشها لاحقاً. وتجعل مميزاتٌ عديدةٌ للموادّ المُركَّبة المُقوّاة بالألياف أكثر عرضةً لمشاكل الوصلات من المعادن التقليديّة. تتمثّل هذه المميزات بِضَعْف (انخفاض قيمة) القصّ في المستوي، والشدّ العرضانيّ، والقصّ بين الرقاقات، ومتانة التحمُّل بالنسبة إلى المصادر قوّة الرّقاقة النفيسَة: المتانة والجساءة في اتّجاه الألياف.



الشكل 7–39: وصلات ملتصقة



الشكل 7–40: وصلات بواسطة البرغي



الشكل 7–41: وصلة ثنائية التراكب بواسطة الالتصاق والبرغي

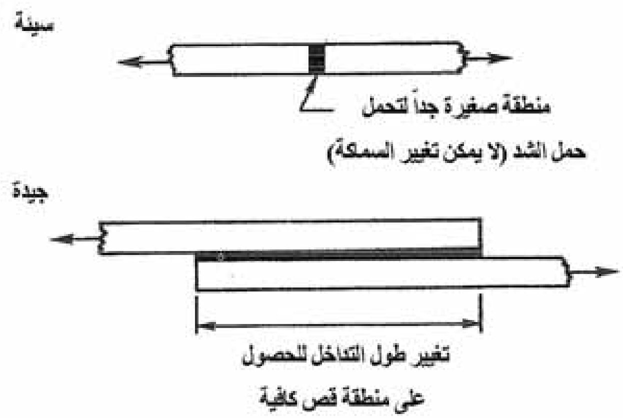
2.5.7 وصلات الالتصاق

درس غولاند (Goland) ورايسنِر (Reissner) الإجهاداتِ في وصلاتِ التصاقٍ أحاديّة التراكُب (single – lap) من أجل حالتَين حديّتَين مهمّتَين: (1) طبقة التصاق رقيقة جداً بحيث لا تساهِم في ليونة الوصلة (الخاصّة العكسيّة للجساءة)، و(2) طبقة التصاق سميكة جداً بحيث تكون المُساهِمَ الأكبرَ في ليونة الوصلة [7–7] (يستشهِد بهذه الورقة التقليديّة تقريباً أيُّ باحِثٍ في مجال وصلات الالتصاق). اعتبر المؤلِّفان إجهاداتِ القصّ والإجهادات الناظميّة في طبقة الالتصاق وكذلك في الصفائح المتّصلة. من أجل الموادّ المُركَّبة المُقوّاة بالألياف، تكون مقاربةُ طبقة الالتصاق السميكة لــغولاند ورايسنِر مناسبةً أكثر من مقاربة طبقة الالتصاق الرقيقة، بسبب وجود راتنج إيبوكسي في المادّة المُركَّبة وبسبب السماكة الفعليّة للرابطة نسبةً إلى القطع المتّصلة، وقد وجدا أنه من أجل صفائح متماثلة المناحي ذات سماكاتٍ متساوية، فإن إجهاد القصّ في طبقة الالتصاق له توزيعٌ منتظمٌ تقريباً، فيما خلا وجود تركيزٍ كبير عند النهاية الطرفيّة للوصلة[1]. تكون قيمُ إجهادِ الرابِط اللاصِق العموديّ على طبقة الالتصاق كبيرةً أيضاً بالقرب من طرف الوصلة، وإن لم تكن بالكِبَر نفسه الموجود في حالة الالتصاق غير الليِّن. حلّل بيرغ (Berg) وصلةَ التصاقٍ ثنائيّةَ التراكُبٍ، واقترح اندخال موادّ وصلةِ التراكُب بينيّاً من أجل إنقاص الإجهادات العالية التي كانت ستحدث ،لولا ذلك، عند نقاط التقاء الطبقات [7–8].

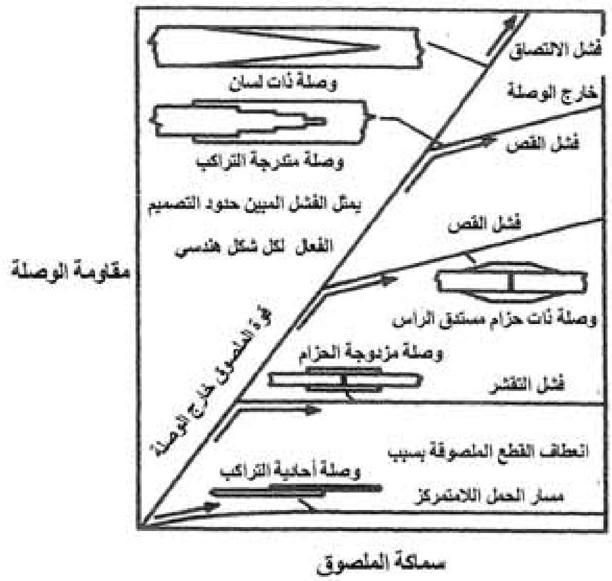
تكمن مسألةُ التصميم البنيوي في وصلات الالتصاق في الحصول على منطقة التصاقٍ كافية تحت القصّ من أجل نقل الحمولة عبر الوصلة. أمّا منطقة الالتصاق تحت الشدّ فهي ذات قيمةٍ صغيرة، بسبب متانة الموادّ اللاصِقة المنخفضةِ عادةً مقارنةً بالمتانة الأعلى بكثير للمعادِن أو للموادّ المُركَّبة التي يتم وصلِها ببعضها البعض. يُبيِّن الشكل 7–42 التبايُنَ بين نوعَي منطقة الالتصاق هذَين. يُوضِّح الشكلُ 7–43 تعميمَ هذه المفاهيم

[1] تقود الهندسةُ وانقطاعاتُ المادّة عند أطراف مادّة الالتصاق في الوصلة أحاديّة التراكُب في الشكل 7–42 بشكلٍ طبيعيّ إلى إجهاداتٍ عالية. يعني ذلك أن مسألةَ المادّة المزدوجة التقليديّة – في مقاربات المرونة المألوفة للمسألة – تؤدّي بالضرورة إلى شذوذاتٍ متفرّدة (إجهادات لا متناهية في الكبر) عند نهاية السطح البيني الواقِع بين الموادّ. وهكذا، ينبغي علينا دوماً ممارسةُ محاكمةٍ عقليّة عميقة عند تفسير نتائج تحليل وصلة الالتصاق.

على أنواعٍ عديدةٍ من الوصلات بالالتصاق، مع أنواع إخفاقها. نجد هنا أن الزيادةَ في سماكات الملصوق لا تؤديّ دوماً إلى وصلةٍ أكثر متانةً!



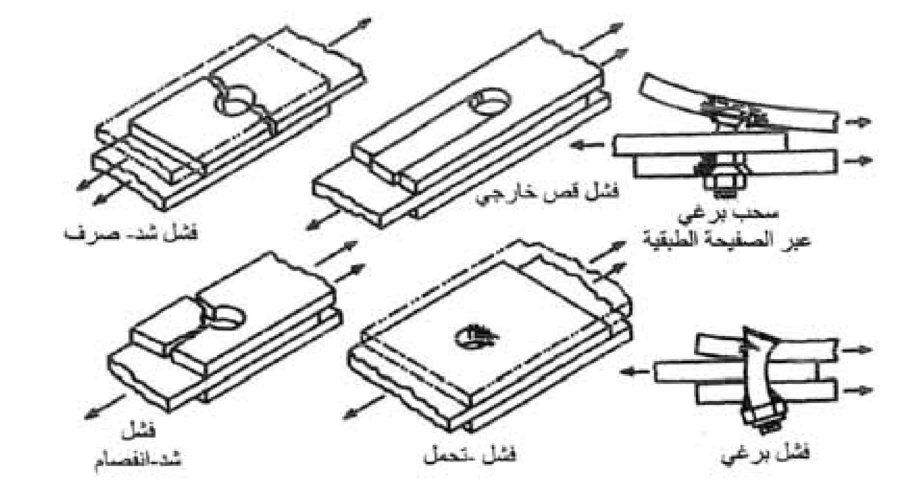
الشكل 7–42: الانتقال الجيد والرديء للحمل في الوصلات الملتصقة



الشكل 7–43: أنواع الوصلات الملتصقة وإخفاقها (إخفاقها) (عن هارت- سميث Hart-Smith [7–9])

3.5.7 الوصلات بالبرغي

أنماطُ الإخفاق الرئيسيّة للوصلات بالبرغي هي: (1) إخفاق تحمُّل المادّة، كما في ثقب البرغي المُطوَّل في الشكل 7–44، (2) إخفاق الشدّ للمادّة في المقطع العرضيّ المُختزَل عبر ثقب البرغي، (3) إخفاق القصّ الخارجيّ أو إخفاق انفصام المادّة (وهو حقيقةً إخفاق شدّ عرضانيّ للمادّة)، و(4) إخفاق البرغي (إخفاق قصّ، بشكل رئيسيّ). ويمكن بالتأكيد حصول دمج لأنواع الإخفاقات هذه.



الجدول 7–44: أنواع إخفاقات وصلة البرغي (عن هارت–سميث Hart-Smith [10–7])

تكمن إحدى طرائق زيادة متانة التحمُّل في استعمال غرزاتٍ (أسافين) معدنيّة كما في الوصلة باستخدام رقاقات بينية في الشكل 7–40. هناك طريقةٌ أخرى تتمثّل في زيادة سماكة مقطعٍ من الصفيحة الطبقيّة، كما في الوصلة ذات الطرف المُقوّى في الشكل 7–40.

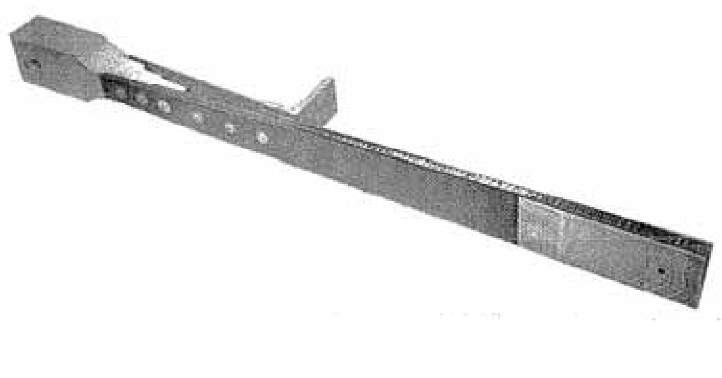
يمكن تجنُّب أنواع إخفاق الشدّ الصافي أو تأجيلُها من خلال زيادة ليونة الوصلة لكي توزع نقلَ الحمولةِ على عدّة خطوطٍ من البراغي. تكون الموادّ المُركَّبةُ عموماً أكثر قصافةً (هشاشة) من المعادن التقليديّة، وبالتالي لا تتمّ إعادةُ توزيع الحمولات بشكلٍ سهلٍ

حول منطقة تركيز الإجهاد، مثل ثقب البرغي. وفي الوقت نفسِه، تقود آثار تأخر القصّ الناتجة من الألياف المتقطعة إلى مسائل تصميمٍ صعبة حول ثقوب البراغي. يكمن الحلّ الممكن في وضعِ مادّة مُركَّبةٍ مُطاوِعة نسبيّاً مثل إيبوكسي–زجاج–S ضمن شريطٍ يبلغ عدّة مرّاتٍ قطرَ البرغي بشكلٍ متراصِفٍ مع صفوف البراغي. تُدعى هذه المقاربةُ باسم مفهوم تليين الشريطة (softening-strip)، وتمّ تناوُلُها في الفقرة 4.6.

4.5.7 الوصلات بالبرغي والالتصاق

يكون أداءُ الوصلاتِ بالبرغي والالتصاق عموماً أفضلَ من أداء كلٍّ من الوصلات بالالتصاق والوصلات بالبرغي. ينجم عن الالتصاق اختزالٌ في النزعةِ الاعتياديّة للوصلة بالبرغي نحو التّحلحُل خارجياً بتأثير القصّ. يُنقِص التثبيتُ بالبرغي إمكانيّةَ فكّ اللاصِق في وصلة الالتصاق وفق نمطِ قصٍّ سطحيٍّ بينيّ. إن النمطَ المألوف لإخفاق وصلةِ البرغي والالتصاق هو إمّا إخفاق شدّ عبر مقطعٍ يحوي مُثبِّتاً أو إخفاق قصٍّ بين الرّقاقات في المادّة المُركَّبة، أو دمج النوعَين كليهما.

تُظهر وصلات البرغي والالتصاق توزيعاً جيّداً للحمولة، وتُصمَّم عادةً بحيث تأخذ البراغي جميع الحمولات. بعد ذلك، تأخذ البراغي الحمولةَ الإجماليّة بعد كسر اللاصِق (لأن البراغي لا تتلقى الحمولةَ إلى أن يزولَ اللاصِق). يوفر اللاصِقُ للوصلةَ تغييراً في نمط الإخفاق وهامشاً مُعتبَراً ضدّ إخفاق التعب.



الشكل 7-45: وصلة البرغي والالتصاق المعقدة (عن شركة Vought Systems Division, LTV Aerospace Corporation)

يُبيّن الشكل 7–45 مثالاً على وصلةٍ البرغي والالتصاق المُعقّدة التي تُستعمَل في عارضة صندوقِ جناحِ طائرةٍ قابلٍ للثني. تلتصق هنا بنيةٌ بنيويةٌ أساسيّةٌ لطبقاتٍ من غرافيت–إيبوكسي وبورون– إيبوكسي متوضّعة فوق قرص عسلٍ بقطعةٍ مطّرقةٍ (forging) من الألمنيوم. يتمّ استبدالُ غرافيت– إيبوكسي بقرص العسل بشكلٍ تدريجيّ عندما نقترب من الوصلة انطلاقاً من جهة الجناح (يمين الشكل 7–45). بعد ذلك، يتمّ تدريجياً إدخال حزمٍ من التيتانيوم من أجل زيادة متانة تحمُّل الوصلة. أخيراً، يتمّ تنصيبُ المادّة المُركَّبة من مجموع غرافيت–إيبوكسي وتيتانيوم ووضعها على شكل درجاتِ سلّمٍ فوق قطعةٍ مطرّقةٍ من الألمنيوم شبيهة بشجرة عيد الميلاد. تلتصق حزمُ التيتانيوم بالغرافيت– إيبوكسي بواسطة غشاءٍ لاصِق، بينما يلتصق الغرافيت–إيبوكسي بقطعة الألمنيوم المطرّقة بواسطة معجونةٍ لاصِقة. يتمّ بعدها تثبيتُ كامل الوصلة بواسطة البراغي.

5.5.7 خلاصة

عرضنا بإيجاز مقدّمةً إلى الوصلات بالالتصاق والوصلات بالبرغي والوصلات برغي – التصاق. يمكن الحصول على معلوماتٍ إضافيّة عن التصميم وعن الأداء في كتاب **وصلُ الموادّ البلاستيكيّة المُقوّاة بالألياف** الذي حرّره ماتيوس (F. L. Mathews) [7–11] ويحتوي على فصولٍ كتبها عددٌ من المؤلّفين، بما فيها فصلان عن التصميم كتبهما هارت سميث (L. J. Hart-Smith).

6.7 متطلّبات التصميم ومعايير إخفاق التصميم

1.6.7 مقدّمة

إن صياغة وإقامةَ معاييرَ مناسبةٍ لإخفاق التصميم لهو مهمّة صعبة، ولكنها أساسيّة في سيرورة التصميم. إن مفهومَ معايير إخفاق التصميم أعقدُ وأصعبُ بكثير من مجرّد قضيّة إخفاق عامّ لرُقاقة أو حتى إخفاق عامّ لصفيحة طبقيّة، كما يتناولُها التحليلُ التقليديّ للموادّ المُركَّبة. وهكذا لا يعني مُصطلَح "معايير إخفاق التصميم" تطبيقَ معيار

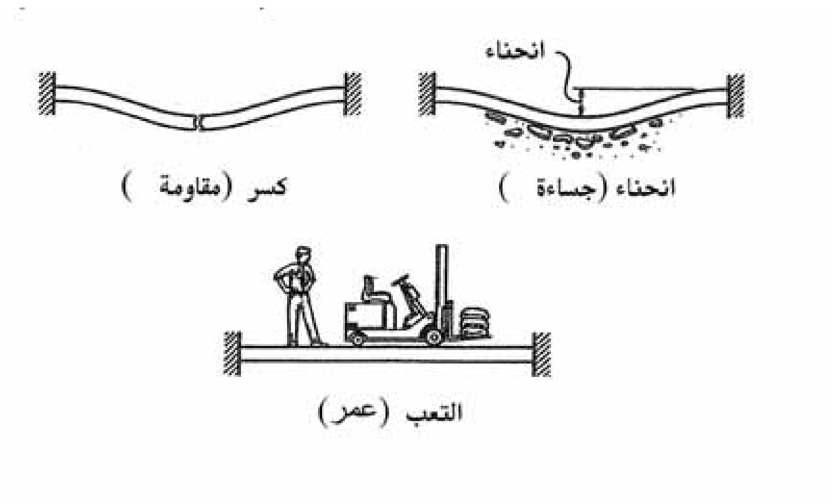
إخفاق تساي–هيل أو معيار إخفاق هوفمان أو أيّ شيءٍ آخر يُشبههما من أجل رُقاقةٍ واحدة. إن صياغة وإقامة معايير إخفاق التصميم قضيّةٌ أعقد بكثير من صياغة وإقامة معايير إخفاق الرُّقاقة، لأنه ينبغي علينا التساؤل حول كيفية إخفاق البنية نفسها؟ ماذا يعني الإخفاق في سياق ذلك التصميم المحدد؟ يعني الإخفاق ببساطة أن البنية لا تستطيع تحقيق بعض متطلّبات التصميم. إذاً، كلُّ ما يعنيه الإخفاق حقيقةً هو أننا صمّمنا بنيةً بنيوية أو عنصراً ما للقيام بعملٍ مُعيَّن، وأن هذه البنية لا تقدر على فعل هذا التشغيل. من الواضِح أننا لا نذكر أيَّ شيءٍ هنا عن تكسّر البنية أو عن سقوطِها. يعني ذلك أن الإخفاق يحمل معانٍ أبعدِ بكثير من مجرّد الكسر.

2.6.7 متطلّبات التصميم

متطلّباتُ التصميم هي ببساطة مجموعةُ إعلاناتٍ عمّا نطلب من البنية قيد التصميم فعلَه. ما هو أداؤُها المنشود؟ يمكن التعبير عن هذه المتطلّبات بدلالة استجابةٍ بنيوية أو بشكلٍ بديل بدلالة أداء النظام.

لنعتبر مثالاً يتضمّن عدّة متطلّبات تصميم. إن الشيء الأهمّ الذي نريده من عارضةٍ فوق السقف هو أن يقدِرَ على حمل السقف بحيث لا يسقط فوق رؤوسنا. إن هذا المُتطلَّبَ هو قضيّةٌ تتعلّق بالمتانة. لا نرغب أيضاً بأن تنحرف عارضة السقف بمقدارٍ كبير، والانحراف قضيّةٌ تتعلّق بالجساءة. إحدى المشاكِل المتعلّقة بإنحناء عارضة السقف بمقدارٍ كبير، عدا عن كونه بجلاءٍ منظراً بشعاً – هي تحطُّم وتصدُّع جبسِ السقف – في حال كان الأخيرُ مصنوعاً من جبسٍ، كما في الشكل 7–46. إذا كنتَ تدفع من أجل شراء بناءٍ، فبالتأكيد لن ترغبَ بجبسٍ متصدِّعٍ فيه، وبالتالي يوجد مُتطلَّبُ جساءةٍ هنا. هناك أيضاً متطلَّبُ جساءةٍ لأننا لا نريد للناس القاطنين في البناء أن يشعروا بأن الأرضيّةَ فوقَهم ترتخي بشكلٍ كبيرٍ يدعوهم إلى الخوف والذّعر. وهكذا، نواجه هنا قضيّتَين اثنتَين واضحتَين تماماً، ألا وهما قضيّتا المتانة والجساءة. هناك قضيّةٌ أخرى تكمن في وجوبِ تحمُّل عارضة السقف لأيّ حمولاتٍ مُطبَّقة عليه خلال فترة حياة البنية، مثل حمولات الثلج المتناوبة، أو السير الكثير عليه، أو تحريك التجهيزات فوقَه، أو أيّ حمولةٍ أخرى. تُشكِّل مجموعةُ هذه الظروف قضيّةً تتعلّق بفترة الحياةِ. وهكذا، حدّدنا هويّةَ ثلاث قضايا بنيوية مختلفة في تصميم عارضة سقفٍ، ألا وهي المتانة، والجساءة، وفترة الحياة. إن

إخفاق العارضة ليس إخفاقاً من مجرّد وجهة نظر التكسر، بالرغم من أن وجهة النظر هذه تُشكِّل جوهرَ القضيّة الأولى، أي المتانة. تأتي بعد مدعاة القلق التبسيطيّة هذه قضايا أخرى ذاتُ شأن تنبغي معالجتُها، وأهمّها الجساءة وفترة الحياة في حال اقتصرنا على إيراد قضيّتَين من هذه القضايا.



الشكل 7–46: متطلبات تصميم عارضة السقف

نستطيع أن نقوم بهذا النوع نفسِه من تحليل المسائل من أجل بنى مختلفة عديدة، ويمكن التعبير، خلال هذه السيرورة، عن متطلّبات التصميم لكلٍّ منها. سوف يتمّ التعبيرُ بشكلٍ ما عن أكثر متطلّبات التصميم شيوعاً بدلالة المتانة، والجساءة، وفترة الحياة، ولكن هناك أيضاً قضايا عديدة أخرى. على سبيل المثال، يجب التساؤل عن احتمال تآكُل المادّة، أو فيما إذا كانت ستوفر العزل المناسِب أو العكس تماماً، وهل ستؤمِّن ناقليّةً كافيةً أم لا، وهلمّ جرّا. هناك العديد من أنواع المهامّ المختلفة التي نرغب أن تؤدّيها البنية.

للإخفاق معانٍ وتفسيرات عديدة في سياق سيرورة التصميم البنيوي. يتمثّل المعنى الرئيسيّ في أن الإخفاق هو عجزُ البنية عن القيام بمتطلّبات تصميمها. يمكن التعبير عن هذه المتطلّبات بشكلٍ تبسيطيّ بدلالة الطرائق الوظيفيّة التالية:

(1) المتانة: للمادّة قيم حدّيّة للإجهاد أو للانفعال لا يمكن تجاوُزُها بدون حدوث كسرٍ.

(2) الجساءة: سوف تُصمَّم البنية بحيث تنفعل بمقدارٍ معيَّن، أو ربّما تقتصرُ على انفعالاتٍ محدودة مُعيّنة دون أن تهتزّ بشكلٍ كبير أو أن تتبعج.

(3) فترة الحياة: يمكن للبنية أن تمتلك فترة حياةٍ مُعيَّنة.

(4) الطاقة: على البنية ربّما أن تمتصّ مقاديرَ مُحدَّدة من الطاقة وتحافِظ مع ذلك على وظيفتِها.

(5) الوزن: يتوجّب على وزن البنية على الأرجح أن يكون أقلّ من مقدارٍ مُحدَّد، لكي يكون التشكيلُ تصميماً قابلاً للتحقيق.

(6) الكلفة: ينبغي على كلفة البنية أن تقلّ عن مقدارٍ مُحدَّد، وإلاّ توجّبت إعادةُ تصميم التشكيل الذي يعمل بشكلٍ جيّد فيما يخصّ جميع النقاط الأخرى.

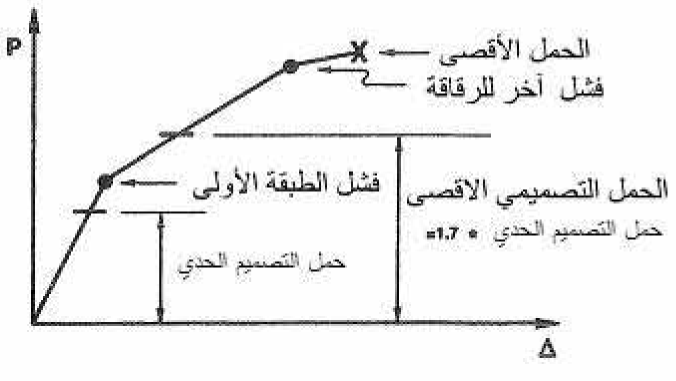
(7) التصنيع: إذا لم يكن بالإمكان بناء البنية، فإن التشكيلَ غيرُ مقبول.

إذا لم يكن ممكناً تحقيقُ معاييرِ التصميم هذه أو أي معايير تصميمٍ أخرى مُحدّدة، فعندها نعتبر التصميمَ إخفاقاً، ويجب إعادة تصميم البنية لتحقيق المتطلبات. وهكذا، يكون التصميمُ سيرورةً تكراريّةً مقرونةً بالتحليل ونشاطات الاختبار من أجل تقييم نجاح أو إخفاق بنية مُركَّبة. ينبغي على جميع نشاطات التصميم أن يرافقَها برنامجُ تقييم للتحقق من كلٍّ الأهداف ومن مدى التقدُّم في طريق تحقيق هذه الأهداف. وفقاً لذلك، ينبغي أن يكون كلٌّ من الأهداف أو من معايير التصميم قابلاً للتعريف بشكلٍ واضِح، وقابلاً للقياس بشكلٍ سهل، وإلاّ فإنها ستكون مُبهمةً وغيرَ قابلةٍ للاستعمال في سيرورة التصميم.

3.6.7 تعاريف حمولة التصميم

هناك في مجال الطائرات ،وأيضاً في المركبات الفضائيّة، بعض التعاريف الشائعة لحمولة التصميم. حمولة التصميم الحدّيّة هي أكبر حمولةٍ مُتوقَّعةٍ على عنصرٍ بنيوي خلال فترة خدمته العاديّة. وهكذا، تشمل حمولةُ التصميم الحدّيّة كلَّ ما يمكن ملاقاتُه من مناوراتٍ عنيفة وحمولاتِ جناحٍ عالية في رياحٍ عاصِفةٍ خلال عاصفةٍ رعديّةٍ قاسيةٍ فوق ولاية تكساس على سبيل المثال. تكون حمولاتُ غالبيّةِ رحلات الطيران طبعاً أقلّ بكثير من حمولة التصميم الحدّيّة. أمّا حمولة التصميم القصوى فهي أكبر من حمولة التصميم الحدّيّة بعاملٍ أكبر من الواحِد. يعتمد هذا العامِل على نوع الإخفاق (حميداً كان

أم كارثيّاً)، وعلى نوع الاستعمال (بنى مأهولة أم غير مأهولة)، وعلى كون اختبارات الحمولة البنيوية قد تمّ إجراؤها فعلاً أم لا من أجل التحقُّق من التصميم. من الواضِح أن هذا العامِل يجب أن يكون أكبرَ من أجل عنصرٍ بنيوي يخفق بطريقةٍ كارثيّة، ويُستعمَل من أجل بنية مأهولة، ولم يتمّ اختبارُ حمولتِه قبل الاستعمال. من ناحيةٍ أخرى، يمكن لهذا العامِل أن يكون منخفضاً من أجل عنصرٍ بنيوي يخفق بشكلٍ حميدٍ، ويُستخدَم في بنية غير مأهولة، وتمّ اختبارُ الحمولةِ عليه قبل الاستعمال. بالتأكيد، لا تُشكِّل أيّ مجموعةٍ من هاتَين المجموعتَين من الظروف تصميماً مسؤولاً! بما أن عامِلَ الضرب كيفيٌّ، فإن قيمةَ حمولة الإخفاق الفعليّة قد تتجاوز وبكثير حمولةَ التصميم القصوى. لسوء الحظّ، يرجع بعضُ المهندسين إلى حمولة التصميم النهائيّة على أنها "الحمولة القصوى". من المؤكد أن استخدامَ مُصطلَحِ "الحمولة القصوى" مناسِبٌ فقط من أجل الحمولة التي يخفق العنصر البنيوي فعلاً عندها، أي عندما يخضع للحمولة القصوى. يعرض الشكلُ 7–47 في سياق منحني الحمولة – الانحراف حمولتَي التصميم الحرجتَين هاتَين. لاحظ أنه من الممكن ألاّ يُسمَح لحمولة الإخفاق للرقاقة الأولى بأن تكون أقل من حمولة التصميم الحدّيّة. علاوةً على ذلك، يمكن أن يتمّ تطبيق حمولة التصميم الحدّيّة بشكلٍ دوريّ، وهذا سببٌ مهمّ آخَر لكي نتجنَّب إخفاق الرُّقاقة الأولى في بيئةِ حمولةٍ دوريّة.



الشكل 7–47: حمولات التصميم الحرجة

4.6.7 خلاصة

ناقشنا أمثلةً على متطلّبات التصميم باستعمال مصطلحاتٍ عامّة، والقضية البنيوي التي تم التركيز عليها هي أن المتانة ليست القضية الوحيدة. تتضمّن متطلّباتُ التصميم أموراً أكثر بكثير من مجرّد كون المنتج ذي متانة كافية أم لا من أجل تجنُّب الكسر. ينبغي علينا الذهابُ أبعدَ من وجهة النظر تلك المفرِطةِ في التبسيط لكي نعالجَ قضايا تتعلّق بالجساءة، وفترة الحياة، والتآكُل، والنفوذيّة، إلخ.

يصدم مجال معايير إخفاق التصميم نجاحَ التصميم، ويُعَدّ قياساً كمّيّاً له. من الناحيّة البنيوية، إن معايير إخفاق التصميم هي إعلانٌ عن متطلّبات التصميم. إن الطريقةَ التي يخفق بها الرُّقاقات المنفردة والصفائح الطبقيّة على السواء ليست إلاّ جزءاً من معايير إخفاق التصميم. يُشكِّل إخفاق الرُّقاقات والصفائحُ الطبقيّة – كما في الفصلَين الثاني والرابع– جزءاً أساسيّاً من معايير الإخفاق المتعلّقة بالمتانة، ولكن أنواعَ الإخفاق هذه هي أيضاً عوامِلُ مُقرِّرة في معايير الإخفاق المتعلّقة بالجساءة.

7.7 مفاهيم الأمْثَلة (توخّي الأفضل)

1.7.7 مقدّمة

يكمن الهدف الأساسيُّ للتصميم في تحقيق أفضل تشكيلٍ بنيوي يقوم بالتشغيل المطلوب. يقتضي مفهومُ "الأفضل" توفُّرَ قياسٍ لجودة التصميم. على سبيل المثال، يُنظَر في بنى الطائرات غالباً إلى التصميم ذي الوزن الأصغريّ على أنّه التصميم "الأفضل"، نظراً إلى الانعكاسات الإيجابيّة للوزن الخفيف على المدى، والفعاليّة الاقتصاديّة، والأداء. من أجل البنى الأخرى، يمكن الحكمُ على التصميم ذي التكلفة الأقلّ بأنه التصميمُ "الأفضل". لا تكون الإجابةُ وحيدةً عن أيّ مسألة تصميم، وبالتالي لا بدّ من إقامة نوعٍ من الطرائق من أجل تعريف وتحديد "أفضل" التشكيلات. تُعَدّ المتطلّباتُ الوظيفيّة للمتانة، والجساءة، وفترة الحياة (العمر)، كما نوقشت في الفقرة 6.7، الأساسَ في تعريف "أفضل" تشكيلٍ. الأمْثَلةُ (Optimization) هي نوعاً ما الإجرائيّةُ الرياضية التي يمكن الحصولُ بواسطتها على هذا التشكيل "الأفضل" بطريقةٍ مباشرة، ومنطقيّة. في هذه الفقرة، سوف نتفحّص أوّلاً بعضَ المفاهيم البنيوي للأمْثَلة، كما في الشكل 7–48. سوف نتناول بعد

ذلك تحليلَ وأمْثَلةَ المتانة، التي تُمثِّل واحدةً من مجالات الاستجابة البنيوية الرئيسيّة الخمسة، أي الجساءة، والمتانة، والانبعاج، والاهتزاز، والتوقع بفترة الحياة (العمر). يمكن إجراءُ التحليل والأمْثَلة من أجل ظواهِرَ استجابةٍ بنيوية أخرى إذا كانت العلاقاتُ الميكانيكيّة بين هذه الظواهِر والتشكيلات البنيوية متوفِّرةً. سوف نستقصي بعد ذلك مفاهيمَ الصفيحة الطبقيّة اللامتغيِّرة التي يمكن استخدامُها في التصميم. وأخيراً، سوف نعتبر قضايا عديدةً تكون حاسمةً في تصميم الصفيحة الطبقيّة.

- أساسيات الأمثلة
- التحليل و الأمثلة
- مفاهيم الصفيحة الطبقية اللامتغيرة
- تصميم الصفائح الطبقية

الشكل 7–48: عناصر مفاهيم الأمثلة

2.7.7 أساسيّات الأمْثَلة

يمكن تنويعُ المعاييرِ المستعمَلة في أيّ نوعٍ من خطط الأمْثَلة. تعتمد هذه المعايير على ماهيّة الشيء الأكثرَ أهمّيّةً في بنيتك. هل تحتاج لبنية ينبغي عليها أن تكون بوزنٍ أصغريّ؟ إذا كان ذلك هدفك الأوّل، فعندها يكون الوزنُ الأصغريّ الخاصيّةَ المميزة للبنية البنيوية التي سوف تُجري الأمْثَلةَ عليها. من الممكن أن يكونَ تصميمُ بنية حسّاسةٍ للوزن أكثرَ مسائل الأمْثَلة البنيوية شيوعاً في مجال الفضاء والطيران. تُعَدّ الكلفةُ أيضاً معياراً مناسِباً من أجل بعض مسائل الأمْثَلة، سواء أكانت الكلفةُ كلفةَ ابتدائيّةَ أم كلفةَ دورة الحياة. تنشُد أحياناً المدى الأطول أو السرعةَ الأكبر، إذا كنت تُصمِّم طائرةً عالية الأداءِ. أو تتمثّل إمكانيّةٌ أخرى في الحياة (العمر) الأطول لقمر صنعيّ. تُعَدّ هذه العوامِلُ جميعاً معاييرَ أمْثَلةٍ صالحةً تُدعى عادةً باسم توابع الاستحقاق أو دالات الهدف. قد ترغب بأمْثَلةِ أكثر من دالة استحقاقٍ واحِدٍ في الوقت نفسِه. لا تستطيع أن تتوقّع أنّ كُلاًّ من دالتي استحقاق يحتاج أن يكون أعظمياً (أو أصغرياً، إذا كان ذلك ملائماً) بالمعنى المُطلَق. مع ذلك، من الممكن تعظيمُ دالتي استحقاق بالمعنى الموافِق لإمكانيّة قَسْرِ كلٍّ منهما ليبلغ قيمةً

أمثليّةً تقريبيّة. عندما يتم تناول أكثرَ من دالة استحقاقٍ واحدٍ، فإن ذلك يُشكِّل مسألةً رياضيّةً مُعقّدةً جداً.

1.2.7.7 الأمْثَلة البنيوية

تعالوا نحاوِل تعريفَ مسألة الأمثَلة البنيوية ضمن سياق عمليّ. من أجل فِعْل ذلك، لا بدّ من التشغيل على إيجادِ تعريفٍ كامِلٍ عبر تفحُّص متتاليةٍ من تعاريفَ مُفيدة أقلّ شأناً.

أوّلاً، علينا أن ندركَ وجودَ العديد من المتغيرات في أيّ تصميمٍ بنيوي. نستطيع أن نقيم لائحةً بالمتغيرات البنيوية، مثل الأبعاد، وأطوال المنتجات، والموادّ، وتوجهات الرُّقاقات، وهلمّ جرّا. ويكون لجميع هذه المتغيرات تأثيرٌ، تماماً كما يؤثِّر طولُ العمود، وعزمُ العطالة، ومعامِلُ يونغ في حمولة انبعاج العمود. سوف نرمز إلى لائحة متغيرات التصميم الكاملة بالمتجه $\overline{x}_i$ الذي يتمتع بـ N مُركّبة. تؤلِّف هذه اللائحةُ تعريفَ التشكيل البنيوي.

نسأل بعد ذلك: ما هو سلوك (كيف تعمل) هذه البنية؟ تنحني البنية وتمتلك إجهاداتٌ، وحمولاتُ انبعاجٍ، وترددات اهتزازيّةٌ، وتُعَدّ هذه المميزات الاستجابيّةُ تقديراتٍ عن الأداء البنيوي. يمكن تمثيلُ هذا السلوك بدالةٍ آخرى، ولنسمِّها C_{ij}− لمتغيرات التصميم، أي $C_{ij}(x_j)$. إن هذه الرمزيّةَ، أو الترميزَ، في الحقيقةِ، معادلةٌ نكتبُها بطريقةٍ ما، ويمكن لها أن تكون سهلةً مثل معادلة أولر لحمولة الانبعاج من أجل عمود. تكون حمولةُ أولِر للانبعاج في هذه الحالة قيمةَ C_{ij}. تحتوي معادلة أولِر لحمولة الانبعاج على الطول، ومعامِل يونغ، وعزم العطالة، كمتغيرّات تصميم.

بعد ذلك، ينبغي فرضُ بعض الشروط أو القيود على المسألة. على سبيل المثال، نطلب من متانة المنتج المُصمَّم أن تكون أكبرَ من مقدارٍ مُعيَّن من الحمولة، لأننا نريد للمنتج قيد التصميم أن يحملَ ذاك المقدارَ من الحمولة بشكلٍ آمِن. قد تُشكِّل تسميةُ هذه المتانة الأصغريّة بقيدٍ فلسفةً مختلفةً عمّا اعتدتَه. لننظر إلى القيد على أنه مجرّدُ مُتطلّبٍ تصميميّ. ارجعْ إلى معايير الإخفاق في الفقرة 6.7، لترى أن بعض متطلّبات التصميم

موجودةٌ ويمكن التعبير عنها بدلالة معادلةِ قيدٍ رياضيّة، أي أن $X < \sigma_{1_{max}}$ التي تنص على أن الإجهاد الأعظميّ المسموح به في اتّجاه الليف ينبغي أن يكون أصغرَ من المتانة في هذا الاتّجاه. على سبيل المثال، ينبغي على الاستجابة أن تكون أكبرَ من الصفر في نمطِ استجابةٍ مُعيَّن. يعني ذلك أن المقدرةَ الحقيقيّةَ على تحمُّل الحمولة منقوصةٌ منها المقدرةُ المنشودة لتحمُّل الحمولة يجب أن يكون أكبرَ من الصفر. يمكن دوماً أن نُحوِّل المعادلةَ إلى متراجحةٍ حيث الصفر على أحد جانبَيها، بواسطة طرح ثابتٍ ببساطة. هذا الثابتُ هو مُتطلَّبُ حمولة التصميم الذي يحوي عامِلَ أمانٍ. أو كمثال آخر، لا بدّ من وجودِ تودد تحريضيّ مُعيَّن للمنتج المُصمَّم، وعلينا التأكُّد أن جميع الترددات الطبيعيّة تقع فوق (أو تحت) هذا التردّد المُعيَّن بحيث نتجنَّب وضعَ الرنين. وهكذا، نكتب ببساطةٍ معادلةً لتقدير التردد، ثمّ نطرح منها تردد الدفع، ونقول إن النتيجةَ ينبغي أن تكون أكبر (أو أقلّ) من الصفر. وهكذا، عندما تُحقِّق البنية هذا القيدَ، يكون مُتطلَّب التردد قد تحقّق، أيّ أن البنية لن توجد في وضع الرنين.

وأخيراً، ينبغي أن نتناول دالة استحقاقٍ ما M تكون دالة لمتغيرات التصميم، أي $M(x_i)$. إذا كانت دالة الاستحقاقِ أو الهدفِ هذا هو الوزن البنيوي المزمع تصغيره، فإن المعادلةَ التي تُعبِّر عن وزن البنية هي دالة ما لمتغيرات تصميمِها. ما ينبغي علينا فعلُه هو استعمالُ جميعِ الأبعاد من أجل حساب حجومِ الأقسامِ المتنوِّعة للبنية وضربِها بالكثافات المناسِبة للحصول على الوزن. نقوم بعد ذلك بتصغير الوزن (أي البحث عن قيمتِه الأصغريّة). أو يمكننا البحثَ عن دالة استحقاق آخر غير الوزن، كأن يكون مثلاً مدى الطائرة.

لقد قدّمنا لك في الفقرات القليلة الماضيّة مجموعةً من المعادلات والتعاريف. يعني وضعُ مجمل هذه المعادلات والتعاريف معاً أن نقول ببساطة إن مسألةَ الأمثَلة البنيوية هي مسألة إيجادِ القيمة الأصغريّة لدالة ذي N متغير تصميمٍ، خاضعٍ لقيودِ متراجحاتٍ. لو بدأتُ بهذه المقولة كجملةٍ تعريفيّة للمسألة، لشعرت ربّما بعدم الرّاحة بسبب استعمال العديد من المُصطلحات غير المُعرَّفة. مع ذلك، عندما نُفكِّك الجملةَ من خلال التعاريف السابقة، يظهرُ تفسيرٌ وشرحٌ مباشَر لمسألة الأمْثَلة التصميميّة. نستطيع وضعَ متغيرات التصميم المُستخدَمة للتعبير عن وزن البنية في شكلٍ آخر يساعِدنا في

تقييم السلوك ومقارنته بمتطلّبـــات التصميم. متى ما وضعنا جميعَ هذه الخطواتِ معاً من أجل البنية ذات الوزن الأصغريّ، فإننا نكون قد أجبنا عن مسألة التصميم المطروحة علينا.

يعتبر التركيب البنيويّ أو الأمْثَلة طريقةً لحلٍّ مباشر ومنطقي للمسألة التي عبّرنا عنها للتوّ – أي مسألة إيجاد القيمة الأصغريّة لدالة خاضعة لقيودٍ على شكل متراجحات. يعني تعبيرُ "حلّ المسألة بشكلٍ مباشر ومنطقيّ" استخدامَ الرياضيّات. يمكن إجراءُ التصميم بطريقتَين مختلفتَين. الطريقة الأولى التي نُقارِب بها التصميمَ بطريقةٍ منطقيّة عقلانيّة، حيث تكون لدينا معادلاتٌ عن الأداء، فنقوم بمقارنة الأداء الفعليّ بالمتطلّبات، ثمّ نُجري عمليات تفصيل مناسبةً للتصميم حتى يحقِّقَ الأداءُ جميعَ المتطلّباتِ. الطريقةُ الأخرى في التصميم هي أن نضعَ شيئاً ما على الورق، أي أن نختارَ تصميماً على سبيل الاختبار بطريقةٍ ما، ثمّ نقوم بإجراء تقديراتٍ من أجل تقييم الأداء. إذا قام التشكيلُ البنيوي المُختار بالتشغيل المطلوب، أي إذا حقّق متطلّباتِ التصميم، فعندها يكون هو التصميمَ المنشود. المقاربةُ الأخيرةُ ليست سيرورة أمْثَلةٍ، ما لم نكرِّرْ ذاك التصميمَ من أجل محاولة الإجابة عن السؤال: هل يمكننا القيامُ ببعض التغييرات في متغير تصميمٍ تقودنا إلى بنية بنيوية ذات وزنٍ أخفّ، أو إلى بنية أكبرُ سرعة في حالة كانت السرعة هي القضيةُ الحكم، أو أيّ شيءٍ من هذا القبيل؟ ولكن إذا كنّا فقط نرسمُ تصميماتٍ على الورق ونقوم بتقييمها، فهذا ليس حّلاً مباشراً وعقلانيّاً. تكمن هذه المقاربةُ إذاً في مجرّد تجريب العديد من الحلول ورؤيةِ فيما إذا كان أحدُها أفضلَ من جميع الحلول الأخرى بالصدفة. لا تُحقِّق هذه المقاربةُ أيّاً من التعاريف المنطقيّة للتصميم، لأنها تنصّ – عن قصد– على تفحُّصِ عددٍ محدودٍ من التصاميم الممكنة. من الواضِح أن التصميمَ الأمثليّ الحقيقيّ قد لا يقع ضمن هذه المجموعة المحدودة من الحلول الممكنة. ومع ذلك، تبقى هذه المقاربةُ الثانية بالتفصيل المقاربةَ الأكثر شيوعاً في الصناعة اليوم.

توجد مقارباتٌ منطقيّة متنوّعة للتصميم. يمكننا أن نقومَ بما يُعَدّ فعلاً مقاربةَ القوّة العمياء (brute-force) التي لا تُمثِّل مقاربةً جيّدةً فعلاً، ولكنّ هناك طريقةً تجعلُها مقاربةً عقلانيّةً نوعاً ما. يعني ذلك أننا نستطيع أن نختبرَ جميعَ الحلول الممكنة من أجل مسائل معيَّنة. يمكننا أحياناً تعريفُ جميع الحلول، ثم نقوم باصطفاء الحلّ "الأفضل".

نعرف عند ذلك أننا قد حصلنا على التصميم الأمثليّ لأننا تفحّصنا جميعَ التصاميم الممكنة. سوف ندرس حالةً حيث تكون مقاربةُ القوّة العمياء ممكنةً، بل وحتى مُفيدةً. من الواضِح أن هناك حالاتٍ أخرى موجودةً لا يمكننا فيها حتّى أن نتخيّل إمكانيّةَ معرفةِ جميع الحلول. على سبيل المثال، إذا أردنا تصميمَ طائرةٍ تسع لـــ 150 مسافراً تطير من نيويورك إلى لوس أنجلس. ندرك هنا أنه لدينا عددٌ لا نهائيّ من الحلول، وأننا لا نستطيع أبداً اختبارَ جميع هذه الحلول. أمّا لو كنّا نرغب صفيحةً طبقيّة تحمل حمولةً مُعيَّنةً، فإن هناك عدداً منتهياً من الحلول لهذه المسألة (شريطةَ أن نتجاهَل وضوحاً الصفائحَ الطبقيّة غير المناسبة، كأن تكون مثلاً أكبر سماكة من الضروريّ)، ويمكننا في الحقيقة اختبارُها جميعاً. تتضمّن مقارباتُ أمْثَلةٍ أكثرُ منطقيّةً إجرائيّاتٍ رياضيّةً أكثرَ دقّةً، مثل تقانيات مونتي كارلو، أو البرمجة الديناميكيّة، أو البرمجة اللاخطّيّة. وتظهر بعضُ القضايا فائقة التعقيد عند استخدام مثل هذه التقانانيات من أجل بنى.

يكون عددُ متغيرات التصميم من أجل بنى، وخاصّة بنى المُركَّبة، كبيراً جداً، وينبغي علينا أيضاً القيامُ بعددٍ كبير من تقييمات الاستجابة. وهكذا فإننا نضغط بقوّة وبشكلٍ آليّ هنا ضد حدود قدرات حواسيبنا. في الحقيقة، نتجاوز مقدراتِ الحواسيب الشائعةِ في جميع مسائل التصميم البنيوية السيرورة فعلاً، باستثناء ما يخصّ البرمجة اللاخطّيّة. تكون تقانيات مونتي كارلو والبرمجة الديناميكيّة مُفيدةً من أجل بعض المسائل الفيزيائيّة التي تمتلكُ عدداً أقلّ من متغيرات التصميم ممّا هو شائع في بنى. وهكذا، يمكنك أن تسمع عن استخدام هذه التقانيات في مجالاتٍ هندسيّة أخرى، ولكن ليس في تصميم بنى.

لا يُشير مصطلَح "اللاخطّيّة" في "البرمجة اللاخطّيّة" إلى لاخطّيّة المادّة أو اللاخطّيّة الهندسيّة، ولكنه يُشير إلى اللاخطّيّة في مسألة الأمْثَلة الرياضية نفسِها. تتضمّن الخطوةُ الأولى في سيرورة الأمْثَلة الإجابةَ عن أسئلةٍ مثل: ما هي استجابةُ الانبعاج، وما هي استجابةُ الاهتزاز، وما هي استجابةُ الانحراف، وما هي استجابةُ الإجهاد؟ توجد عادةً مُتطلَّباتٌ من أجل كلٍّ من متغيرات الاستجابة هذه. يقود وضعُ جميعِ الخصائص المميزة للاستجابات مع القيودِ المفروضة معاً إلى مجموعةِ معادلاتٍ تكون في جوهرها لاخطّيّةً،

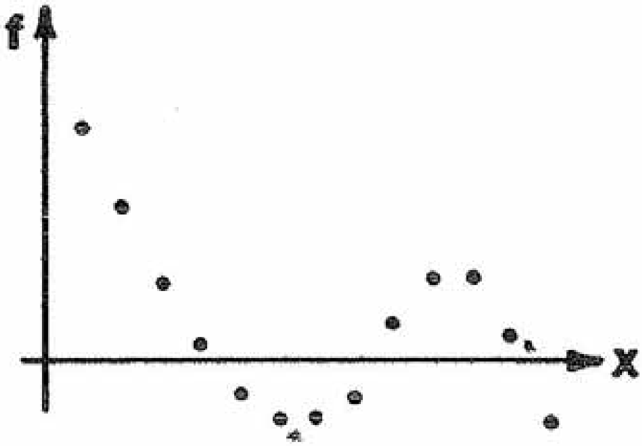
بقطع النظر عمّا إذا كانت خصائصُ المادّة نفسُها خطّيّةً أم لا، ومن مجموعة المعادلات اللاخطّيّة هذه يأتي مُصطلَح البرمجة اللاخطّيّة.

كم من المُنظّمات يقوم بما يمكننا فعلاً تسميتَه حلاً مباشراً ومنطقيّاً لمسألة تصميم البنية المُركَّبة؟ عددٌ قليلٌ جداً. على الأرجح، لا يشعر الناس إلاّ في بعضِ مجالات التصميم المحدودة جداً أنهم قادرون على استعمال مقاربةِ أَمْثَلةٍ مُوجَّهة رياضياً. إن هذه الحالة مدعاة للأسف، ولكن الوضعَ يتغيّر.

2.2.7.7 رياضيّات الأمْثَلة

لِنُباين بين مقاربتَين للأمْثَلة. المقاربةُ الأولى هي البحث عن الحلّ، بينما المقاربةُ الثانيّة هي الأمْثَلة الرياضيّة.

يُشكِّل البحثُ مقاربةً نحاوِل فيها إمّا اختبارَ جميع الحلول الممكنة أو النظر إلى بضعةِ حلولٍ من أجل استنتاجَ ما ينبغي علينا فعلُه للحصول على حلولٍ أخرى أكثرَ ملاءمةً. على سبيل المثال، لنفترض أننا أمام معادلةٍ، علينا حلّها، دالة f(x) مساوٍ للصفر، مثلاً–. يمكننا أن نرسمَ نقطاً متقطّعةً لقيم هذه الدالة، كما في الشكل 7–49. تُرسَم قيمُ هذا الدالة كمتتالية من النقاط، أي إن الدالة يتمّ تقديرُها عند قيمٍ مُحدّدةٍ لــ x. يكمن الهدف في إيجاد القيم التي ينعدم عندها الدالة. يمكنك النظر الآن إلى الشكل 7–49 وتخيُّلْ وَصْلَ جميعِ النقاط لرؤية فيما إذا كان منحني الدالة يقطع المحور x. هناك ثلاثة تقاطعاتٍ، وتُعطينا هذه الحقيقةُ نوعاً ما من الإحساس من أجل حلول المعادِلة. يعني ذلك أننا ننظر ببساطة إلى قيمٍ متقطّعة لــ x، ونقدِّر f عندها، ثمّ نقوم بمقارنةٍ بصريّة بقيمة الصفر المنشودة للدالة، ونسأل: ما قيمةُ، أو قيم، x الموافِقة لقيمةٍ معدومةٍ للدالة؟ من الواضِح أنه ينبغي تقديرُ دالة الهدفِ هنا عدداً كبيراً من المرّات في إجرائيّة البحث هذه.



الشكل 7–49: إجرائية البحث

الأمْثَلة الرياضية، بخلاف مقاربةِ البحث، طريقةٌ لا نضطرّ فيها إلى النظر إلى مجموعة قيمٍ مُحدَّدةٍ للدالة. لا نحتاج هنا إلى رسم الدالة، بالرغم من أن أسباباً متنوِّعةً تجعل هذا الرسمَ أمراً مرغوباً جداً. من الممكن أن تكون قد استخدمتَ طريقةَ نيوتن لحلّ معادلةٍ من الشكل $f(x)=0$. المعادلةُ الموافِقةُ لطريقة نيوتن سهلةٌ جداً، وتتعلّق بالطبيعة الهندسيّة لمنحني الدالة. من أجل حلٍّ تقريبيٍّ ما x_i، نقوم بحساب قيمةِ الدالة f التي لا تساوي الصفر. ننظر إلى ميل المنحني في الشكل 7–50 عند هذه النقطة x_i، ونرسم منها خطّاً مستقيماً بميلٍ مساوٍ لميل المنحني عندها(*) إلى أن يقطَع المحور الأفقيّ. يمثِّل تقاطُع الخطّ مع المحور الأفقيّ التقريبَ الجديدَ لحلّ المسألة، أي أفضل تقديرٍ للحلّ اعتماداً على استيفاءٍ (خارجيّ) خطّيّ. يتعلّق هذا التقريبُ الجديدُ x_{i+1} بالتقريب القديم من خلال هندسة المثلّث في الشكل 7–50، الذي يتضمّن قيمةَ الدالة، ومشتقَّه، وقاعدةَ المثلّث. يساوي حاصلُ جداءِ الميلِ (أي مشتقّ الدالة) بالمسافة الأفقيّة (قاعدة المثلّث) المسافةَ الشاقوليّةَ (قيمة الدالة)،

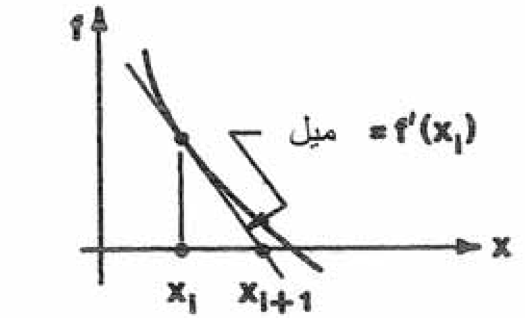
$$f'(x_i)(x_{i+1}-x_i)=f(x_i) \qquad (7.9)$$

ويمكن إعادة كتابة هذه العلاقة على الشكل:

(*) أي نرسم المماسَ للمنحني عند النقطة $(x_i,f(x_i))$ (المترجِم).

$$x_{i+1} = x_i + \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \qquad (7.10)$$

تخمينُنا التالي لحلّ المعادلة هو إذاً x_{i+1}. تُكرَّر هذه السيرورة التقريبيّة حتى تغدوَ الدالة قريباً من قيمة الصفر بشكلٍ كافٍ لإرضائنا.



الشكل7–50: الأمثلة الرياضية

إن إجرائيّة الأمْثَلة الرياضيّة هذه سيرورة منطقيّة عقلانيّة لأن الميلَ (أو المشتقّ) يُمكِّننا من معرفة الطريق التي يجب سلوكها وإلى أيِّ حدٍّ. بخلاف ذلك، نختار بشكلٍ كيفيّ في سيرورة البحث بعضَ قيم x التي نرغب تقدير الدالة عندها. تُشبِه هذه الخياراتُ الكيفيّةُ ما يفعله الناسُ عادةً في معظم أوضاع التصميم، حيث ما يفعلونه ببساطة هو البحثُ بطريقةٍ بدائية نوعاً ما عن حلّ المسألة، ولن يصلوا تماماً إلى الحلّ الميكروي. نأمل باستعمال الأمْثَلة الرياضية أن نُسرِّع السيرورة، وأن نحصلَ على حلٍّ أمثليّ أكثر دقّة.

تتضمّن الإجرائيّةُ الرياضية من أجل أمْثَلة دالة استحقاق وحيدٍ مع عدّة متغيرات تصميمٍ اشتقاقاتٍ جزئيّةً لدالة الاستحقاق بالنسبة إلى كلٍّ من متغيرات التصميم (كتعميمٍ لطريقة نيوتن من حالةِ المتغير الوحيد التي أوضحناها إلى حالة متغيرات عديدة). وهكذا، لا يمكن إظهار إجرائيّة الأمْثَلة الاعتياديّة في بعدَين أو ثلاثة أبعاد، وبالتالي لا تكون مفاهيمُ الإظهار البصريّ التقليديّة عادةً جزءاً من سيرورة الأمْثَلة. مع ذلك، يمكن لبعض مفاهيم الإظهار البصري التي طُوِّرَت حديثاً أن تكون ذات فائدة. تمّ استخدامُ الأمْثَلة الرياضية من أجل الأمْثَلة البنيوية منذ عمل شميدت (Schmidt) [7–12].

3.2.7.7 أمْثَلة صفيحة طبقيّة مُركَّبة

الانفعال أمثَلة بنيوية مُقيَّدةً على الأرجح، ألا وهي مسألة الصفيحة الطبقيّة المُركَّبة. لقد رأيت ادّعاءَنا بأن حقيقةَ القدرة على توجيه الرُّقاقات في الصفيحة الطبقيّة إنّما تُعَدّ فائدةً وخاصية مميزة جذّابةً في بنى المُركَّبة، تساعِد في تحقيق مُنى القلب في الحصول على أكثر البنى فعاليّةً. إن هذه الخاصّيّة المميزة مختلفةٌ تماماً عمّا هو ممكن في بنى المعدنيّة. إن هذه المرونةَ في توجيه الصفيحة الطبقيّة هي بالتأكيد خاصية مميزة إيجابيّة، ولكن كيف يمكننا استعمالُها؟

لنبدأ بمراجعةٍ كميّةٍ لسيرورة التحليل والتصميم من أجل الصفائح المعدنيّة. من أجل صفيحة معدنيّة متماثلة المناحي تحت حمولة استطالة N_x فقط، تتعلّق الحمولة بالانفعالات وفق:

$$N_x = \frac{\mathrm{Et}}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varepsilon_x^o + \nu\varepsilon_y^o\right) \qquad (7.11)$$

$$N_y = \frac{\mathrm{Et}}{\left(1-\nu^2\right)}\left(\varepsilon_y^o + \nu\varepsilon_y^o\right) = 0$$

بعد ذلك، يعطي شرطُ القوة الجانبيّة (N_y=0) العلاقةَ:

$$\varepsilon_y^o = -\nu\varepsilon_x^o \qquad (7.12)$$

تُصبح القوّة المُطبَّقة:

$$N_x = E\,t\,\varepsilon_y^o \qquad (7.13)$$

وهكذا، من أجل انفعال مفروضٍ ومسموحٍ به، نستطيع الحلَّ من أجل سماكة الصفيحة اللازمة لتجنُّب الإخفاق (بدون اعتبار عامِل أمان):

$$t_{required} = \frac{N_x}{E}\frac{1}{\varepsilon_{allowable}} \qquad (7.14)$$

لاحِظ أن سماكاتٍ مختلفةً تنجم عن المعادلة (7.14) من أجل موادّ مختلفة تتميّز بقيمٍ متباينة لـــ E و $\varepsilon_{allowable}$. يعني ذلك أن لمسألة التصميم إجابةً واحدة فقط شريطةَ تحديد المادّة، وإجاباتٍ عديدة في حال لم يتمّ تحديدُ المادّة.

وبطريقةٍ مماثلة، إذا طُبِّق عزمُ انحناء M_x فقط ، كان لدينا:

$$M_x = \frac{\mathrm{Et}^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\kappa_x + \nu\kappa_y\right) \qquad (7.15)$$

$$M_y = \frac{\mathrm{Et}^3}{12\left(1-\nu^2\right)}\left(\kappa_y + \nu\kappa_x\right) = 0$$

وبالتالي، اقتضى شرط العزم الجانبيّ ($M_y=0$)

$$\kappa_y = -\nu\kappa_x \qquad (7.16)$$

وهكذا يُصبِح العزمُ المُطبَّق:

$$M_X = \frac{Et^3}{12}\kappa_x \qquad (7.17)$$

مع ذلك، لدينا من توزيع الانفعال الخطيّ عبر سماكة الصفيحة:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^o + z\kappa_x \qquad (7.18)$$

من أجل انحناء صرف ($\varepsilon_x^0 = 0$)، يحدث الانفعال الأكبر عند $z=\pm t/2$، وبالتالي:

$$\kappa_{x_{\max}} = \frac{2}{t}\varepsilon_{x_{\max}} \qquad (7.19)$$

وفقاً لذلك، تكون السماكة المطلوبة:

$$t_{required} = \left[\frac{6M_x}{E_{\varepsilon_{allowable}}}\right]^{1/2} \qquad (7.20)$$

وهكذا، من أجل كلٍّ من حمولةِ الاستطالة والانحناء الصرف لصفائح معدنيّة متماثلة المناحي، يمكن تحديدُ السماكة المطلوبة لتحمُّل حمولةٍ مُعيَّنة مباشرةً عبر قلب وعكس معادلات التحليل، أي إن عملية التصميمَ حتميٌّة.

من أجل صفيحةٍ متعددة الطبقات متناظرة وبسيطةٍ ذات رقاقات متصالبة، خاضعةٍ لقوّةٍ N_x في المستوي، تُعطى علاقاتُ القوّة–انفعال بـــ:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x^o \\ \varepsilon_y^o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_x \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.21}$$

ومن شرط القوّة الجانبيّة ($N_y=0$)

$$0 = A_{12}\varepsilon_x^o + A_{22}\varepsilon_y^o \tag{7.22}$$

أو:

$$\varepsilon_y^o = -\frac{A_{12}}{A_{22}}\varepsilon_x^o \tag{7.23}$$

وبالتالي تُصبِح القوّة المُطبَّقة:

$$N_x = \left(A_{11} - \frac{A_{12}^2}{A_{22}} \right)\varepsilon_x^o \tag{7.24}$$

مع ذلك، تذكّر أن معلمات جساءة الاستطالة تُعطى بـــ:

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \left(\overline{Q}_{ij}\right)_k \, t_k \tag{7.25}$$

حيث $\overline{Q_{ij}}$ هي دوالي مُعقَّدة معروفة لـــ $Q_{11},Q_{12},Q_{22},Q_{66}$، و α_k ،توجُّه الليف في الطبقة ذات الرتبة k، بالإضافة إلى t_k سماكات الرّقاقات. من الواضِح أن Q_{11}, Q_{12}, Q_{22} معروفةٌ بدلالة E_1, E_2, υ_{12}. مع ذلك، لا نستطيع الحلَّ من أجل سماكاتِ الرّقاقات، وعدد الطبقات، وزوايا الرّقاقات من معادلةٍ واحِدة (قوّة–انفعال). وهكذا تكون حتّى أسهلُ مسائل تصميم الصفائح الطبقيّة غيرَ مُحدَّدة أو لاحتميّة. تخلق هذه الحقيقةُ مسألةً كبيرةً بوضوح عندما نريد حالياً أمْثَلةَ تصميمِ الصفيحة الطبقية، مع وجود صعوباتٍ في تحديدِ تصميمٍ واحدٍ للصفيحة الطبقيّة، بالإضافةِ طبعاً إلى تحديد التصميم الأفضل.

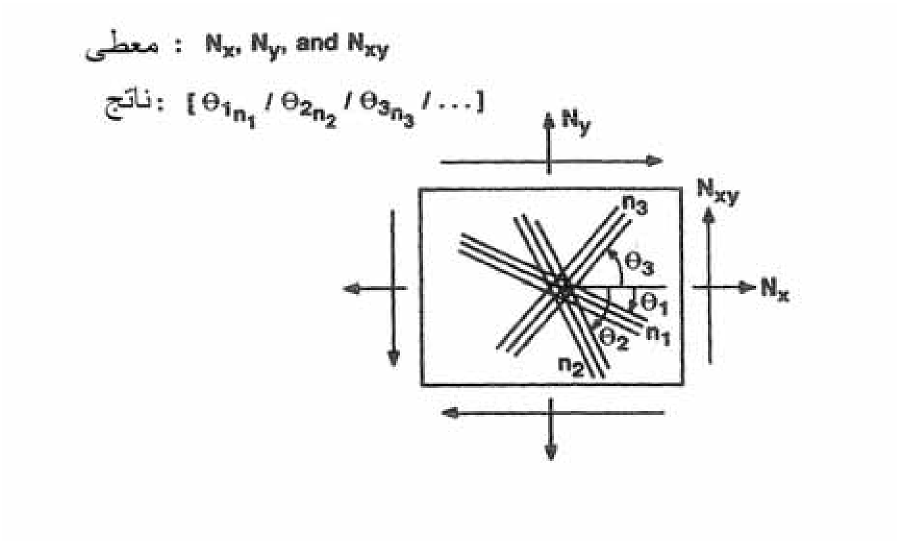
من أجل صفائح مُركَّبة متعددة الطبقات أكثرَ عموميّةً، مقوّاة بالألياف، تُعطى العلاقاتُ بين القوى، والعزوم، وانفعالات السطح الأوسط وتقوساته بـــ:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{bmatrix} \tag{7.26}$$

وهذه توابِع معقّدة لعدد الطبقات ودالة التنضيد، بحيث لا يوجد حلّ مباشَرٌ للمعادلات بالطريقةِ نفسِها التي توجَد في حالة الصفائح المعدنيّة متماثلة المناحي. يعني ذلك عدمَ وجودِ حلولٍ للسماكات المطلوبة من أجل صفيحةٍ متعددة الطبقات تماثِل حلولَ المعادلتَين (7.14) و(7.20). تكمن المسألةُ في أننا نبحث عن أكثر من مجهولٍ واحِد ،السماكة وتوجُّهات الرُّقاقات، في حين لدينا معادلةٌ واحدةٌ فقط! أو على الأكثر ستّ معادلات من المعادَلة (7.26).

إن حلَّ مسألةِ تصميم الصفيحة الطبقيّة مع عددٍ من متغيرات التصميم أكبر من معلمات التحميل ليس مبتذلاً. وفي غياب حلٍّ مُباشَر، علينا استدعاءُ مقاربة حلّ غير مباشرة. توصَف إحدى مثلِ هذه المُقاربات غير المباشرة في الفقرة 4.2.7.7 عن طرائق الأمْثَلة. تُستخدَم هنا خطّةُ القوّة العمياء وتجريب عدّة توليفاتٍ ممكنة من أجل إيجاد صفيحة طبقيّة تحقّق متطلّبات التصميم. تكمن مقاربةٌ أخرى في إجرائيّة تساي (Tsai) لتصنيف الصفائح الطبقيّة [7−13]، وهي ليست مقاربة تصميمٍ حقيقيّة، بل إنها، بدلاً من ذلك، دالة تقييماتٍ لصفائح طبقيّة مُحدَّدة مُسبقاً تحت حمولاتٍ مُعيَّنة، مع ترتيبٍ لاحِقٍ للمجموعة المُختارة من الصفائح الطبقيّة وفقاً لمقدراتِها على تحمُّل الحمولة المفروضة. يتمّ انتقاء الصفيحة الطبقيّة الأفضل من بين تلك الصفائح الطبقيّة التي تمّ فحصُها، وبالتالي من الممكن أن تفوتَنا، حقيقةً، الصفيحةُ الطبقيّة الأفضلُ. مع ذلك، لطريقة تساي فائدةٌ تكمن في أن البحثَ يمكن أن يكون مقتصراً على تلك الصفائح الطبقيّة أو على تلك العائلات منها ذاتِ الأهميّة. على سبيل المثال، يمكن أن نقصر اهتمامَنا على الصفائح الطبقيّة التي تتوفّر من أجلها معطياتُ تعب.

تكمن مسألةُ الصفيحةِ الطبقيّة البنيوي فيما يلي: بمعرفة الحمولة الإجماليّة وفكرة تقريبيّة عامّة عن الشكل الذي نريدُه، ما هي المجموعة الأمثليّة من توجهات الرّقاقات التي تُشكِّل هذه الصفيحة الطبقيّة؟ ينبغي علينا هنا أن نصبح دقيقين ونعطي أموراً كمّيّةً، وأن نرسم مقاربةً مُحدَّدة نحو تصميم الصفيحة الطبقيّة. أوّلاً، إننا لا نعرف حتى كم من الرّقاقات نحتاج! يكمن هدفُنا الأساسيّ في أننا نرغب بحمل مجموعةٍ مُحدَّدة من الحمولات. ليست سيرورة التصميم مجرَّدَ إيجادِ السماكة – كما هو الحال في الصفيحة المعدنيّة، بل إنها تعني إيجادَ سماكةٍ وتحديدَ ماذا نضع ضمن هذه السماكة، أي عددُ الرّقاقات وتوجُّهاتِها، كما في الشكل 7–51. إن السيرورة البنيوية من أجل الصفائح الطبقيّة المُركَّبة أكثر تعقيداً بكثير ممّا هو في بنى المعدنيّة، حيث لا ينبغي علينا إلاّ تحديدُ قيمةِ متغير واحد: السماكة.



الشكل 7–51: المسألة الأساسية في تصميم الصفيحة الطبقية

إن تقديرَ قدرةِ تُحمل الحمولة من أجل صفيحةٍ طبقيّة مُحدَّدة (بما فيه السلوك إجهاد– انفعال) هو سيرورة حتميّةٌ مُباشرةٌ، تمّ وصفُها في الفقرة 5.4. على سبيل المثال، تكون لصفيحةٍ طبقيّةٍ مؤلّفة من 20 طبقة مقدرةٌ مُعيَّنة لتحمُّل الحمولة من أجل نوعٍ مُعيَّن من الحمولات (وقيمةُ مقدرةٍ مختلفة من أجل نوعٍ آخر من الحمولات).

بالمقابل، يمكن، ربّما، تحقيقُ القيمة المُحددة نفسها لتحمُّل الحمولة في صفيحة طبقيّة من 20، أو 30، أو 40، أو 50 طبقة، أو بصفائح طبقيّة عديدةٍ أخرى. تُحقِّق جميعُ هذه الصفائح الطبقيّة مُتطلَّبَ تحمُّل الحمولة، وهكذا تكون سيرورةُ تصميمِ الصفيحةِ الطبقيّةِ غيرَ حتميّة. إذا كانت كلُّ رُقاقةٍ مصنوعةً من المادّة نفسِها، يتناسب وزن الصفيحة الطبقيّة طرداً مع عدد الرّقاقات. من الواضِح أن الصفيحةَ الطبقيّة ذات الـــ 20 طبقة هي الأقلُّ وزناً من بين الصفائح الطبقية المذكورة آنفاً. عند اعتبار وزن الصفيحة الطبقيّة، تكون لدينا وسائل قابلةٌ للقياس كمّيّاً من أجل التمييز بين الإجابات المتنوِّعة الممكنة لمسألة تصميم الصفيحة الطبقيّة. يعني ذلك أنه مع دالة استحقاق مثل الوزن، فإننا نستطيع ترتيبَ الصفائح الطبقيّة وفقاً لمدى جودتِها في (Meritfunction) تحقيق متطلّبات التصميم. لاحظ أن المتانة ليست دالة استحقاق لأنها قيدٌ على مسألة تصميم الصفيحة الطبقيّة، وبالتالي لا يمكنها كذلك أن تكون دالة استحقاق.

في الحالة العامّة، قد نرغب باعتبار جميع الاتّجاهات الممكنة للرّقاقات في الصفيحة الطبقيّة ، ولكن هذه المقاربةَ منهِكةٌ نوعاً ما. يعني ذلك أنه لو حاولنا تقييمَ جميع الصفائح الطبقيّة الموافِقة، لنجم عددٌ لانهائيٌّ من الحلول الممكنة، وبالتالي لا تكون هذه المُقاربة سيرورة بوضوحٍ. بدورِه، لا يُعَدّ اعتبارُ مجموعةٍ كيفيّةٍ تماماً من الاتّجاهات من أجل غالبيّة الصفائح الطبقيّة سيرورةً واقعيّةً، ويعود ذلك ببساطة إلى عدمِ رغبتكِ لأسبابٍ تصنيعيّة بتحديد وجوبِ كون طبقةٍ ما مائلةً بزاوية °67.3، وطبقةٍ تليها بزاوية °52.7. لا يمكن تحقيقُ مثلِ هذه التوصيفات الميكروية لزوايا الرّقاقات بسهولة في التصنيع، كما أن ذلك ليس أمراً ضرورياً ولا مرغوباً به. هناك مقاربةٌ أخرى تكمن في التفكير ،عند المرحلةِ الأكثر دقّةً، بالسماح للرّقاقات بالتوجه وفق زوايا متنوّعة تزداد بمقدار °5(*). يُنقِص هذا القيدُ على التوجُّه الزاويّ للرقاقات عددَ الصفائح الطبقيّة الممكنة بشكلٍ كبير، ولكنه ،مع ذلك، يُبقي عدداً كبيراً جداً من الإمكانيّات فيما يتعلّق باتّجاهات الرُّقاقات في الصفيحة الطبقيّة، كما سوف ترى.

(*) تُعَدّ الزاوية °5 صغيرةً كفايةً بحيث يمكننا مسحُ المجال المسموح للزوايا باعتماد مُضاعفاتٍ صحيحة منها (المترجم).

هناك طريقةٌ حتى أكثر سيرورة لأسبابٍ متنوِّعة تكمن في اقتصار الزوايا المقبولة للرّقاقات على توليفاتٍ مُحدَّدة، مثل رُقاقات عند الزاوية 0°، ورقاقات عند الزاوية 90°، ورُقاقات عند الزاوية 45°±. لم أقترح هنا أننا في صدد بناء صفائح طبقيّة متماثلة المناحي تقريباً فقط، لأنني لم أقل أنه ينبغي أن يكون لديك العددُ نفسُه من الرُّقاقات عند الزاوية 90°، والرُّقاقات عند الزاوية 0°، والرُّقاقات عند الزاوية 45°+، والرُّقاقات عند الزاوية 45°. لنُغيِّر أعدادَ الرُّقاقات، ونسبَ هذه الأنواع المختلفة من الطبقات. إننا نتعامل مع عائلة الرقاقات 0°، 90°، 45°±. تكون عندها معلمات التصميم التي نبحث عنها قيمَ ثلاثة معلمات L، M، N تُمثِّل أعدادَ الرُّقاقات عند الزاوية 0°، وعند الزاوية 90°، وعند الزاوية 45°±، على التوالي. نبحث في هذه الحالة عن ثلاثة أعداد (أعداد الطبقات في كلٍّ من زمر الاتّجاهات الزاويّة الموافِقة)، ولكننا سوف نبحث عن أعدادٍ أكثر بكثير إذا عدنا مرحلةً إلى الوراء، وسمحنا للطبقات بالتوجُّه بزوايا تتزايد قيمُها بمقدار 5° كاتّجاهاتٍ ممكنةٍ. تتغيّر الطبيعة الرياضية لمسألة الأمْثَلة التصميميّة بشكلٍ كبير عندما نقيد عددَ متغيرات التصميم، أو عندما نُحدد عددَ القيم الممكنة لمتغيرات التصميم. سوف نُقارن بين هاتَين المقاربتَين لتصميم الصفيحة الطبقيّة في الفقرة التالية.

4.2.7.7 برمجيّات أمْثَلة المتانة

سوف نناقش – بدرجاتٍ متباينة ولأسباب متنوِّعة، بعض برمجيّات أمْثَلة المتانة المألوفة الاستعمال مثل RC7 وOPLAM. لكلّ برنامج سمةٌ جذابةٌ بشكلٍ خاصّ ضمن المعنى التصميمي. من المؤكَّد أن هناك برمجيّاتٍ حديثةً يتمّ تطويرُها دوماً، وبالتالي فهذه المناقشةُ قديمةٌ وفات وقتُها حتى قبل النشر. مع ذلك، تمتلك المناقشةُ قيمةً تعليميّةً ما، عامّةً ومستدامةً.

تمّ تطويرُ برنامج RC7 من قبل وادوبس (Waddoups)، ماك كوليرس (McCullers)، أولسين (Olsen)، أشتون (Ashton)، من أجل تناوُل مسألة تشكيلٍ لأكثر من 20 رُقاقة ضمن صفيحةٍ طبقيّة. يمكن لكلّ من هذه الرُّقاقات أن تتوجَّه بزاويةٍ من مُضاعفات الــ 5°. تُمثِّل هذه الصُّفَيحة الطبقية التشكيلَ الإجماليّ، أي لا نأخذ بالاعتبار أيّ دعامات أو قلبٍ بشكل قرص العسل. إن شرطَ التصميم الوحيد الذي نقوم بتقييمه هو المتعلِّق بمتانة الصفيحة الطبقيّة من خلال وسيلتَي معيارَي الإخفاق البديلتَين

من أجل رُقاقات منفردة: معيار الإخفاق لتساي–هيل ومعيار إخفاق الانفعال الأعظميّ. النوع الوحيدُ من الحمولة هو الحمولة المنتَظِمةُ في المستوي، أي لا يمكن تطبيقُ أيّ عزومِ انحناء. لا نأخذ الجساءةَ بعين الاعتبار (بالرغم من أنه يمكن تقديرُها بسهولة)، وبالتالي لا يمكن وجودُ تقييمٍ لمقدرات الانبعاج أو الاهتزاز. وهكذا يكون برنامج RC7 تحليل نقاط–إجهاد ضمن برنامج أمْثَلةٍ للمتانة.

إن طريقةَ الأمْثَلة هي تقنيّةُ بحثٍ بالقوّة العمياء. وتكون جميعُ الصفائح الطبقيّة الممكنة التي يمكن الحصولُ عليها عبر تغيير اتّجاهات الرُّقاقات المنفردة بمقدار مُضاعفاتٍ لــ $5°$ مُرشَّحةٌ لسيرورة الأمْثَلة. لقد تناولنا برنامج RC7 لأنه برنامجٌ واسِع الاستعمال، ولأنه ممثِّلٌ عن تقنية البحث بالقوّة العمياء. السؤالُ الأساسيّ هو: بما أنه ينبغي تحمُّلُ حمولةٍ مُعيَّنةٍ ما، فما هي الصفيحة الطبقيّة التي نحتاجُها؟ لا فكرةَ لدينا عن عدد الطبقات التي سوف نحتاجُها، وبشكلٍ أقلّ عن توجُّهاتِها، ولكننا يجب أن نبدأ في مكانٍ ما.

ابدأ مع "صفيحة طبقيّة" من طبقة واحدة فقط، ثم ضع هذه الطبقةَ أو الرُّقاقة أحاديّةَ الاتّجاه في اتّجاهات متنوّعة عند زوايا من مضاعفات الــ $5°$. كم من هذه الاتّجاهات ممكنٌ؟ قسِّم $180°$ على $5°$ فتحصل على 36 توجُّهاً (بعد تدوير رُقاقة بزاوية أكبر من $180°$ فإن التوجُّهاتِ السابقةَ تتكرّر ببساطة). يعني ذلك أنه عندما تتمّ إعادةُ تدوير الرُّقاقة المُقوّاة محوريّا بزاوية $180°$، فإن اتّجاهَ ألياف الرُّقاقة يكون في الاتّجاه الذي ابتدأنا منه. من أجل هذه الطبقة الوحيدة، نطرح السؤالَ: أيّ من هذه التوجُّهات الممكنة الــ 36 له المقدرةُ الأعلى على تحمُّل الحمولة؟ تحتاج الإجابةُ عن هذا السؤال إلى إجرائيّةِ انتقاء من بين جميع الصفائح الطبقية المتنوِّعة الممكنة، من أجل إيجادِ أكبرها قوة. تقود هذه السيرورة إلى زاويةٍ ولنسمِّها α_1. إن سؤالَ التصميمِ الوثيقَ الصلةِ الآن هو: هل قدرةُ تحمُّل الحمولة المتمثِّلة برُقاقةٍ واحدةٍ بالاتّجاه α_1 تُحقِّق متطلّبات تحمُّل الحمولة؟ إذا لم تكن مقدرةُ "الصفيحة الطبقيّة" كافيةً (وهو أمرٌ لا بدّ وأن توقّعناه)، بالرغم من توجُّهِ الرُّقاقةِ بالشكل الأفضل، فينبغي علينا عندها إضافةُ طبقةٍ واحدةٍ على الأقلّ.

عندما نُضيف الطبقةَ الثانيةَ، فإننا نكون قد ثبّتنا كيفيّاً، من أجل البدء بالإجرائيّة، توجُّهَ الطبقة الأولى عند وضع الزاوية α_1 المُحدَّدة سابقاً. نُحدِّد الآن توجُّهَ الطبقة الثانية

الذي يُعطي أفضلَ استجابة (أي الأقوى). لنغيِّر في توجُّهِ الطبقة الثانية التي تأخذ قيمُ زاويتِها مضاعفاتٍ لــ °5، ضمن 36 خياراً ممكناً، حتى نحصل على توليفةٍ – بين الزاوية الجديدة وزاوية الطبقة الأولى المُثبَّتة في اتّجاهِها، لتُعطينا الصفيحةَ الطبقيّةَ ذات المتانة الأقوى. لا تكون الصفيحةُ الطبقية الناتجة بالضرورة أفضلَ صفيحةٍ طبقيّةٍ مؤلَّفة من رُقاقتَين. مع ذلك، تكمن النقطةُ الأساسُ هنا في اكتشافنا للاستراتيجيّة التي نتّبعها في تغيير جميع متغيرات التصميم. تتضمّن هذه الاستراتيجيّة مقاربةَ بحثٍ بالقوّة العمياء. لا نستخدم هنا مقاربةَ أمْثَلةٍ رياضيّاتيّةً أكثرَ مُباشرةً حيث نستطيع أن نجد بطريقةٍ رياضيّاتيّةٍ نوعاً ما العددَ الأمثليّ للرُّقاقات وتوجُّهاتِها. نحتاج هنا من أجل إجراء حساباتٍ تكراريّةٍ عديدةٍ إلى مساعدة الحاسوب، ولكننا نرفُد هذه الحسابات التكراريّةَ هنا باستراتيجيّةٍ بسيطةٍ نوعاً ما من أجل الحفاظِ على سِجلٍ للتوجُّهات التي نتعامَل معها. حيث إننا قمنا الآن بتفحُّص جميع التوجُّهات الــ 36 الممكنة للطبقة الثانية ووجدنا التوليفةَ المتانة الأقوى، فإننا نكون فعلاً قد اخترنا صفيحةً طبقيّةً أخرى، يمكن أن نُميزها بالرمز [α_1/ α_2].

نتخلّى الآن عن القيد المتمثِّل بتثبيت توجيه الطبقة الأولى بالزاوية α_1. من المؤكَّد أن مثلَ هذا القيد يبدو كيفيّاً ولا معنىً فيزيائيّاً له. فوق ذلك، ينبغي أن نقبلَ بأن الطبقةَ الثانية قد لا تكون بدورها موجهة بالاتّجاهِ الأمثليّ. وهكذا، سوف نسمح لكلا توجُّهَي الرّقاقتَين بأن يتغيّرا من [α_1/ α_2] إلى شيءٍ آخر. وسوف ندعو إجرائيّةَ تغيير الرُّقاقات هذه بإعادة توجيه الرّقاقات. هناك مرحلتان في إعادة توجيه الرُّقاقات: (1) إعادة توجيه تقريبيّةّ خشنة، و(2) إعادة تقريب دقيقة.

نسمح في إعادة التوجيه الخشنة لزوايا الرُّقاقات بأن تتغيّر ضمن مُضاعفاتٍ لــ °15. يعني ذلك أن α_1 تتغيّر إلى $\alpha_1+\Delta\alpha$ ، حيث $\Delta\alpha=0^\circ$، ±15°، ±30° سوف نُغيِّر أيضاً α_2 بالطريقةِ نفسِها. عندما نقوم بجميع هذه التغييرات، نُقيِّم وفي الوقت نفسِه قيمَ متانة الصفيحة الطبقية الموافقة لهذه التوليفات، وتكون الصفيحةُ الطبقيّةُ ذاتُ المتانة الأقوى هي النتيجة المنشودة. سوف ندعو هذه الصفيحة الطبقيّة [β_1/β_2]. أجرَينا من أجل تحديد هذه الصفيحة الطبقيّة الجديدة 5^2 خياراً. نُجري إعادةَ توجيهٍ خشنةً أخرى مرّةً ثانيةً باستخدام 25 خياراً إضافيّاً، نُخصِّص أفضلَ الصفائح من بين هذه الخيارات بالرمز [ω_1، ω_2].

نتناول بعد ذلك إعادةَ التوجيه الميكروية، حيث نعود ونأخذ الصفيحة الطبقيّة المُعرَّفة بـــ [ω_1/ω_2]، وندع هاتَين الزاويتَين تتغيّران بمقدارٍ ما $\Delta\omega$. في إعادة التوجيه الميكروية، تمسح $\Delta\omega$ مجالاً طولُه $20°$ عبر إجراءِ زيادةٍ مقدارُها $5°$ في كلّ مرّة، وبالتالي تتغيّر الزاويتان بمقدار $0°$، $\pm5°$، $\pm10°$. تقود هذه الخياراتُ الخمسة لـــ $\Delta\omega$ من أجل كلّ طبقةٍ إلى 25 توليفةً جديدةً للرُّقاقتَين ينبغي تفحُّصُها. نرمز إلى أفضل صفيحة طبقيّة رقائقيّة من بين هذه الصفائح الطبقيّة بـــ [φ_1، φ_2]. قم بإعادة توجيهٍ دقيقة مرّةً أخرى، وارمُز إلى الصفيحة الطبقيّة الرّقائقيّة الموافِقة لنتيجة هذه الحسابات الـــ 25 الإضافيّة بـــ [θ_1، θ_2].

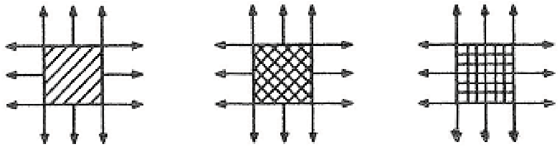
من الواضِح أن هناك حساباتٍ عديدةً قد تمّت إعادتُها في جميع حسابات الصفائح الطبقيّة هذه. على سبيل المثال، عندما كانت $\Delta\alpha$ مساويةً لـــ $0°$ من أجل الطبقة الأولى و$0°$ من أجل الطبقة الثانية، فإن الإجابةَ كانت معروفةً بالنسبة إلينا، ومع ذلك فقد قمنا بالحساب مرّة أخرى. إذا كانت الحسابات التي نقوم بها سهلةً جداً، فمن الأفضل عندها إجراء الحسابات مرّةً أخرى على إقامة استراتيجيّاتٍ من أجل استذكار جميع نتائج الحسابات السابقة وتذكُّر فيما إذا كنّا قد قمنا بها سابقاً. تنتمي حساباتُ المتانة التي نُجريها هنا إلى طائفة الحسابات القصيرة والسهلة. حيث إن الحسابات المنفردة بسيطة، فإن إعادةَ حسابِها أسهلُ بكثيرٍ من خزنِها وتذكُّرِها. يتطلّب توفير سعة التخزين الضروريّة لجميع الحسابات السابقة والمنطق اللازِم لإقرار فيما إذا كنّا قد قمنا بحساب المتانة من أجل صفيحةٍ طبقيّة مُعيّنة مكاناً ومحاكمةً منطقيّة لبرامِج حاسوبيّة إضافيّة، وبالتالي يستلزم زمناً إضافيّاً.

نتبع استراتيجيّةَ البحث بالقوّة العمياء هذه مع إضافة طبقاتٍ أخرى لأننا لا نعرف مُسبقاً عدد الطبقات التي نحتاجها من أجل الحمولة المفروضة. إذا كانت الحمولةُ كبيرةً جداً، فقد نحتاج إلى 19 طبقة، وسوف نشقّ طريقنا إلى تلك الصفيحة الطبقية عبر إضافةِ طبقةٍ واحدةٍ في كلّ مرّة، وإيجادِ أفضل صفيحةٍ طبقيّة من أجل هذا العدد من الرُّقاقات.

تُعَدّ عمليّتا إعادتَي التوجيه الخشنة والميكروية أساسيّتَين لأن سيرورة تثبيت الاتّجاه الليف لرُقاقةٍ واحدَة مع تغيير اتّجاه الليف في رُقاقةٍ أخرى (صُفَيحة) تُدخِل قيداً

اصطناعياً على مسألة الأمْثَلة. هناك على الأقلّ مسألةُ أمْثَلةِ صفيحةٍ طبقيّةٍ واحدة على الأقلّ نعرف إجابتَها الصحيحة (أي التوجُّهات الرقائقيّة الصحيحة)، وإذا لم نقم بإعادة توجيه الرُّقاقات، فإننا سنحصل على إجابةٍ خاطئة من أجل تلك المسألة. إن المسألةَ الاختباريّةَ التي نعرف إجابتَها هي مسألةُ الحمولة ثنائيّة المحور. تُطبَّق حمولتان بشكلٍ متساوٍ وفق كلٍّ من المحورَين x وy. إذا أردنا تحمُّل هذه الحمولةَ بواسطة طبقةٍ واحِدة، نعرف أن الإجابةَ سوف تكون توجُّهاً إمّا وفق الزاوية °45+ أو °45−، كما في الشكل 7−52. إذا أضفنا طبقةً إلى الطبقة الأولى، مع تثبيت توجُّه الطبقة الأولى، فإن الإجابةَ المتعلِّقة بتوجُّه الطبقة الثانية هي إمّا °45− أو °45+، على التوالي. إذا توقّفنا هنا، فإننا نعرف أننا لا نملك الصفيحةَ الطبقيّةَ المناسبةَ لأن الإجابةَ الصحيحةَ تتمثّل في صفيحةٍ طبقيّة مع مجموعةٍ واحدةٍ من الألياف في الاتّجاه x، وأخرى في الاتّجاه y. إذا تمعّنتَ بالأمر، فإن إعادتَي التوجيه الخشنة والميكروية تسمحان بظهور الإجابة الصحيحة في مكانٍ ما ضمن العدد (الكبير) من الأوضاع التي نعاينُها. يعني ذلك أنه يتمّ توسيعُ وزيادةُ عدد الأوضاع عبر تحرير القيد الاصطناعي المتمثِّل في تثبيت اتّجاه (أو اتّجاهات) رُقاقةٍ (صُفَيحة) أو أكثر. لا نقوم بحساب الإجابةِ الصحيحة مباشرةً، بل نبحث بدلاً من ذلك ضمن مجالٍ محدود. إذا كان هذا المجالُ المحدود الذي نبحث ضمنه لا يحتوي على الإجابةِ الصحيحة، فإننا سنحصل على الإجابةِ التي تكون الأفضلَ فقط في المجال المحدود، ولكننا لن نحصل على الإجابة الأفضل إجماليّاً.

وهكذا، تكون إزالةُ القيد الكيفيّ هي الدّافع وراء إعادة توجيه الرُّقاقة. أمّا القرارُ بإجراء إعادتَي توجيهٍ اثنتَين خشنتَين أو دقيقتَين أم لا، أو بتحديد التغيُّر الزاويّ المُختار فإنه ينبغي اتّخاذُه من خلال اعتبار بعض مسائل صفيحة طبقيّة محددة نعرف الإجابةَ عنها. يجب علينا في هذه السيرورة أن نُحدِّدَ فيما إذا كانت إحدى المقاربتَين سوف تقود إلى الإجابةِ بشكلٍ أسرعَ من المقاربة الأخرى، وفوق ذلك، إذا كنّا سنحصل على الإجابةِ الصحيحةِ في حالة مسألة الحمولتَين ثنائيّتَي المحورَين المتساويتَين (أو أيّ مسألةٍ أخرى نعرف حلَّها الأمثليّ).



الشكل 7-52: تحميل متساوي ثنائي المحور

من أجل مثال الحمولة المتساوية ثنائيّة المحور، يكفي إجراءُ إعادتَي توجيهٍ خشنتَين لتوسيع مجال البحث من $\pm 45^\circ$ إلى 0° و90°. مع ذلك، ينبغي أن نكونَ قادرين على حلّ مسائل تتضمّن حمولاتٍ أكثرَ تعقيداً من الحمولة المتساوية ثنائيّة المحور. إذا طبّقنا، على سبيل المثال، بدلاً من الحمولة ثنائية المحور المُحقّقة لـــ $N_x=N_y$، حمولتَين تُحقّقان النسبةَ $N_x=1.1\ N_y$، فمن الواضِح عندها أن التعديلاتِ والتغييراتِ بمقدار 15° الموافِقةَ لإعادة التوجيه الخشنة لن تكفيَ لحساب صفيحةٍ طبقيّة أمثليّة بدقّة 5° من أجل اتّجاهات الرُقاقات. يعني ذلك أن إعادة التوجيه الخشنة ليست حسّاسةً بشكلٍ كافٍ لتمكيننا من إجراءِ أَمْثَلةٍ تحت شروط تحميلٍ عامّة. وهكذا، لا بدّ من إجراءِ نوعٍ ما من إعادة التوجيه الميكروية للرُقاقات.

يكون عددُ الحسابات في سيرورة انتقاء الصفيحة الطبقيّة كبيراً جداً. لا نحتاجُ لأيّ إعادة توجيهٍ في حالةِ طبقةٍ واحدة. لدينا هنا فقط 36 خياراً، وبالتالي علينا إجراءُ 36 حسابَ متانة كلّيّ. من أجل صفيحةٍ طبقيّة ثنائيّة الرّقاقة، ينبغي إجراءُ إعادتَي توجيهٍ خشنتَين للرّقاقات بالإضافة إلى إعادتَي توجيهٍ دقيقتَين. وهكذا تُضاف 100 سيرورة حساب إلى 36 سيرورة تُستخدَم لتوجيه الطبقة الثانية في الأصل، عدا عن السيرورات الـــ 36 التي أجريناها سابقاً من أجل الطبقة الأولى، وهكذا يكون العددُ الكليّ لسيرورات الحساب من أجل صفيحةٍ طبقيّة ثنائيّة الرقاقة 172، كما في الجدول 7-5. عندما نصل إلى أربع طبقاتٍ، فإننا نكون قد أنجزنا أكثرَ من 3000 سيرورات حساب، ولكنها جميعاً حساباتٌ بسيطة جداً. تأخذ سيرورات الحساب هذه ذات العدد المساوي لـــ 3244 حوالى دقيقةً واحِدةً في حاسوب IBM 360/65، وهو حاسوبٌ مركزيّ قديمٌ جداً. يُمثّل تحليلُ متانة الصفيحة الطبقيّة هذا نوعَ الحسابات التي يمكن إجراؤها بسهولة الآن على حاسوبٍ شخصيّ. من أجل n طبقة، نحتاج إلى 5^n سيرورة حساب. هذا العددُ ضخمٌ، وبالتالي

تحتاج صفيحة طبقيّة مُؤلَّفة من 10 رُقاقات إلى عددٍ ضخمٍ من الحسابات. ولكن ،مرّةً أخرى، هذه الحساباتُ بديهيّة، وبالتالي لا نحتاج فعليّاً إلى زمنٍ طويلٍ من أجل إجرائها، حتى على حاسوبٍ شخصيّ.

الجدول 7-5: عدد سيرورات الحساب في RC7

عدد الطبقات	عدد سيرورات إعادة التوجيه	العدد الكلّيّ لسيرورات الحساب	العدد التراكميّ لسيرورات الحساب
1	0	36	36
2	2×2×25	136	172
3	2×2×125	536	708
4	2×2×625	2536	3244
* * *	* * *	* * *	* * *
N	$2\times2\times5^N$	كبير	أكبر

تكمن إحدى الإجرائيّات التي يمكن استخدامُها من أجل تسريع سيرورة الأمْثَلة في اقتصارِ اهتمامنا على الصفائح الطبقيّة المتناظِرة. غالبا ما نحتاج إلى صفائح طبقيّة من أجل استبعاد أيّ الفتل أو فتل عند تحرير الصفيحة الطبقيّة من القالِب بعد التسخين. كما أننا نحتاج غالباً إلى تناظرٍ في الصفيحة الطبقيّة من أجل إزالةِ الإقران انحناء – استطالة تحت حمولةٍ ميكانيكيّة (يتضمّن الإقران المتعلّق بالتسخين حمولةً حراريّةً). من الواضِح أنه لا حاجة لفعل أيّ شيءٍ في حالة الطبقة الواحدة من أجل المحافظة على التناظر في الصفيحة الطبقيّة. علاوةً على ذلك، ينبغي على الصفيحة الطبقيّة ثنائيّة الرُقاقة أن تكون لها زاويتان متساويتان في كلتا الطبقتَين (وبالتالي تكون فعليّاً صفيحةً طبقيّةً أحاديّةَ الرُّقاقة). لا نبدأ باعتبار صفائح طبقيّة أكثر شيوعاً إلاّ عند الصفائح الطبقيّة ثلاثيّة الرقاقات. من أجل ثلاث طبقات، ينبغي على الطبقتَين الخارجيّتَين أن تكون لهما نفسُ الزاوية، بينما يمكن للطبقة الداخليّة أن تتوجَّه وفق أيّ زاوية (ما لم يجبْ تجنُّبُ الإقران استطالة–قصّ و/أو الإقران فتل – انحناء). لاحِظ إمكانيّة وجود الإقران قصّ – استطالة

في الصفائح الطبقيّة أحاديّة أو ثنائيّة أو ثلاثيّة الرقاقات. من أجل أربع طبقات، ينبغي على الطبقتَين الخارجيّتَين أن يكون لهما الزاوية نفسِها θ، كما أن على الطبقتَين الداخليّتَين أن تكون لهما نفس الزاوية β من أجل تحقيق التناظُر (فعليّاً صفيحة طبقيّة ذات ثلاث رقاقات مع طبقاتٍ غير متساوية السماكة). علاوةً على ذلك، ينبغي على الزاوية θ أن تُساويَ β– من أجل تجنُّب الإقران استطالة – قصّ. قد نكون أكثرَ اهتماماً في تحقيق تناظُرِ الصفيحة الطبقيّة من اهتمامِنا في إزالة الإقران استطالة–قصّ.

البرنامَجُ التالي موضوع الاعتبار هو برنامج OPLAM [7–15]، من أجل أمْثَلة الصفيحة الطبقيّة. تمّ تطويرُ البرنامج من قبل هادكوك (Hadcock) ومعاونيه من أجل التشكيل الخاصّ جداً للصفيحة الطبقيّة المذكورةً سابقاً ذات الرُّقاقات الموجهة فقط وفق الزوايا °0، °45±، °90، أي $[0^\circ_L / 90^\circ_M / \pm 45^\circ_N]$. مع ذلك، سوف توجد نسبٌ مختلفةٌ من هذه الرُّقاقات عمّا هو ضروريّ من أجل صفيحةٍ طبقيّة رقائقيّة شبه متماثلة المناحي. إن سؤالَ التصميم هو التالي: ما هي قيمُ L, M, N، أي أعداد الرُّقاقات الموجهة وفق الزوايا °0، °45±، °90، على التوالي؟ ينبغي أن تقع الرُّقاقاتُ الموجهة بالزاوية °45± ضمن أزواجٍ لكي يتمّ تجنُّبُ الإقران استطالة – قصّ. لا يعالِج هذا البرنامج أيَّ دعامات أو قلبٍ بشكل قرص العسل. يتمّ تقييمُ متانة الصفيحة الطبقيّة باستخدام معيار إخفاق تساي–هيل (Tsai-Hill) تحت شروطٍ موافِقةٍ لحمولاتٍ في المستوي فقط، بحيث يكون التحليلُ حصراً من أجل حالةِ إجهاد غشاءٍ. لا يتمّ حسابُ أيِّ حمولات انبعاج أو أيِّ ترددات اهتزاز. يكمن الهدفُ من وصف هذا البرنامج في أن فضاء التصميم المُبسَّط لا يتمّ فيه الاهتمام بالزاوية التي تتوضّع وفقها كل رُقاقةٍ، بل بمعرفةِ كم من هذه الرُّقاقات ذات الزوايا المُحدَّدة ضروريٌّ من أجل امتلاك الصفيحة الطبقيّة المقدرة اللازِمة لتحمُّل الحمولة المطلوبة.

يحتاج الأمر عادةً إلى معرفة سلوك التعب لأيّ صفيحةٍ طبقيّة نتوقّع استخدامَها في بنية بنيوية ما. إذا كانت الصفيحةُ الطبقيّة الأمثليّة من أجل بنية ما مختلفةً جداً عن أيّ صفيحةٍ طبقيّة تتوفّر معلوماتٌ عن سلوك التعب فيها، فينبغي علينا عندها إجراءُ اختبارات تعبٍ جديدة. مع ذلك، إذا كانت الصفيحة الطبقيّة عنصراً من عائلةٍ نعرف على الأقلّ بعض المعلومات المتبعثرة عن سلوك التعب فيها، فعندها قد لا نحتاج إلى الحصول على نتائجَ تعبٍ من أجل صفيحةٍ طبقيّة جديدةٍ قيد الاعتبار. على سبيل المثال، لنفترض

أنه لدينا معلومات عن سلوك التعب في بعضٍ من عائلة الصفائح الطبقيّة $[0^{\circ}_{L}/90^{\circ}_{M}/\pm 45^{\circ}_{N}]$، حيث L=7 و L=11 مع كون قيمتَي M و N مساويتَين لقيمتِهما في صفيحتنا الطبقيّة الأمثليّة. علاوة ً على ذلك، افترِض أن سلوك الصفائح الطبقيّة مع L=7 مماثلٌ تماماً له في حالة L=11. عندها إذا ظهر في النهاية أن صفيحتنا الطبقيّة الأمثليّة تحقِّق L=9، فعندها لن نتوقَّع بأن نحتاج لإجراء أيِّ شيءٍ ما خلا اختباراتِ تعبٍ اسميّة، أو لا شيءَ على الإطلاق. يعني ذلك، أنه قد نكون قادرين على استيفاء المعلومات المتوفِّرة داخليّاً. مع ذلك، إذا كان سلوك الصفيحة الطبقيّة مع L=7 مختلفاً جداً عن ذاك الموافِق للصفيحة الطبقيّة مع L=11، وأن إحدى الصفيحتَين الطبقيّتَين غيرُ مقبولة، فعندها سوف نحتاج إلى معطيات تعبٍ تخصّ الصفيحةَ الطبقيّةَ الأمثليّةَ حيث L=9. نحصل على الاستنتاج نفسِه من أجل قيمٍ لـــ L مختلفة كلّيّاً عن قيمها في معطيات التعب المتوفّرة.

3.7.7 مفاهيم جساءة الصفيحة الطبقيّة اللامتغيّرة

يمكن استعمال مفاهيم الجساءة اللامتغيِّرة (Invariant) كما طوّرها تساي (Tsai) وباغانو (Pagano) [7−16 و7−17] كأداةٍ مُساعِدة لفهم معلمات جساءة الصفائح الطبقيّة ذات التوجُّهات الكيفيّة، وكيف يمكن تغيير معلمات الجساءة هذه. سيتم مناقشة المفاهيمَ واستعمالاتِها في الفقرات من 1.3.7.7 ولغاية 3.3.7.7.

1.3.7.7 معلمات الجساءة اللامتغيّرة في الصفيحة الطبقيّة الرقائقيّة

تم في الفقرة 2.7 إدخال موضوعَ معلمات الجساءة المُختزَلة المتغيرة اللامتغيِّرة في الرُّقاقات ثلاثيّة المناحي وغير متماثلة المناحي. وتم هناك تبيان أن إعادةَ ترتيب معادلات التحويل للجساءة من قبل تساي وباغانو [7−16 و7−17] مفيدةٌ جداً. وبشكلٍ خاصّ، تصبح بعضُ المكوّنات اللامتغيّرة لمعلمات جساءة الرُّقاقة ظاهِرةً للعيان، فتساعِدَ في تحديد كيفيّة تغيُّر هذه المعلمات عند التحويل إلى اتّجاهات مادّة غير رئيسيّة تُعَدّ أساسيّةً من أجل الصفيحة الطبقيّة.

ويتم الآن تمديد مفاهيمَ الجساءة اللامتغيِّرة لرُقاقة إلى صفيحة طبقيّة. وقد تمّ الحصول على جميع النتائج في هذه الفقرة الفرعية والفقرات الفرعيّة التالية عن معلمات

الجساءة اللامتغيِّرة في الصفيحة الطبقيّة من قِبل تساي وباغانو [7−16 و7−17]. تتألّف الصفيحة الطبقيّة من رقاقات ثلاثيّة المناحي ذات توجُّهات وسماكاتٍ كيفيّة. يمكن كتابةُ معلمات الجساءة في المستوي x-y بالطريقة الاعتياديّة كـــ:

$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D_{ij}\right) = \int \overline{Q}_{ij}\left(1, z, z^2\right)dz \tag{7.27}$$

حيث $\overline{Q_{ij}}$ ثابتة في كلّ طبقة، ولكنها تتغيّر من طبقةٍ إلى أخرى. تُعطى قيمُ $\overline{Q_{ij}}$ في الجدول 2−2 حيث U_6 وU_7 تساويان الصفر. على سبيل المثال:

$$\left(A_{11}, B_{11}, D_{11}\right) = \int\left[U_1 + U_2\cos 2\theta + U_3\cos 4\theta\right]\left(1, z.z^2\right)dz \tag{7.28}$$

عندما تكون جميع الرُّقاقات ثلاثية المناحي مصنوعةً من المادّة نفسِها، يمكن إخراج الثوابت U_1, U_2, U_3 خارج التكامل، فنحصل على:

$$\begin{aligned}\left(A_{11}, B_{11}, D_{11}\right) = U_1\left[t, 0, \frac{t^3}{12}\right] + U_2\int\cos 2\theta\left(1, z.z^2\right)dz \\ + U_3\int\cos 4\theta\left(1, z.z^2\right)dz\end{aligned} \tag{7.29}$$

تُعطى النتيجةُ النهائيّة في الجدول 7−6 مع قيم جميع معلمات الجساءة. تساوي العوامِل $V_{i(A,B,D)}$ هناك ما يلي:

$$V_{0(A,B,D)} = \left[t, 0, \frac{t^3}{12}\right] \tag{7.30}$$

$$V_{1(A,B,D)} = \int\cos 2\theta\left(1, z.z^2\right)dz$$

$$V_{2(A,B,D)} = \int\sin 2\theta\left(1, z.z^2\right)dz$$

$$V_{3(A,B,D)} = \int\cos 4\theta\left(1, z.z^2\right)dz$$

$$V_{4(A,B,D)} = \int\sin 4\theta\left(1, z.z^2\right)dz$$

بما أن كلَّ طبقة متجانسة عيانيّاً ضمن منطقتها في الفضاء، تغدو التكامُلات في المعادلة (7.30) على شكل مجاميع أبسطَ:

$$V_{iA} = \sum_{k=1}^{N} W_k \left(z_{k+1} - z_k \right) \quad (7.31)$$

$$V_{iB} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} W_k \left(z_{k+1}^2 - z_k^2 \right)$$

$$V_{iD} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} W_k \left(z_{k+1}^3 - z_k^3 \right)$$

الجدول 7-6: معلمات الجساءة للصفيحة الطبقية كدالة لخصائص الرّقاقة (عن تساي Tsai وباغانو Pagano [7-17])

$V_{4(A,B,D)}$	$V_{3(A,B,D)}$	$V_{2(A,B,D)}$	$V_{1(A,B,D)}$	$V_{0(A,B,D)}$	معلمات الجساءة
0	U_3	0	U_2	U_1	(A_{11},B_{11},D_{11})
0	U_3	0	$- U_2$	U_1	(A_{22},B_{22},D_{22})
0	$- U_3$	0	0	U_4	(A_{12},B_{12},D_{12})
0	$-U_3$	0	0	U_5	(A_{66},B_{66},D_{66})
$-2U_3$	0	$- U_2$	0	0	$2(A_{16},B_{16},D_{16})$
$2U_3$	0	$- U_2$	0	0	$2(A_{26},B_{26},D_{26})$

حيث تُعرَّف z_i في الشكل 4-8، بينما N هي عدد الطبقات، و:

$$W_k = \begin{bmatrix} \cos 2\theta_{k}, & i=1 \\ \sin 2\theta_{k}, & i=2 \\ \cos 4\theta_{k}, & i=3 \\ \sin 4\theta_{k}, & i=4 \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

حيث θ_k توجُّه الاتّجاه-1 في الرُّقاقة ذات المرتبة k من محور الــ x في الصفيحة الطبقيّة. تصلح معلمات الجساءة الواردة في الجدول 7-6 من أجل صفيحة طبقيّة ذات N طبقة لمادّة وحيدة ثلاثيّة المناحي ذات توجُّهات خواص مادة رئيسيّة متنوِّعة للرُّقاقات الماديّة بالنسبة إلى محاورِ الصفيحة الطبقيّة.

ليست معلمات الجساءة في الجدول 7-6 معلمات جساءةٍ متغيرةً، كما في الجدول 2-2. يعني ذلك أن محورَ الــ x في الصفيحة الطبقيّة ثابتٌ بالنسبة إلى θ_k في كلّ رُقاقة. مع ذلك، يمكن الحصول على معلمات الجساءة المتغيرة عبر تدوير مجمل

الصفيحة الطبقيّة بزاوية Φ، أي عبر استبدال (θ−Φ) بـــθ في المعادلة (7−29). على سبيل المثال،

$$\overline{A}_{11} = U_1 t + U_2 \int \cos 2(\theta - \phi) dz + U_3 \int \cos 4(\theta - \phi) dz \qquad (7.33)$$

بعد ذلك وباستخدام المُطابقة المثلّثيّة (Trigonometric) لطرح زاويتَين يكون:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta \qquad (7.34)$$

فتقودنا حقيقةُ استقلالية Φ، وبالتالي دالاتها المثلّثيّة (Trigonometric) كذلك− عن z إلى:

$$\overline{A}_{11} = U_1 t + U_2 V_{1A} \cos 2\phi + U_2 V_{2A} \sin 2\phi + U_3 V_{3A} \cos 4\phi + U_3 V_{4A} \sin 4\phi \qquad (7.35)$$

حيث يُعرّف V_{iA} في المعادلة (7.31). تُعطى معلمات جساءة الاستطالة المتغيرة $\overline{A}_{ij}$ في الجدول 7−7. تمتلك معلمات جساءة الإقران انحناء − استطالة المتغيرة $\overline{B}_{ij}$ ومعلمات جساءة الانحناء المتغيرة $\overline{D}_{ij}$ الشكلُ نفسُه، كما في الجدول 7−7 باستثناء أن الـــ V_{iA} تُستبدَل بها V_{iB} و V_{iD} على التوالي. إن شكلَ علاقات التحويل من أجل A_{ij}، B_{ij}، D_{ij} في الجدول 7−7 مُطابقٌ لشكله في حالة الـــ Q_{ij} غير متماثلة المناحي في الجدول 2−2. هناك في نهاية الفقرة الجزئيّة تمارينُ تتضمن نقاطاً إضافيّةً عن المقادير اللامتغيِّرة.

الجدول 7−7: معادلات التحويل لـــ A_{ij} (وفقاً لـــتساي Tsai وباغانو Pagano [7−17])

معلمات جساءة الاستطالة المتغيرة	ثابت	cos2θ	sin2θ	cos4θ	sin4θ
$\overline{A}_{11}$	U_1V_{0A}	U_2V_{1A}	U_2V_{2A}	U_3V_{3A}	U_3V_{4A}
$\overline{A}_{22}$	U_1V_{0A}	$-U_2V_{1A}$	$-U_2V_{2A}$	U_3V_{3A}	U_3V_{4A}
$\overline{A}_{12}$	U_4V_{0A}	0	0	$-U_3V_{3A}$	$-U_3V_{4A}$
$\overline{A}_{66}$	U_5V_{0A}	0	0	$-U_3V_{3A}$	$-U_3V_{4A}$
$2\overline{A}_{16}$	0	U_2V_{2A}	$-U_2V_{1A}$	$2U_3V_{4A}$	$-2 U_3V_{3A}$
$2\overline{A}_{26}$	0	U_2V_{2A}	$-U_2V_{1A}$	$-2U_3V_{4A}$	$2 U_3V_{3A}$

2.3.7.7 نتائج خاصّة من أجل معلمات الجساءة اللامتغيّرة في الصفيحة الطبقيّة

سيتم تفحّص عدّةَ صفائح طبقيّة خاصّة من أجل المساعدة في فهم المجاميع $\overline{V}_{i(A,B,D)}$ في المعادلة (7.31). تذكّر أوّلاً من الرياضيات أنه لدينا:

$$\int_{-z}^{+z}(odd\ function)dz = 0 \qquad \int_{-z}^{+z}(even\ function)dz = finite \quad (7.36)$$

حيث z الإحداثيّة المتعامِدة مع مستوي الصفيحة الطبقيّة الرقائقيّة (أي الموجهة باتّجاه السماكة). سوف نعتبر صفائحَ طبقيّةً بتوجُّهاتِ رُقاقاتٍ تكون (1) دالات مفردة لـــ z، و(2) دالات مزدوجة لـــ z، و(3) دالات عشوائيّةً لـــ z، و(4) مساويةً لمُضاعفاتٍ من $\frac{\pi}{N}$، حيث N عدد الطبقات متساوية السماكة. يُبيِّن الشكلُ 7−53 أمثلةً على هذه الصفائح الطبقيّةِ.

أوّلاً، من أجل توجُّهاتِ رُقاقاتٍ حيث θ_k دالات مفردة لـــ z كما يُوضِّحها الشكل 7−53 أ من أجل صفيحةٍ طبقيّةٍ ذات رُقاقتَين مائلتَين باتّجاهَين ±α تكون التكامليات (Integrands) التالية في $\overline{V}_{i(A,B,D)}$ المعادلة (7.30) التاليةُ مفردة:

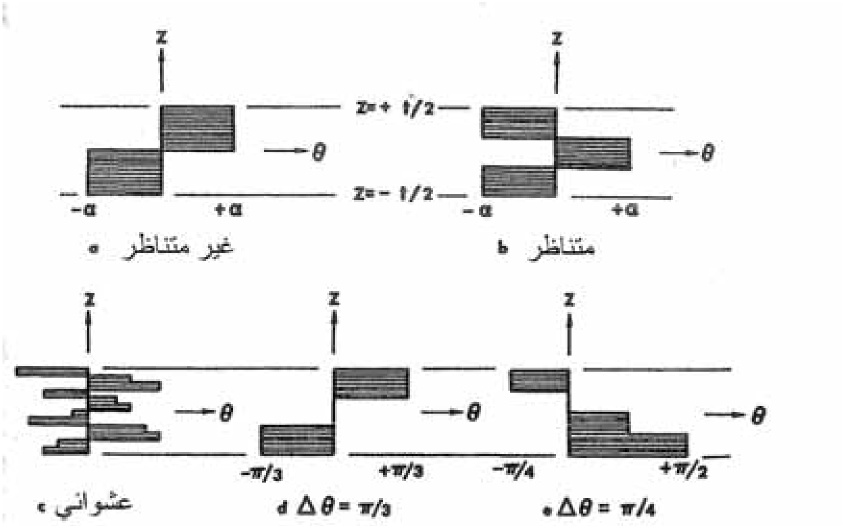
$$\cos p\theta(z) \qquad \sin p\theta(1, z^2)$$

بينما تكون التوابعُ المُكاملُ عليها التاليةُ زوجيّةً:

$$\cos p\theta(1, z^2) \qquad \sin p\theta(z)$$

حيث p تساوي 2 أو 4. وهكذا، تختفي المجاميع التالية:

$$V_{2A} = V_{4A} = V_{1B} = V_{3B} = V_{2D} = V_{4D} = 0 \quad (7.37)$$



الشكل 7–53: أمثلة على الصفائح الطبقية (عن تساي Tsai وباغانو Pagano [7–17])

وفقاً لذلك، تكون معلمات الجساءة في الجدول 7–6 التاليةُ مساويةً للصفر:

$$A_{16} = A_{26} = B_{11} = B_{22} = B_{12} = B_{66} = D_{16} = D_{26} = 0 \qquad (7.38)$$

تساوي معلمات جساءةِ الاستطالة والانحناء تلكَ الموافِقة لمادّة ثلاثيّة المناحي، أمّا معلمات جساءة الإقران انحناء–استطالة فهي ليست جميعاً معدومةً (تبقى B_{16} وB_{26}).

ثمّ، من أجل توجُّهاتِ رُقاقاتٍ حيث θ_k دالات مزدوجة لـــ z (متناظِرة)، كما يُوضِّحها الشكل 7–53 ب من أجل صفيحةٍ طبقيّةٍ ذات ثلاث رُقاقات، تكون التكامليات في $\overline{V}_{i(A,B,D)}$، المعادلة (7.30)، التاليةُ مفردة:

$$\cos p\theta(z) \qquad \sin p\theta(z)$$

بينما تكون التكاملات عليها التاليةُ مزدوجةً:

$$\cos p\theta(1, z^2) \qquad \sin p\theta(1, z^2)$$

وهكذا، تختفي المجاميع التالية:

$$V_{1B} = V_{2B} = V_{3B} = V_{4B} = 0 \qquad (7.39)$$

وفقاً لذلك، تختفي جميعُ معلمات جساءة الإقران استطالة–انحناء B_{ij} في الجدول 7–6. تُساوي معلمات الجساءة A_{ij} وD_{ij} تلكَ الموافِقةَ لمادّةٍ لا متماثلةِ المناحي.

إذا كان توجُّه الرُّقاقات دالةً عشوائية لـــ z، كما في الشكل 7–53 ج، نُعرِّف $\overline{V}_i$ المتوسِّط المكانيّ لقيم الــ $V_{i(A,B,D)}$ المفرِدة (سوف تُعالَج جميعُها بالطريقة نفسِها):

$$\overline{V}_i = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} V_i d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\int_{-t/2}^{t/2}\begin{bmatrix}\cos p\theta \\ \sin p\theta\end{bmatrix}\left(1, z, z^2\right) dz\, d\theta \qquad (7.40)$$

حيث p مزدوجة. بمبادِلة ترتيبِ التكامل نحصل على:

$$\overline{V}_i = \frac{1}{\pi}\int_{-t/2}^{t/2}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\begin{bmatrix}\cos p\theta \\ \sin p\theta\end{bmatrix} d\theta \left(1, z, z^2\right) dz \qquad (7.41)$$

المُساوي للصفر. عندما تكون جميع قيم الــ $V_{i(A,B,D)}$ مساويةً للصفر، فإنه لا تتبقّى إلاّ الحدودُ الثابتةُ في عبارات معلمات الجساءة. علاوةً على ذلك، تكون الصفيحةُ الطبقيّة متماثلةَ المناحي عيانيّاً لأنه لدينا الآن:

$$A_{11} = A_{22} = U_1 t \qquad A_{12} = U_4 t \qquad A_{66} = U_5 t \qquad A_{16} = A_{26} = 0$$

$$B_{ij} = 0 \qquad D_{ij} = \frac{A_{ij} t^2}{12} \qquad (7.42)$$

حيث $A_{11}-A_{12}=2A_{66}$. بالرغم من أن الصفيحةَ الطبقيّةَ متماثلةُ المناحي ماكروياً، فإنها لا تزال غيرَ متجانسةٍ من طبقةٍ لأخرى، بحيث يكون توزيعُ الإجهادات متقطِّعاً وغيرَ مستمرٍّ يختلف عنه في حالةِ كون المادّة متماثلة المناحي.

من أجل صفيحة طبقيّة تتألّف من N طبقة متساوية السماكة $(N>2)$ مع زوايا توجُّهٍ مختلفة عن بعضها البعض بمُضاعفاتٍ من $\frac{\pi}{N}$، كما في الشكلَين 7–53 د و7–53 هــ، يصبحُ المجموعُ من أجل V_{1A} مساوياً لــ:

$$V_{1A} = \left[\cos\frac{2\pi}{N} + \cos\frac{4\pi}{N} + \cdots + \cos 2\pi\right]\frac{t}{N} \qquad (7.43)$$

ولكن لدينا:

$$\cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\left[n + \frac{1}{2}\right]x}{2\sin\frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \tag{7.44}$$

التي تُساوي صفراً من أجل $x = \frac{2\pi}{N}$. لدينا كذلك:

$$V_{3A} = \left[\sin\frac{2\pi}{N} + \sin\frac{4\pi}{N} + \cdots + \sin 2\pi\right]\frac{t}{N} \tag{7.45}$$

و:

$$\sin x + \sin 2x + \cdots + \sin nx = \frac{\sin\frac{1+n}{2}x \sin\frac{n}{2}x}{\sin\frac{x}{2}} \tag{7.46}$$

وهذا يُعطي صفراً من أجل $x = \frac{2\pi}{N}$. بطريقةٍ مُشابهة نجد أن $V_{2A}=0$ لأن العبارةَ في المعادلة (7.44) تنعدم من أجل $x = \frac{4\pi}{N}$، ويكون لدينا كذلك $V_{4A}=0$. وهكذا، بما أن الحدودَ المتغيِّرةَ معدومة، تصبح الـــ A_{ij} متماثلةَ المناحي وتُعطى بالمعادلة (7.42). مع ذلك، قيمُ الـــ B_{ij} لا تُساوي الصفر، وبالتالي لا تكون الصفائح الطبقيّة في هذه العائلة متماثلةَ المناحي، بل تُدعى شبه متماثلة المناحي (انظر الفقرة 3.4). تحدث هذه العائلة من الصفائح الطبقيّة من أجل دالة تنضيد الصفيحة الطبقيّة يوافِق القيمَ [0/±π/3]، [π/4-/0/4/π/2/ π]، إلخ. يمتلك دالة تصفيح أكثرُ تعقيداً قيماً متماثلة المناحي لـــ B_{ij} وD_{ij}.

تتمثّل النتيجةُ النهائيّة المهمة في تكامُل مساحة السطح الواقِع أسفلَ منحني الجساءة المتغيرة بدلالة زاوية الدوران من $\Phi=0$ إلى $\Phi=2\pi$، أي ما يوافِق دوراناً واحداً كامِلاً للصفيحة الطبقيّة:

$$\int_0^{2\pi} \overline{A}_{ij}\, d\phi \tag{7.47}$$

التكامُل

$$\int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} \cos p\phi \\ \sin p\phi \end{bmatrix} d\phi \tag{7.48}$$

معدوم عندما يكون p عدداً صحيحاً، وبذلك تُساهم الحدودُ الثابتةُ فقط وحدِها في المعادلة (7.33) التي تكون عندئذٍ مستقلّةً عنΦ. القيمُ المتوسّطة للتكامُل هي قيم الـــ A_{ij} متماثلة المناحي في المعادلة (7.42)، التي نحصل عليها من أجل صفائح طبقيّة مُوجَّهة بشكلٍ عشوائيّ، ومن أجل صفائح طبقيّة شبه متماثلة المناحي وفق نمط الاستطالة. تحتوي قيمُ الـــ A_{ij} على الحدود U_1,U_2,U_5، ولكننا بيّنا في المسألة 3.7.2 أن U_4 دالة لـــ U_1 وU_5. وهكذا يظهر أن U_1 وU_5 قياسان للصفائح الطبقيّة ثلاثيّة المناحي وللموادّ ثلاثيّة المناحي. يعني ذلك أن ثباتَ تكامُل الـــ $\overline{A_{ij}}$ بغضّ النظر عن دالة تصفيحي توجُّهات الرّقاقات يؤدّي إلى وجود قياسَين ثابتَين للصفيحة الطبقيّة، أي U_1 وU_5، يتعلّقان بمساحة السطح أسفل منحني الـــ $\overline{A_{ij}}$ بدلالة Φ. وبشكلٍ مماثِل، يمكن تبيان أن مساحةَ السطح الواقِع أسفلَ منحني الـــ $\overline{B_{ij}}$ بدلالة Φ مساوية للصفر، بينما مساحة السطح الموافِق لمنحني الـــ $\overline{D_{ij}}$ بدلالة Φ ثابتة. سوف نستخدم هذه النتائج في الفقرة الجزئية التالية.

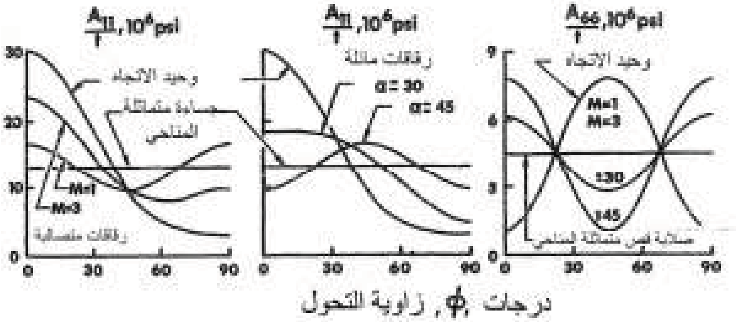
3.3.7.7 استخدام معلمات الجساءة اللامتغيّرة للصفيحة الطبقيّة في التصميم

تم في الفقرة الجزئية السابِقة تبيان أن المقدارَين اللامتغيرَين البسيطَين U_1 وU_5 مؤشِّران أساسيّان لمعلمات الجساءة الوسطيّة للصفيحة الطبقيّة. يتمّ اختزال هذين المقدارَين اللامتغيِّرَين في حالة الموادّ متماثلة المناحي إلى جساءتَي الاستطالة والقصّ $U_1=Q_{11}$ و $U_5=Q_{66}$. وفقاً لذلك، اقترح تساي وپاغانو أن يُدعى المقداران اللامتغيِّرَان ثُلاثييّ المناحي U_1 وU_5 بالجساءة متماثلة المناحي وجساءة القصّ ثلاثيّة المناحي، على التوالي [7−16 و7−17] ولاحظا أن هاتَين "الميزتَين متماثلتي المناحي" قياسٌ عمليٌّ لمقدرة الجساءة الأصغريّة في الصفائح الطبقيّة المُركَّبة. يمكن مقارنةُ هذه الخصائص

متماثلة المناحي مباشرةً بخصائصَ موادَّ متماثلة المناحي، بالإضافة إلى خصائص صفائح طبقيّة رقائقيّة أخرى. من الواضح أن معيارَ المُقارنة أكثرُ تعقيداً منه في حالة الموادّ متماثلة المناحي، لأنه لدينا الآن مقياسان U_1 وU_5، بدلاً من الجساءة متماثلة المناحي المألوفة U_1 أو E. لا يكون الاقتصارُ في المقارنة على قيم U_1 وحدها مُنصِفةً بسبب التأثير التهلكيّ للقيم المنخفضة عادةً لـــ U_5 في الموادّ المُركَّبة.

يمكن إنجازُ أمْثَلةِ صفيحةٍ طبقيّة أو تصميمُها بمساعدة معلمات الجساءة متماثلة المناحي. إبدأ مع صفيحة طبقيّة مؤلَّفة من طبقات أحاديّة المحور حيث $A_{ij}=Q_{ij}t$. إذا تغيّرت بعض توجُّهات الرُّقاقات عن $0°$ ، فعندها سوف تُعطى القيمُ الجديدةُ لـــ A_{ij} بواسطة علاقات الجدول 7–6. سوف تتغيّر قيمةُ $\overline{A_{ij}}$ الفعليّة مع زاوية الدورانΦ بما يتّفق مع الجدول 7–7. مع ذلك، يحدث التغيُّر دوماً حول القيم متماثلة المناحي. على سبيل المثال، يُبيِّن الشكل 7–54 تغيُّرَ $\overline{A_{11}}$ و $\overline{A_{66}}$ معΦ من أجل بورون–إيبوكسي (تُعطى الخصائصُ في الجدول 2–3). تُبين القيمُ الموافقةُ لكلٍّ من الصفيحة الطبقيّة أحاديّة المحور والمتماثلة المناحي، علاوةً على النتائج الموافِقة لصفيحتَين طبقيّتَين ذات رُقاقات متصالبة ولصفيحتَين طبقيّتَين ذات رُقاقات مائلة. من الواضِح أن مساحات السطوح أسفل جميع المنحنيات في الشكل 7–54 متساوية.

وهكذا، إذا جمعنا الصفيحةَ الطبقيّةَ ذاتَ الرُّقاقات المتصالبة مع M=1 مع الصفيحة الطبقيّة ذات الرُّقاقات المائلةِ مع $\alpha=45°$ والسماكة نفسِها، فإن الصفيحةَ الطبقيّة الناجمةَ متماثلة المناحي في نمط الاستطالة (هذه هي حالة الصفيحة الطبقيّة شبه متماثلة المناحي المُؤلَّفة من أربع طبقات، مع اختلافاتٍ في التوّجُه مساويةٍ لـــ $45°$). لاحِظ مع ذلك أنه حتى بالرغم من أن قيمتَي $\overline{A_{11}}$ و $\overline{A_{66}}$ ثابتتان بقطع النظر عن الدوران، فإنهما غير متعلقتَين مع بعضهما البعض بالطريقة نفسِها التي ترتبِط بها خاصيّتا المادّة متماثلة المناحي حقيقةً E وG.



الشكل 7-54: معلمات جساءة محولة لصفيحة طبقية (عن تساي Tsai وباغانو Pagano [7-17])

عرّف تساي وپاغانو الجساءةَ متماثلة المناحي وصلابةَ القصّ أيضاً في [7-16] على أنهما:

$$U_1 = \overline{E} \qquad U_5 = \overline{G} \tag{7.49}$$

وبيّنا من أجل موادَّ مُركَّبةٍ ثلاثيّةِ المناحي بشكلٍ كبيرٍ مثل البورون - إيبوكسي والغرافيت-إيبوكسي أنه:

$$\overline{E} \cong \frac{3}{8}E_1 + \frac{5}{8}E_2 \tag{7.50}$$

$$\overline{G} \cong \frac{1}{8}E_1 + \frac{1}{4}E_2$$

وهكذا، يكون التركيزُ المألوف على قيمة E_1 موضوعاً في غير محلّه. من الواضِح أن قيمةَ E_2 تساهِم في الخصائص المتوسِّطة الممثلة بشكلٍ قويّ. هذه التقريباتُ التي ذكرناها صحيحةٌ لدرجةٍ كبيرة، كما يمكن التحقُّق منها بواسطة حساباتٍ بسيطة.

3.7.7 مجموعة المسائل

1.3.7.7 بيّن أن المقدارَ $\overline{A_{11}} + \overline{A_{22}} + \overline{A_{12}}$ هو لا متغيِّرٌ عند إجراء الدوران حول المحور z، أي أنه لدينا $\overline{A_{11}} + \overline{A_{22}} + 2\overline{A_{12}} = A_{11} + A_{22} + 2A_{12}$ بقطع

النظر عن زاوية الدورانΦ. أوجد كذلك علاقةً تربط بين هذا المقدار ومقدار الجساءة المُختزَلة $Q_{11}+Q_{22}+2Q_{12}\Phi$.

2.3.7.7 بيّن أن المقدارَ $A_{66}-A_{12}$ هو لامتغيِّرٌ بالنسبة إلى الدوران حول المحور z، أي لدينا

$$\overline{A_{66}}-\overline{A_{12}}=A_{66}-A_{12}$$

جد كذلك علاقةً تربط بين هذا المقدار ومقدار الجساءة المُختزَلة اللامتغيِّرة $Q_{66}-Q_{12}$.

3.3.7.7 جِد قيمتَي المقدارَين اللامتغيِّرَين لجساءة الإقران انحناء–استطالة $\overline{B_{11}}+\overline{B_{22}}+2\overline{B_{12}}$ و $\overline{B_{66}}-\overline{B_{12}}$

4.3.7.7 جِد علاقةً تربط بين المقدارَين اللامتغيِّرَين لجساءة الانحناء $\overline{D_{11}}+\overline{D_{22}}+2\overline{D_{12}}$ و$\overline{D_{66}}-\overline{D_{12}}$ والمقادير اللامتغيِّرة للجساءة المُختزَلة ولجساءة الاستطالة.

4.7.7 تصميم الصفائح الطبقيّة

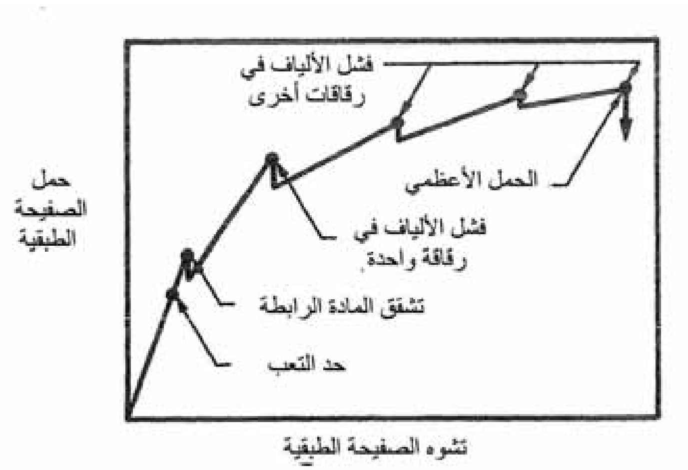
تكون الأدواتُ التحليليّةُ لإنجازِ تصميم الصفيحة الطبقيّة ثنائيّةَ على الأقلّ. هناك أوّلاً مفاهيمُ الجساءة اللامتغيِّرة للصفيحة الطبقيّة، التي طوّرها تساي وباغانو [7–16 و7–17]، والمُستعملة لتغيير معلمات جساءة الصفيحة الطبقيّة. تأتي ثانياً تقانيات الأمْثَلة البنيوية ،كما وصفَها شميدت (Schmit) [7–12]، التي يمكن استعمالُها لتزويدنا بإجرائية اتّخاذِ قرارٍ من أجل تغيير قيمِ معلمات تصميم الصفيحة الطبقيّة. إن هذا الثنائيّ من التقانيات مناسِبٌ جداً من أجل تصميم البنى المُركَّبة، لأن إمكانيّةَ تفصيل المادّة لتحقيق متطلّباتٍ بنيويةٍ والحاجةَ المتزامنةَ إلى ذلك موجودتان بدرجةٍ لا تُرى في الموادّ ثلاثية المناحي.

يكمن مفتاحُ تصميم صفائح طبقيّة فعّالة في متانة كلٍّ من سعة الحمولات وطبيعة اتّجاهاتها بدون أن يرافِق ذلك تصميمٌ مُفرَط بالنسبة إلى أيٍّ من هاتَين الخاصّتَين. يعني ذلك أن الصفيحة الطبقيّة يتمّ تكييفُها لكي تُحقِّق على وجه التفصيل متطلّباتٍ محددةٍ. تكون بنى المصنوعة من موادّ متماثلة المناحي عادةً غيرَ فعّالة، أي مُصمَّمة فوق المطلوب، لأنه لا يمكن تجنُّبُ الزيادةِ في المتانة والجساءة في أحد الاتّجاهات. من خلال اعتبارٍ مناسِبٍ للحمولات ولاتّجاهاتِها، يمكن إنشاءُ صفيحة طبقيّة من رُقاقات منفردة بطريقةٍ تسمح لها بمتانة هذه الحمولات تماماً وليس أكثر (مع وجود عامِل أمانٍ مناسِب بالطبع). على سبيل المثال، يمكن استعمالُ صفيحة طبقيّة ذات رُقاقات متصالبة لمتانة حمولاتٍ في الاتّجاهَين الرئيسيَّين 1 و2، حيث تتمّ متانة N_1 وM_1 بواسطة A_{11},A_{12}, D_{12},D_{11} ومتانة N_2 وM_2 بواسطة A_{12},A_{22},D_{12} وD_{22}، شريطةَ كون الصفيحةِ الطبقيّة متناظرةً. في أوضاعٍ أكثرَ تعقيداً –حيث تُطبَّق قوى قصّ وعزومُ فتلٍ– قد نحتاج إلى صفائح طبقيّة ذات رُقاقات مائلة من أجل الحصول على القيم الضروريّة لمعلمات جساءة القصّ والفتل. تغدو جليّةً ضرورةُ اعتبارِ عوامِلَ تصميمٍ أخرى عندما تُؤخَذ مُميِّزاتُ المتانة للصفائح الطبقيّة بعين الاعتبار.

إن تصميمَ الصفيحة الطبقيّة سيرورة أعقدُ بكثير من تصميم الصفيحة المعدنيّة. هناك متغيرٌ تصميمٍ وحيدٌ من أجل صفيحةٍ معدنيّة تحت حمولةٍ مُعيَّنة هو سماكةُ الصفيحة (إلاّ إذا لم تكن مادة الصفيحةُ المعدنيّة مُحدَّدةً). يتضمّن تصميمُ الصفيحة الطبقيّة، حتّى من أجل حمولةٍ بسيطة، إيجادَ عدد الرُّقاقات وتوجُّهات كلّ رُقاقة (حتّى ولو تمّ تحديدُ المادّة). وهكذا، ينبغي تحديدُ قيمِ متغيرات تصميمٍ أكثر بكثير في حالة صفيحةٍ طبقيّة منه في حالة صفيحة معدنيّة. علاوةً على ذلك، يتضمّن تصميمُ الصفيحة الطبقيّة قضايا مثل الجساءة، والمتانة، وامتصاص الطاقة (مساحة السطح أسفل منحني الحمولة–الانفعال) كما يبيِّنُها بشكلٍ ضمنيّ الشكل 7–55 إلى جانِب عمر التعب الذي لا يمكن تصويرُه. يُبيِّن كذلك العدد الكبير الممكن لحوادِث الإخفاق التي تحصل خلال تحميل الصفيحة الطبقيّة والتي تؤثِّر في ملاءَمة صفيحةٍ طبقيّة خاصّةٍ ما لمجموعةٍ من متطلّبات التصميم.

سيتم في هذه الفقرة تقديم مفهومٍ عامٍّ وشامِلٍ لتصميم الصفائح الطبقيّة. يعني ذلك أنه سيتم تناول الطبيعةَ العامّة لتصميم الصفائح الطبقيّة وكيفيّةَ تغيير الصفيحة الطبقيّة من

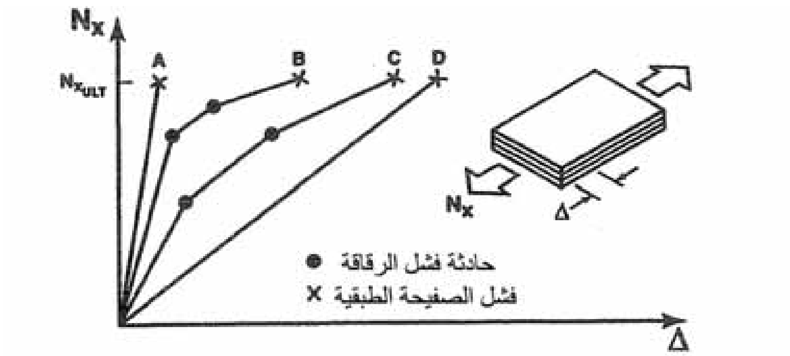
أجل تحقيق أهداف التصميم، مُعبَّراً عنها بدلالة الجساءة، والمتانة، وامتصاص الطاقة، وعمر التعب، بشكلٍ أفضل. تقوم المقاربةُ العامّة على الحصول على صفيحة طبقيّة ذات منحني (أومنحنيات) حمولة – انفعال حتى الإخفاق (الإخفاق) يُحقِّق متطلّبات التصميم البنيوي للصفيحة الطبقيّة مُعبَّراً عنها بدلالة الجساءة، والمتانة، وامتصاص الطاقة، وعمر التعب. يكون هذا المُتطلَّبُ الرّباعيّ في الحالة الطبيعيّة أعقدَ بكثيرٍ من الوضع الموافِق لصفائح طبقيّة عديدة مع متطلّبات تصميم بسيطة. مع ذلك، سوف نعالِج هذه الحالةَ العامّة من أجل تحقيق اكتمالِ النظرةِ الشاملةِ على سيرورة تصميم الصفيحة الطبقيّة.



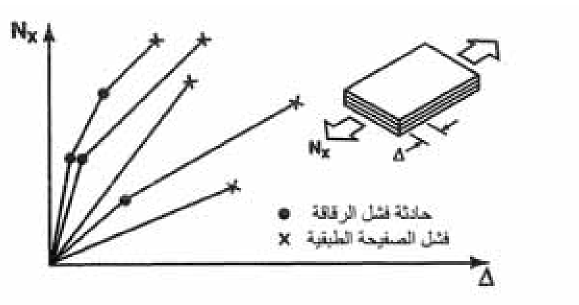
الشكل 7–55: الحوادث خلال تحميل الصفيحة الطبقية

يمكن لطبيعةِ سلوك الصفيحة الطبقيّة أن تمتدّ من السلوك فائق القصافة (الهشاشة) إلى السلوك عالي المُطاوَعة (قابليّة الانفعال). يُبدي المنحني A (صفيحة طبقيّة A) في الشكل 7–56 سلوكاً قصفاً نموذجيّاً عند تطبيق حمولةِ إخفاق محوريّة خاصّة. تُظهِر الصفائحُ الطبقيّة B, C, D في الشكل 7–56 أنواعَ سلوكٍ أكثرَ مُطاوعةً بمعنى انفعالاتٍ (وانفعالاتٍ نسبيّة) أكبر عند الإخفاق. يكمن الاختلافُ الرئيسيّ بين أنواعِ السلوك الأربعة هذه عند حدوث الإخفاق نفسِه في مقدار الطاقة المُمتَصّة. علاوةً على ذلك، يتغيّر الميلُ الابتدائيّ لكلّ منحني حمولة –انحراف. تُمثِّل الصفيحةُ الطبقيّة B دمج الميل الابتدائيّ الأعظميّ مع امتصاص الطاقة الأكبر. أمّا الصفيحة الطبقيّة C فتُمثِّل امتصاصَ طاقةٍ مُعتبَراً، ولكنها توافِق أيضاً حمولةَ إخفاق منخفضةً جداً للرُّقاقة الأولى.

وهكذا، لن تكون الصفيحة الطبقيّة C تحت حمولةِ التعب خياراً جيّداً لأنه ينبغي على حمولةِ التشغيل أن تكونَ أقلَّ من حمولةِ الإخفاق المنخفضةِ نسبيّاً للرُّقاقة الأولى. إن وجودَ هذه الأنواع المختلفة من سلوك الصفائح الطبقيّة هو تعقيدٌ إضافيٌّ في التصميم بالمقارنة مع طبيعة بنى المعدنيّة وفوقها. مع ذلك، تُقدِّم أيضاً أنواعُ السلوك المختلفة هذه فرصةً إضافيّةً من أجل حريّةٍ أكبر في التصميم.



الشكل 7–56: السلوكيات المحتملة لصفيحة طبقية



الشكل 7–57: أثر تغيير دالة تنضيد الصفيحة الطبقية

يمكن تغييرُ أنماط السلوك المختلفة للصفيحة الطبقيّة عبر تغيير دالة التنضيد في الصفيحة الطبقيّة. تشمُل جوانب السلوك المتأثِّرة الجساءةَ، والمتانة، وامتصاصَ الطاقة، وعمرَ التعب. يمكن تبسيط مناقشة جوانب السلوك هذه عبر اعتبار حمولةٍ محوريّة بسيطة N_x فقط – كما في الشكل 7–57– بخلاف الحمولةِ الأكثر عموميّة التي تحتوي

على جميع القوى والعزوم. تعتمد الجساءةُ بشكلٍ رئيسيّ على دالة التنضيد، أي على توجُّهات الرُّقاقات المنفردة، مع بعض التبعية لعدد الطبقات. تعتمد المتانة بشكلٍ أساسيّ على عدد الطبقات، بالرغم من أن دالة التنضيد تبقى مهمّة. أمّا امتصاصُ الطاقة وعمرُ التعب فيعتمدان على كلٍّ من دالة التنضيد وعدد الرُّقاقات. نستطيع، إلى جانب تغيير هذه المتغيرات، أن نُغيِّرَ حمولةَ إخفاق الرُّقاقة الأولى.

تكمن مسألةُ تصميم الصفيحة الطبقيّة في إيجاد صفيحة طبقيّة تُحقِّق أهدافَ أداء التصميم مُعبَّراً عنها بدلالة المتانة، والجساءة، وامتصاص الطاقة، وعمر التعب، بالإضافة إلى قياساتِ استجاباتٍ بنيوية أخرى، كما في الشكل 7–58. يمكن بلوغُ هذه الأهداف عبر تغيير دالة التنضيد و/أو عدد الطبقات من أجل تغيير سلوك الصفيحة الطبقيّة حتى بلوغُ الاستجابة البنيوية المنشودة.



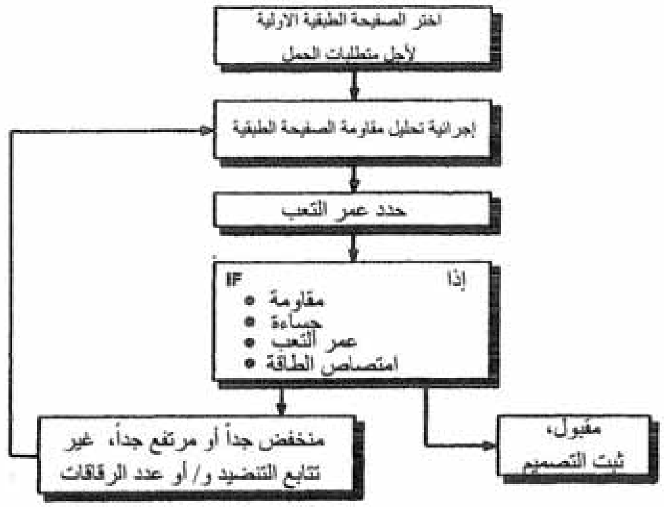
الشكل 7–58: مشكلة تصميم الصفيحة الطبقية

يعني ذلك أنه يمكن التعبير عن المسألة البنيوية لتصميم الصفيحة الطبقيّة كما يلي: بمعرفة قيمَ N_x, N_y، و N_{xy}، جِدْ دالة التنضيد في الشكل 7–51. يُقصد هنا: حدِّدْ توجُّهاتِ الرُّقاقات $\theta_1, \theta_2, \theta_3, ...$، والأعدادَ الضروريّة من أجل كلّ توجُّه، أي ما هي الأعداد $n_1, n_2, n_3, ...$ ؟

من وجهة نظرٍ سيرورة، لا يمكن للطبقات المُضافة في سيرورة تصميم الصفيحة الطبقيّة أن تكونَ لها اتّجاهات ألياف اعتباطية تماماً. إذا كانت توجُّهات الألياف غيرَ محدودة، فعندها يمكن لسيرورة التصميم أن تقودَ أحياناً إلى صفائح طبقيّة تختلف تماماً عن أيّ صفيحةٍ طبقيّةٍ أنشِئت سابقاً. وهكذا، لن يكون ممكناً التوقع بقيمةِ المتانة، وخصوصاً بقيمة عمر التعب ، أو معرفتُهما بالوثوقيّة الضروريّة. يعني ذلك أن هناك خطراً مُعتبَراً عند اقتراحِ صفيحةٍ طبقيّة جديدةٍ تماماً.

علاوةً على ذلك، لا تكون بالتأكيد كلفةُ تقييمِ متانة وعمرِ تعبِ صفيحةٍ طبقيّة جديدةٍ بديهية. وهكذا تُبقي غالباً إضافةُ طبقاتٍ جديدةٍ مع توجُّهات أليافٍ مُستعمَلةٍ ممارسةَ التصميم في المنطقة المألوفة لعائلات الصفائح الطبقيّة شائعة الاستعمال التي تكون خصائصها المميزة معروفةً بشكلٍ جيّدٍ نسبيّاً، بحيث نستطيع التصميمَ بثقةٍ وبتكلفةٍ صغيرةٍ في النقود الزمن.

يمكن التعبيرُ عن الطريقة التي يتم بها مقاربة تصميم الصفيحة الطبقيّة على شكلِ مُخطَّط كما في الشكل 7–59. يتمّ هنا انتقاء صفائحَ طبقيّةٍ ابتدائيّة ما بشكلٍ كيفيّ من أجل البدء بالإجرائيّة. بعدها، يتمّ تقديرُ سلوك الحمولة انحراف للصفيحة الطبقيّة عبر استعمال إجرائيّة تحليل متانة الصفيحة الطبقيّة التي وُصفت في الفقرة 5.4. هذا التقديرُ نظريٌّ في طبيعتِه. تكمن الخطوة التالية في تقدير عمر التعب للصفيحة الطبقيّة، ولا يمكن إجراء هذا التقدير إلاّ تجريبيّاً، بالرغم من أن تقدُّماً قد تمّ تحقيقُه في تقانيات التوقع بعمر حياة الصفائح الطبقيّة. عند هذه المرحلة، نقوم بفحص المتانة، والجساءة، وعمر الحياة، وامتصاص الطاقة في الصفيحة الطبقيّة المُرشَّحة. إذا كانت قيمُ هذه المقادير عاليةً جداً أو منخفضةً جداً، توجَّب علينا تغييرُ دالة التنضيد و/أو عدد الطبقات إلى أن تُحقِّق الاستجابةُ الأهدافَ المنشودة.

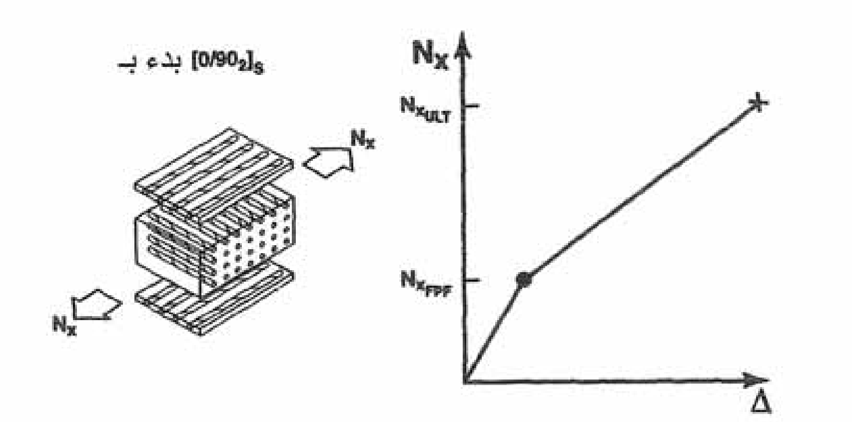


الشكل 7–59: إجرائية تصميم صفيحة طبقية

في أفضل الظروف، تمتلك الصفيحةُ الطبقيّة عند هذ التكرار من سيرورة التصميم سلوكَ تعبٍ معروفٍ. أمّا في ظروفٍ أقلَّ جودةً، فتكون الصفيحةُ الطبقيّة قريبةً فيما يخصّ دالة التنضيد من صفائحَ طبقيّةٍ ذات سلوك تعبِ معروفٍ. وأخيراً، تحت ظروفٍ أقلُّ ما يُقال عنها إنّها صعبة ومُزعِجة، يكون سلوكُ التعب للصفيحة الطبقيّة مجهولاً بشكلٍ كامِل. ينبغي في مثل هذه الحالة إمّا (1) رفضُ الصفيحة الطبقيّة من سيرورة التصميم باعتبارِها كياناً غيرَ معروفٍ، أو (2) أن يتمّ تقييمُ سلوك التعب لهذه الصفيحة الطبقيّة. من الواضِح أن الخيارَ الأوّل مُخيِّبٌ للآمال، وأن الخيارَ الثاني مُكلِف ويستهلك زمناً، بخلاف الوضع في حالة تصميم بنى معدنيّة. الجانبُ الوحيدُ المُساعِد هو حقيقةُ امتلاكِ بنى المُركَّبة عموماً أعمار تعبٍ أطول من بنى المعدنيّة.

لنعتبر مثالاً يوضِّح المفاهيمَ السابقة. لنفترِض أن خيارَنا الابتدائي للصفيحة الطبقيّة هو $[0°,90°_5]_S$، مع سلوك حمولة – انحراف مُبيَّنٌ في الشكل 7–60. سوف يبدو بوضوحٍ أن هذه الصفيحةَ الطبقيّة غيرُ مناسبةٍ للحمولة لأن ألياف غالبيّة رقاقاتها موجهة في الاتّجاه الخاطئ. مع ذلك، نتعامل مع هذا المثال كمُمثِّلٍ على الظرف الشائِع

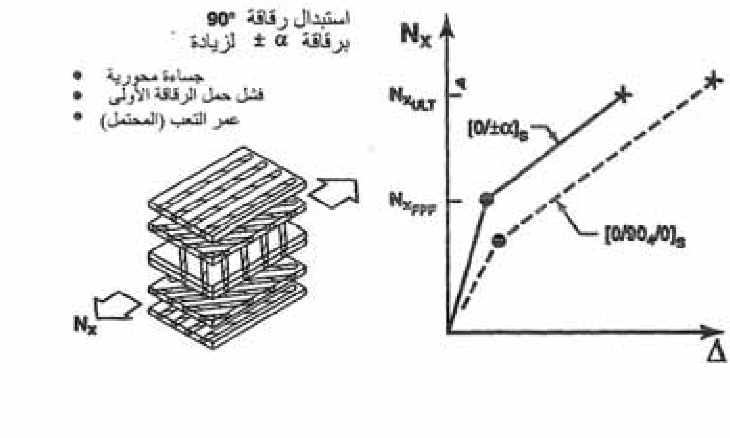
للتصميم حيث يخضع كلُّ عنصرٍ بنيوي لحمولاتٍ عديدة مختلفة. بعضُ هذه الحمولات ليست حرجةً أو مُقيِّدةً للتصميم من أجل كلّ عنصرٍ بنيوي. يعني ذلك أن بعض الحمولاتِ يتمّ قبولُها بسهولة من قبل العنصر البنيوي. سوف تتقبّل هذه الصفيحة الطبقيّة بوضوحٍ حمولةً أكبر في الاتّجاه y، ولكننا سوف نتقصّى مقدرتَها في الاتّجاه x. تخفق الطبقاتُ ذات الزاوية °90 عبر تصدُّعٍ بشكلٍ موازٍ للألياف (عموديٍّ على الحمولة المُسيطِرة). تخفق طبقاتُ الزاوية °0 بالتزامن مع تصدُّع المصفوفة في طبقات الزاوية °90 –أو بعدَه مباشرةً– أيضاً عبر التصدُّعِ بشكلٍ موازٍ للألياف، كما بيّن تساي (Tsai) في [7–18]، وكما تمّ إيجازُه في الفقرة 5.4. مع ذلك، لا تزال طبقاتُ الزاوية °0 قادرةً على تحمُّل حمولةٍ مُعتبَرةٍ في الاتّجاه x. في الحقيقة، تفوق الحمولة النهائيّة بعدّة مرّات حمولةَ الإخفاق للرُّقاقة الأولى. لاحِظ أن هذه الصفيحة الطبقيّة قادرِةٌ أيضاً على تحمُّل حمولةٍ مُعتبَرة في الاتّجاه y، ولكن هذه القضيّة لن تعالَج.



الشكل 7–60: خيار الصفيحة الطبقية الأولى

لنفترض أننا استبدلنا بطبقات الزاوية °90 رُقاقاتِ الزوايا α± في محاولةٍ لزيادة الجساءة المحوريّة ولزيادة حمولةِ الإخفاق للرُّقاقة الأولى، كما في الشكل 7–61. يزداد أيضاً ميلُ منحني الحمولة – انحراف بعد إخفاق الرُّقاقة الأولى عندما تحلّ رُقاقاتُ الزوايا α± محلَّ طبقاتِ الزاوية °90. مع ذلك، يتناقص امتصاصُ الطاقة مع إجراءٍ هكذا

تغييرٍ في دالة التنضيد. وتكون أعمار التعب المرافِقة غيرَ معروفةٍ ما لم يتمّ صنعُ كلتا الصفيحتَين الطبقيّتَين وخضوعُهما لتحميلِ التعب.



الشكل 7–61: خيار ثان لصفيحة طبقية

تنصّ الإجرائيّةُ العامة لتصميمِ الصفيحة الطبقيّة على الاستمرار في تغيير دالة التنضيد و/أو عدد الرُّقاقات حتى الحصول على المستويات المنشودة للمتانة، وللجساءة، ولعمر الحياة، ولامتصاص الطاقة. مع ذلك، ينبغي أن ندرِك أن هناك قيداً مهمّاً جداً على إجرائيّة التصميم يتمثّل في عدم إمكانيّة تحديد عمر التعب إلاّ عبر القياس، وليس عبر التوقع.

هناك أداةٌ مُساعدة ممكنة لإجرائيّة تصميمِ الصفيحة الطبقيّة تكمن في معيارٍ خاصّ لإخفاق الصفيحة الطبقيّة يستند إلى معيار الانفعال الأعظميّ. يتمّ في مثل هذا المعيار تجاهُل جميع أنماط إخفاق الرُّقاقات باستثناء إخفاق الليف.يعني ذلك أننا ننظر إلى تصدُّع المصفوفة على أنه أمرٌ غيرُ مهمّ. تتمّ ممارسةُ هذا المعيار من خلال إيجاد الانفعالات النسبيّة في اتّجاهات الألياف في كلّ طبقة. عندما تتجاوز هذه الانفعالات النسبيّة قيمةَ الانفعال الموافِق لإخفاق الليف في نوعٍ مُعيَّن من الطبقات، فإننا نعتبر أن تلك الطبقةَ قد انهارت. من الواضِح أننا نحتاجُ إلى رُقاقاتٍ أكثر موافِقةٍ لتوجُّه الليف هذا من أجل متانة الحمولة المُطبَّقة بشكلٍ ناجِح. يعني ذلك أن هذا المعيارَ يسمح لنا بالمحافظةِ على هويّة الرُّقاقة أو الرُّقاقات المخفقة، بحيث يمكن إضافةُ رُقاقات من ذلك

النوع (موافِقة لتوجُّه الليف هذا) إلى الصفيحة الطبقيّة من أجل تحقيق هامش أمان موجِب.

تتأثّر الإجهاداتُ و/أو الانفعالات المسموحُ بها في سيرورة التصميم بعدّة عوامِل:

- تركيز الإجهادات الناجمة عن الثقوب
- الشروط الحارّة، والرطبة
- الأثلام
- الشفاه الحرّة
- عامِل الأمان المطلوب

يعني ذلك أن تصميماً بنيوياً حذراً ينبغي أن يتناول قضايا "وماذا لو".

5.7.7 خلاصة

وصفنا بشكلٍ عامّ بعضَ المزايا البنيوي لسيرورة تصميم الصفيحة الطبقيّة مع توصيفٍ عامٍ لمفاهيم الأمثلة. هذه السيرورة غير مُحدَّدة، بخلاف حالة الصفيحة المعدنيّة. ينبغي استخدامُ إجرائيّة تكراريّة من أجل توجيه التصميم نحو تحقيق مُتطلَّباتِه.

8.7 فلسفة تحليل التصميم في البنى المُركَّبة

1.8.7 مقدِّمة

رأينا في هذا الكتاب، وفي كتبٍ أخرى، طرائقَ تحليلٍ مُعقَّدةً عديدةً بالإضافة إلى طرائق تصميمٍ غير بسيطة من أجل البنى المُركَّبة. قد يتمثَّل ردّ الفعل الأوّليّ في أن طرائقَ التحليل والتصميم هذه صعبةٌ بشكلٍ زائدٍ عن اللزوم، ورادعةٌ حقيقةً. إن بعضَ الطرائق معقدّةٌ جداً، وتكتنفُها مظاهرُ أداءٍ عديدةٍ لا بدّ من أخذها بعين الاعتبار، بحيث نجد صعوبةً في الإلمام بجميع العوامِل وثيقةِ العلاقة بالموضوع المدروس. مع ذلك، لدينا بعض الأهداف البنيوي جداً في التصميم البنيوي. نعرف أنه لدينا خصائص جدّ جذّابة

للتعامُل معها عندما نرغب باستعمال أو اعتبار موادّ مركبة من أجل تطبيقاتٍ بنيوية. نعرف أنه إذا استفدنا من هذه الخصائص بشكلٍ صحيح، فإننا نقدر على بناء بنى تكون، بفضل صنعِها من موادّ مُركَّبة، أخفَّ وزناً، أو ذات متانة وجساءةٍ أكبر، وقرائن أداءٍ أجودَ عموماً من المعادِن. نرغب تحقيق هذه الأهداف، ومع ذلك لا تزال توجد دواعٍ جدّيّة للقلق ولخلق المشاكِل. سوف نتناول هذه المسائلَ واحدةً فواحدة، وسوف نُقدِّم بعض التوصيات من أجل تصميمٍ فعّال للبنى المُركَّبة. يحذو القسمُ الأعظمُ من المناقشة في هذا المقطع حذوَ موضوعِ محاضرةٍ مُبصِّرة خلاّقةٍ ومُلهِمةٍ حول تصميم بنى قدّمها جيمس أشتون (James E. Ashton) في مؤتمر "الموادّ"، وبنى، والديناميك البنيوي لـــ "AIAA/ASME/SAE" عام 1975 [7–19].

2.8.7 مجالات المشاكِل

تتعلّق مجالات المشاكِل في مجال تصميم بنى المُركَّبة ببعضٍ من الملاحظات التالية. تكمن الملاحظة الأولى في أن السمات المميزة لأداء الموادّ المُركَّبة أعقدُ بكثير من التي للمعادِن. لا تظهر استجاباتُ الإقران انحناء، استطالة، والإقران قصّ، استطالة، والإقران انحناء، فتل عموماً في بنيةٍ معدنيّةٍ، ولكنها تظهر في البنية المُركَّبة، وبالتالي ينبغي عليك معرفةُ كيفيّة التعامُل معها. مع ذلك، يُمثِّل هذا الظرفُ وضعاً مُخيفاً نوعاً ما.

يُضخِّم أحياناً العديدُ من المُحلِّلين بعضَ مجالات المشاكل التي ذكرناها. يعني ذلك أن هؤلاء يعطون أهمّيّةً كبيرةً أحياناً لمميزّة سلوكية خاصّة. يمكن لهذه الخاصية المميّزة ألاّ تكون مهمّةً إلاّ في نمطِ استجابةٍ لميزة سلوكية صغير، وينبغي عليك معرفةُ محدوديّةِ صلاحيّة الخاصية هذه. من ناحية أخرى، يتمثّل عملُ المُصمِّم إمّا بتجنُّب جميع مجالات المشاكِل هذه، أو بالتغلُّب عليها بطريقةٍ ما. يُشبِه الوضعُ حالةَ وجود جبلٍ أمامك وعليك بلوغ جانبه الآخر. فإمّا أن تتسلّق هذا الجبل، وعندها ستدرك تماماً أنه موجود وأنك قد تغلبت على المشكلةَ، أو أن تدورَ حولَه، وعندها ستكون ببساطةٍ قد تجنّبت الجبلَ. ينبغي عليك في كلتا الحالتَين الانتباهُ إلى وجود الجبل من أجل التعامُل معه بشكلٍ مناسِب.

حيث إننا نواجِه بعض مجالات المشاكل في مجالَي تحليل البنى المُركَّبة وتصميمِها، ينبغي علينا إمّا تجنُّبها أو التعامُل معها مباشرةً، وإلاّ فإن البنية لن تعمل بالطريقةِ التي نتوقّعها لها. إذا لم ندركْ أن الإقران انحراف – استطالة هو أمرٌ ممكن الحدوث ولم نتأكّد من تجنُّبه، فعندها يمكن أن نحصلَ على بنيةٍ ذات استجابةٍ كبيرةٍ للإقران انحراف – استطالة، ويكونَ لدينا جناحٌ يسلك سلوكاً مغايراً تماماً لما ننشده من أجل التطبيق المُقترَح.

هناك ملاحظةٌ عامّة حول جميع مجالات المشاكِل المتنوِّعة التي يمكننا التفكيرُ بها، وهي أنها عادةً لا تحدث، أو تتحكّم بالأمور، كلُّها في الوقت نفسه. وفقاً لقانون مورفي (Murphy)، إذا كانت جميعُ العوامِل ناظِمةً ومتحكِّمةً بالأمور في الوقت نفسِه، فنحن في وضعٍ سيّء. ولكنها لا تفعل ذلك.

لنعتبر لائحةً من مجالات المشاكِل الخاصّة. لقد أُشير سابقاً إلى مشكلةَ الإقران انحناء – استطالة. علاوةً على ذلك، يدعو عدم تماثُل المناحي إلى القلق من أجل صفيحةٍ طبقيّة ، وخاصة ذلك الإقران قصّ – استطالة، كما أن هناك أيضاً الإقران انحناء – فتل. مع ذلك، سأفضّل ألاّ أدعوَ هاتَين الخاصّتَين للصفيحة الطبقيّة بعدم تماثُل المناحي، لأنه يجب الاحتفاظ بهذا المُصطلَح من أجل سلوك المادّة. يمكن استخدامُ الميكانيك الميكروي للتوقع بالأداء المُشترَك للمصفوفة والألياف. يمكن لأداء الإجهاد – الانفعال وحتى للأداء البنيوي أن يكون في الحقيقة غيرَ خطّيّ، وفي هذه الحالة، ينبغي أن يكونَ لدينا شكلٌ ما من التحليل اللاخطّيّ. يوجد برامِج أمثَلة متنوِّعة، كما ناقشنا في الفقرة السابِقة. وفي بعض الصفائح الطبقيّة، ينبغي التحكُّم بتأثير غياب الحافة الحرة للصفيحة الطبقيّة. علاوةً على ذلك، تظهر أهمّيّةُ إجهادات القصّ العرضانيّة في الصفائح الطبقيّة المُركَّبة عند بلوغِ نسبةِ التباعُد إلى السماكةِ أعلى منها في الصفائح متماثلة المناحي. تعتبر جميعُ مجالات المشاكِل الوارِدة في الشكل 7–62 مُربِكةً نوعاً ما، وعلينا أن نتعامَل معها.

- تزاوج استطالة.قص و تزاوج انعطاف ـ فتل
- تزاوج انعطاف-استطالة
- ميكانيك ميكروي
- سلوك مواد لاخطي
- الإجهادات بين الصفائح
- إجهادات القص العرضانية
- أمثلة الصفيحة الطبقية

الشكل 7–62: مجالات المشاكل في التحليل والتصميم

3.8.7 فلسفةُ التصميم

تتمثّل إحدى الطرق الممكنة للبدء بالتكيُّف ومجاراة جميع هذه المشاكِل في ممارسة فلسفةِ تصميمٍ مُقيِّدةٍ نوعاً ما، حيث يتمّ السماحُ فقط لبعض عائلات الصفائح الطبقيّة في التصميم. بعبارةٍ أخرى، لنفترض أننا نقتصِر في دالة التنضيد للصفائح الطبقيّة على واحدةٍ من فئاتٍ ثلاثة: $[\pm\theta]_S$، $[\pm\theta/0°]_S$، $[\pm\theta/0°/90°]_S$. في جميع هذه الحالات الثلاث، تتراوح قيمُ θ بين °30 و°60. ما هي خصائص الأداء التي تُبديها هذه الصفائح الطبقيّة؟ أوّلاً، إنها جميعاً متناظِرة، وبالتالي أستبعدنا تلقائيّاً استجابةَ الإقران انحناء – استطالة. لا توجد هذه الاستجابةُ لأننا "صمّمناها بحيث تغيب".

علاوةً على ذلك، لا يوجد الإقران قصّ – استطالة بفضل حقيقةِ امتلاكِنا للعددِ نفسِه من الطبقات الموافِقة لـــ θ+ وθ−. نُميِّز هذا النوعَ من الصفائح الطبقيّة بأنّ له معلمات جساءة في نمط الاستطالة ندعوها ثلاثيّة المناحي. أفضِّل القولَ ببساطة إن معامِلَي جساءة الاستطالة A_{16} وA_{26} يساويان الصفر. مع ذلك، لا تعني مواصفة الصفيحة الطبقيّة عدمَ حدوث الإقران انحناء–فتل. في الحقيقة، إن الإقران انحناء – فتل موجود، ويكمن السؤالُ الوحيدُ عنه في درجة أو شدّة هذا الإقران. تُمثِّل هذه المجموعةُ من مواصفات الصفيحة الطبقيّة فلسفةَ تصميمٍ ممكنة. لنقمْ بتفحُّص مجالات المشاكل في بنى المُركَّبة على علاقةٍ مع هذه الفلسفة المُقترَحة.

4.8.7 التحليل "غير متماثل المناحيّ"

سوف نُفكِّك مجال المشاكل الأولى لما يُدعى بالتحليل غير متماثل المناحي إلى منطقتَين جزئيّتَين: إقران القصّ – استطالة وإقران انحناء – فتل. لقد لاحظنا سابقاً من أجل أكثر الصفائح الطبقيّة تعقيداً في فلسفة التصميم المُقترَحة سابقاً أن معاملَي الجساءة A_{16} وA_{26} يساويان كلاهما الصفر. لا يوجد لإقران قصّ – استطالة في سياق هذه الفلسفة. مع ذلك، من السهل نسبيّاً في تحاليل البنى المُركَّبة الحديثة، تضمينُ معالجةِ الإقران قصّ–استطالة، وبالتالي لا ينبغي أن ترتبك بجانب الأداء هذا، أو بحسابات تأثيره.

أمّا إقران انحناء – فتل فهو كائنٌ مختلفٌ تماماً. وببساطة، لا يُساوي معامِلا الجساءة الناظِمان D_{16} وD_{26} الصفرَ أبداً من أجل أيّ صفيحةٍ طبقيّةٍ أكثرَ تعقيداً من صفيحةٍ طبقيّة ذات رُقاقات متصالبة. لا يمكنك أن تُجبِرَ معاملَي الجساءة هذين على أن يسعيا إلى الصفر ما لم تفعل شيئاً آخر للصفيحة الطبقيّة. يمكنك أن تجعل قيمتيهما تسعيان إلى الصفر إذا تركت الصفيحةَ الطبقيّةَ غيرَ متناظرة، ولكن هذا الأمر يشابِه وضعَ سرقة بطرس لكي ندفع لــبولس. في الحقيقة، ليس من الصعوبة الجمّة أن نشمل في أغلب التحاليل المعاصرة تأثيرَ معلمات الإقران انحناء–فتل هذه، ولذلك أدعوك ألاّ تخشاها. تكمن ملاحظةٌ أخرى في أنه إذا وُجِدت طبقاتٌ موافقة لزاوية $\theta\pm$ ما في صفيحةٍ طبقيّةٍ وإذا تمّت زيادةُ عدد الأزواج للطبقات $\theta\pm$، فعندها سوف تسعى معلمات جساءة الإقران انحناء – فتل إلى الصفر مع زيادة عدد الأزواج هذا. من أجل صفيحة طبقيّة عامّة نوعاً ما، يكون كلٌّ من ظاهرتَي الإقران قصّ – استطالة والإقران انحناء – فتل مهملتين لِصِغَرهما في حال وجود عددٍ كبيرٍ كفايةً من هذه الأزواج للطبقات $\theta+$ و$\theta-$ في الصفيحة الطبقيّة. هذه ملاحظةٌ عامّة، ولكن يمكن أن تجد ظروفاً قد لا يكون فيها هذا الاستنتاجُ صحيحاً.

5.8.7 الإقران انحناء–استطالة

سوف نميل عموماً إلى تجنُّب استجابة الإقران انحناء – استطالة في أغلب الظروف، وذلك لأنه في حالة وجود إقران انحناء – استطالة فإن الصفيحة الطبقيّة سوف تلتوي عند خروجِها من المكبس الساخِن أو الصادّ والموصِد (autoclave) أو أيّ جهازٍ

تسخينٍ آخر يتمّ استعمالُه، وهذا الوضعُ غيرُ مرغوبٍ به عادةً. هناك ظروفٌ يكون فيها مثلُ هذا التغيير في الشكلِ مرغوباً به بشدّة، ولكنه عموماً غيرُ منشودٍ. أنشأ غرومان (Grumman) قشرةً لجناحٍ ذي تقوّس عبر استخدامِه لصفيحة طبقيّة غير متناظرة. تمّ تصميمُ عدد الطبقات ودالة تنضيدها بشكلٍ دقيق من أجل الحصول على التقوس الصحيح. تكمن الطريقةُ الاعتياديّةُ لإنشاء ألواحِ أجنحةٍ متقوسة بتغطيةِ صفائحَ طبقيّةٍ غيرِ متصلِّبةٍ تمّ بناؤها بواسطة أشرطةٍ على آلةٍ ذاتِ سريرٍ مُسطَّحٍ فوق أشكالٍ منحنيةٍ من أجل التسخين والتصلُّب.

يمكن مباشرةً حساب تأثير القيم المحددة لــ B_{ij} من أجل بعض الصفائح الطبقية البسيطة، كما يمكن حسابه بدون صعوبةٍ هامةٍ من أجل صفائح طبقية أكثر تعقيداً. ويمكن تقديرُ أثرِ الإقران انحناء – استطالة باستعمال تقريبِ جساءة الانحناء المُختزَلة الذي اقترحه آشتون (Ashton) [7–20]. إذا تفحَّصتَ سيرورات معالَجة المصفوفة من أجل قلْبِ علاقات تقوس القوةّ – انفعال وتقوس العزم–انفعال (انظر الفقرة 4.4)، ستجد تعريفاً يتعلّق بتقريب جساءة الانحناء المُختزَلة. سوف تجد أنه يمكنك استعمالُ العلاقة التالية من أجل جساءة الانحناء لمجمل البنية:

$$\overline{D} = D - BA^{-1}B \qquad (7.51)$$

يكمن معنى عبارة جساءة الانحناء المُختزَلة في أن قيمةَ جساءةِ الانحناء الموجودة – بغضّ النظر عن نوعِها– تكون فعليّاً أصغرَ بفضل وجود إقران الانحناء– استطالة. إذا كان الإقران انحناء–استطالة في المعادلة (7.51) مساوياً للصفر، فعندها لا اختزالَ في قيمة جساءة الانحناء الفعليّة، ويمكن تفسيرُ هذه النتيجة بشكلٍ واضِحٍ جداً. أمّا إذا كان الإقران انحناء–استطالة موجوداً، فإنّ الحدّ $BA^{-1}B$ موجبٌ دوماً، وبالتالي تُختزَل قيمة جساءة الانحناء، وسوف تتوقّع انحرافاتِ انحناء أكبر، وحمولاتِ انبعاجٍ أقل، وترددات طبيعيّةً أدنى (انظر الفصل الخامس).

حتى ولو لم تستعمل تقريب جساءة الانحناء المُختزَلة، فإن هناك طرائق أخرى لتقدير تأثير الإقران انحناء، استطالة. يمكن، ويحدث الآن، تضمينُ هذه الطرائق في كثيرٍ من التحاليل الحاسوبيّة. لذلك، لا يجب أن يقفَ الإقران انحناء، استطالة ،في حال وجوده، حجرَ عثرةٍ في وضعٍ ما للتحليل والتصميم. مع ذلك، لا يزالُ هذا الإقران غيرَ شائعٍ في

كثيرٍ من أوضاع التصميم، ويعود ذلك ببساطة إلى الفتل الذي سوف يحدث بالضرورة في صفيحةٍ طبقيّةٍ بعد سيرورة المعالجة الحرارية.

هناك مُلاحظةٌ مهمّةٌ جداً تهيمن على الإقران انحناء – استطالة. افترض أنه لديك صفيحة طبقيّة تستطيع أن تُصنِّفَها كصفيحةٍ طبقيّة عامّة، أي أنها ليست واحدةً من الصفائح الطبقيّة الخاصّة جداً (وغير العملية غالباً) التي اعتدتَ على تناوُلِها – مثل الصفيحة الطبقيّة معاكسة التناظُر (antisymmetric) ذات الرّقاقات المتصالبة أو ذات الرّقاقات المائلة. إذا كانت الصفيحة الطبقيّة غيرَ متناظِرةٍ (asymmetric) – كما يقتضي معنى مُصطلَح "عامّة" فإن عددَ الطبقاتِ لا يكون مهمّاً، ويمكن أن تحصلَ على مقدارٍ كبيرٍ من الإقران انحناء – استطالة. لا أقول بأنّك سوف تحصل على هذا المقدار، بل من الممكن ذلك. لا يمكن ببساطة أن تضمنَ أنك سوف تحصل على مقدارٍ صغيرٍ من الإقران انحناء، استطالة عبر مجرَّد امتلاكِ عددٍ كبيرٍ من الطبقات. يمكن إثباتُ أن هذا الإقران، من أجل صفائح طبقيّة معاكسة التناظر، يسعى إلى الصفر بشكلٍ سريعٍ جداً. مع ذلك، يتناقص الإقران انحناء، استطالة هذا بشكلٍ بطيءٍ جداً من أجل صفائح طبقيّة أكثر عموميّة (انظر [7–21] و[7–22] بالإضافة إلى الفقرة 6.5)، وبالتالي يُشكِّل عامِلاً مدعاةً للقلق في حال امتلاكِك حقيقةً لصفيحةٍ طبقيّة عامّة.

6.8.7 الميكانيك الميكروي (المجهريّ)

إن مجال المشاكِل التالية المتمثِّلة بالميكانيك الميكروي جذّابةٌ جداً بدايةً في بعض النواحي. ننظر إلى التعريف الأساسيّ لمادّةٍ مُركَّبة مصنوعةٍ في هذه الحالة من ليفٍ ومادّةٍ رابطة، ولنحاول أن نُصمِّمَ فعلاً هذه المادّة. دعنا نغيِّر نسبَ الألياف والمصفوفة بحيث نحصل على الأنواعِ التي نريدها من خصائص سلوك المادّة. هذا الهدف رائعٌ، ولكن تحقيقَه في جميع الأوضاع ليس بالمهمة القابلة للتحقيق تماماً.

تُمثِّل قاعدةُ المزائج مقاربةً جدَّ مُرضِية للتنبُّؤ بسلوك الجساءة للمادّة المُركَّبة في اتّجاه الألياف. مع ذلك لا تعمل – ببساطة – الأدوات التحليليّةُ من أجل التوقع بالسلوك العرضانيّ بالنسبة إلى اتّجاه الألياف بشكلٍ جيّد. ولا تكون التحاليلُ الأخرى دقيقةً وصحيحةً بشكلٍ كافٍ للادّعاء بأنّ الميكانيك الميكروي أداةُ تحليلٍ – تصميمٍ صالحة

وفعّالة. علاوةً على ذلك – ومنذ الستيّنيات عندما تمّ تطويرُ الميكانيك الميكروي، انتقلنا من الموادّ المُركَّبة ذات القطر العريض والشبكة المنتظَمة، مثل البورون – إيبوكسي، إلى الموادّ المُركَّبة ذات القطر الصغير والشبكة غير المنتظَمة، مثل الغرافيت–إيبوكسي أو كيڤلار،إيبوكسي. وهكذا لا نستطيع، ببساطة، حتى أن نبتدئ بالادّعاء بأن التحاليلَ التي استعملناها في الماضي من أجل البورون– إيبوكسي، التي لم تكن جيّدةً جداً حينئذٍ، قابلةٌ للتطبيق بأي حالٍ من الأحوال على الغرافيت–إيبوكسي.

ليس الأمرُ مجرَّدَ كون تحاليلِ الميكانيك الميكروي غيرَ مناسبةٍ أو غيرَ فعّالةٍ، بل، وبشكلٍ أكثر أهمّيّة، نحن لا نستطيع ببساطة أن نتيحَ المجالَ لتغيير خصائص مادّةٍ مُركَّبة من أجل أيّ بنيةٍ نرغب بتصميمِها. يكمن السببُ الرئيسيّ وراء هذه المقولة في وجوب امتلاكِنا لقاعدةِ معطياتٍ عن خاصيّة المادّة البنيوي من أجل كلٍّ من هذه الموادّ المُركَّبة، في حال أردنا تصميمَ بنى منها. إذا قمنا بتغيير المادّة المُركَّبة ولو بمقدارٍ صغير، فعندها ينبغي علينا أن نعود ونُجريَ جميعَ اختبارات التوصيف مرّةً أخرى كدالة للحساسيّة إزاء الرطوبة، ودرجة الحرارة، والتعب، وما إلى ذلك. مع ذلك، لا يمكننا تحمُّلُ توصيفِ كلِّ توليفةٍ ممكنةٍ من الألياف والمصفوفة. لذلك، ينبغي أن يكون لدينا عددٌ محدودٌ ما من الموادّ المُركَّبة المُتاحِ لنا توصيفُها، وهذا العدد المحدود يؤلِّف مجموعةً من موادّ مُركَّبة معياريّة نوعاً ما.

إن الفكرةَ البنيوية في تصميم مادّة باستعمال الميكانيك الميكروي فكرةٌ لطيفة، ولكن تقييدات التحليل قاسيةٌ بشكلٍ كبير، بحيث لا يمكن اعتبارُه أداةَ سيرورة، وعلى كلِّ حالٍ، غالبيّةُ المُصمِّمين غير مُجبَرين في الحقيقة على استدعاء الميكانيك الميكروي. من غير المُرجَّح أن تجد شخصاً يستعملُ تحليلَ الميكانيك الميكروي لكي يتوقع بخصائص الرُّقاقة، ثم يستعمل هذه الخصائص في التصميم، وأخيراً يقوم ببناء بنية قائمةٍ فقط على دالة الأحداث هذا. ينبغي في لحظةٍ ما من سيرورة التصميم مقارنةُ الخصائص المتوقعة للرُّقاقة بالخصائص المقاسة من أجل التأكُّد بأن هذه الخصائص قد تمّ فعلاً تحقيقُها. يعني ذلك أن الأساسَ المنطقيَّ الوحيدَ للتصميم هو الخصائص المادّيّة الفعليّة أو الحقيقيّة، وليس الخصائص التخيُّليّة أو المتوقعة. لا تستطيع أن تضعَ مجملَ ثقتك في أن يعطيك تحليلُ الميكانيك الميكروي خصائصَ جيّدةً يمكن الاعتمادُ عليها. على أيّ حال، لا يُصمِّم أغلبُ

المُصمِّمين البنيويين الموادَّ، بل يقومون باعتبار بعضٍ من موادّ معياريّة نوعاً ما، وسوف يختارون من بينها التوليفةَ الأفضلَ من أجل تطبيقِهم الخاصّ. يمكن أن تكون المادّةُ المُختارةُ من أجل إحدى هذه التطبيقات مادّةَ الغرافيت–إيبوكسي بنسبةٍ حجميّةٍ للألياف يُحدِّدها المُصنِّع. يمكن من أجل تطبيقٍ آخر أن تكون المادّةُ كيڤلار–إيبوكسي بنسبةٍ حجميّة أخرى للألياف.

7.8.7 السلوك اللاخطّيّ

لنتناول الآن قضيّةَ السلوكِ اللاخطّيّ للمادّة، أي سلوكِ الإجهاد – انفعال اللاخطّي. من أين يأتي لسلوك المادّة اللاخطّيّ هذا؟ سوف يُبدي أيٌّ من الخصائص التي تهيمن عليها المصفوفة ،في الحالة العامّة، درجةً ما من لاخطّيّة المادّة، لأن مادّة رابِطة هي عموماً مادّةٌ بلاستيكيّةٌ، مثل راتنجٍ أو معدنٍ ضمن مادّةٍ مُركَّبة ذات رابِط معدنيّ. على سبيل المثال، ندرك أنه في مادّة مُركَّبةٍ بورون – ألمنيوم تكون المصفوفة من الألمنيوم هي معدن يمتلك ذاتياً منحني إجهاد – انفعال لاخطّي. وهكذا، يكون للخاصّتَين اللتَين تهيمن عليهما المصفوفة E_2 وG_{12} عموماً منحنٍ موافِقٌ للإجهاد–انفعال بمستوىً مُعيَّن من اللاخطّيّة.

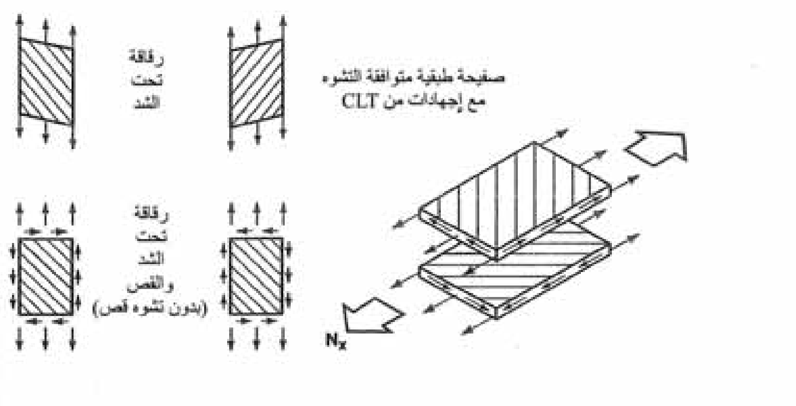
من ناحيةٍ أخرى، يكون السلوكُ النموذجيّ للصفيحة الطبقيّة الحقيقيّة – من أجل بنى للطائرات والمركبات الفضائيّة – خطيّاً بدرجةٍ كبيرة عموماً. يكون سلوك الصفائح الطبقيّة خطيّاً بدرجةٍ معقولة حتى بوجود طبقاتٍ مائلةٍ بزاويةٍ $\pm 45°$ قد تتوقّع أن تُساهِم بخصائصِها اللاخطّيّة المميزة لانفعال القصّ في سلوك الصفيحة الطبقيّة الإجماليّة وأن تتسبّب بتهالك أدائها النسبيّ. إذا ذهبتَ أبعدَ من سلوك الصفيحة الطبقيّة ونظرتَ إلى بنيةٍ كبيرة، فإن الخصائص المميزة لاستجابة الحمولة تكون عموماً خطّيّة. السلوك الخطّيّ موجودٌ حتى حول فراغٍ ما. من الممكن ألاّ ترغب بالتشغيل ضمن نوعٍ ما من نمطِ استجابةٍ غير خطّيّة تقع بعد الأداء الخطّيّ الظاهريّ لصفائح طبقيّة عديدة. وبالتأكيد لن ترغب بالتشغيل في مجالِ سلوكٍ غير خطيّ إذا كنتَ ضمن بيئةِ تعبٍ أو – ربّما– ضمن بيئة زحف.

كخلاصة للسلوك اللاخطّيّ، يبدو أنه بالإمكان حذفُ هذا السلوك اللاخطّيّ ، كما أنك في الوقت نفسه لا ترغب عموماً بالتشغيل في مجال السلوك اللاخطّيّ هذا بأية طريقةٍ كانت، وبالتالي فأنت قادِرٌ على، وراغِبٌ "بالتصميم خارج" هذا السلوك اللاخطّيّ. هذه الملاحظةُ صحيحةٌ عموماً في حالة بنى للطائرات، ولكن هناك بنى أخرى، تخضع لدرجات حرارة أعلى، لا تستطيع ببساطة من أجلها تجنُّبَ بعضٍ من جوانب السلوك اللاخطّيّ، وبالتالي ينبغي عليك أن تأخذَها بعين الاعتبار عند أيّ تحليلِ تصميمٍ منطقيّ.

8.8.7 الإجهادات ما بين الطبقات

مجال المشاكِلة التالية هو الإجهادات مابين الطبقات أو، فعلياً، الإجهادات بالقرب من الحواف الحرّة للصفيحة الطبقيّة. شعر بعض الناس في الأيام الأولى لتطوير موادّ مُركَّبة متقدِّمة أن ظاهرةً تُدعى باسم الفصل بالقص هي الآليّةُ الفاعِلةُ المُسبِّبةُ للإخفاق بالقرب من حافةٍ حرّةٍ. يمكن وصفُ هذا الفصل بالقص على أساس وجود رُقاقتَين متجاورتَين مع زاويتَي توجُّه θ+ وθ−، على التوالي. إذا خضعت هاتان الرُّقاقتان بشكلٍ مستقلّ عن بعضهما البعض إلى حمولةِ شدّ في المستوي، فإنهما سوف تنفعلان لتغدوا متوازياتِ أضلاعٍ مع اتّجاهات متعاكِسة، كما في الشكل 7−63. الآن، ومن أجل تحضير ربط هاتَين الرُقاقتَين معاً، طبِّقْ أوّلاً حمولةَ قصّ حول الأضلاع الخارجيّة لمتوازيات الأضلاع تلك في اتّجاهاتٍ متعاكسة. سوف تُعيد حمولةُ القصّ هذه متوازيَي الأضلاع المتوجِّهَين بشكلَين متعاكسَين إلى مستطيلَين بالحجم نفسِه، وبالتالي لا وجود لانفعال قصّ. افترض أن هذين المستطيلَين، عند هذه المرحلة، يبدوان بالشكل نفسِه، وأننا ألصقناهما معاً كصفيحة طبقيّة. لدينا الآن صفيحةٌ طبقيّةٌ برُقاقتَين منسجمتَين من ناحية الانفعال، كما وأننا قد استطعنا التوقع بالإجهادات في كلٍّ من الرُقاقتَين باستعمال نظرية التصفيح التقليديّة. مع ذلك، عندما ننظر إلى الصفيحة الطبقيّة الواقعة في الزاوية الى اليمين السفلى من الشكل 7−63، فإننا نرى بعضَ الإجهادات المُقتضى وجودُها ضمنيّاً على حوافّ تلك الصفيحة الطبقيّة، بينما لا يمكن وجودُها في هذه الأماكِن لأنها حدودٌ غير خاضعة لحمولة.

وهكذا، يوجد تناقضٌ في التحليل. بشكلٍ أساسيّ، يقودنا التفسيرُ الفيزيائيّ لآليّة الانفعال هذه مع الشروط الحدّيّة المفروضة التي تنص على غياب الحمولة إلى حالةِ إجهادٍ بالقرب من الحافة الحرةّ، ممّا يتسبّب بفصل الرّقاقات. لا تكمن المشكلةُ في الفعل الإجماليّ كأن تحاوِل تلك الطبقات أن تشقّ طريقَها مثل المقصّ ضمن متوازِيَي أضلاعٍ متعاكِسَين في الاتجاه. لا تحدث الاستجابةُ بين الطبقتَين عندما تحاولان الحركةَ. بدلاً من ذلك، تحدث الاستجابةُ بالقرب من الشفاه الحرّة ضمن طبقةٍ حدوديّة ضيّقةٍ جداً.



الشكل 7−63: حالة الإجهاد لصفيحة طبقية حرة الحافة

وهكذا، نرفض آليّةَ الفصل بالقص ونحاوِل من أجل تقدير الإجهادات النظرَ بالقرب من الشفاه الحرّة ضمن الطبقة الحدوديّة. بعد ذلك، نتوقع في الفقرة 6.4 بإجهاداتٍ كبيرةٍ جداً تُسبِّب في الأوضاع السيرورة إخفاقاً ساكناً مبكراً، وتؤثِّر سلبياً أيضاً في عمر التعب للصفيحة الطبقيّة. تكمن مشكلتُنا في التوقع الكمّيّ عن هذه الإجهادات. توقع بايبس (Pipes) وباغانو (Pagano) باستخدام تحليلات خطّيّة أن الإجهادات تكون متفرِّدةً (Singular) أي لامتناهيةً في الكبر، في نقطةٍ تقع في حالتنا عند تقاطُع حدود الطبقة مع الحافّة الحرّة [7−23]. لا يمكن للإجهادات في الحقيقة أن تكون متفرّدة لأن المادّةَ ببساطة لن تتحمّل إجهاداتٍ لانهائيّةً عند حمولاتٍ لامتناهيةٍ في الصغر. يتأثّر سلوك المادّة الحقيقيّ بحالات لاخطّيّة موضعيّةٍ في المصفوفة لا يعكسِها تحليلٌ ماكروي خطّيّ. وهكذا، إن التوقع بإجهاداتٍ متفرّدة هو تناقضٌ أساسيّ، ولكن إذا ما وضعنا هذا الأمرَ جانباً، فإن المسألةَ الحقيقيّةَ تكمن في محاولة اختزالِ هذه الإجهادات بطريقةٍ ما.

من أجل صفيحة طبقيّة سميكةٍ جداً ذات طبقاتٍ متجاورِة مع نفس التوجُّه – مثل زمرةٍ من طبقاتٍ زاويتُها θ+ في دالة تنضيدٍ واحد، تنمو الإجهادات بين الطبقات لتبلغَ قيماً غيرَ مقبولة. إذا تناوبت بعضُ طبقات θ+ مع بعض طبقات θ–، فإن هذه الإجهادات بين الطبقات لن تنمو لتبلغ مثل تلك المقادير العالية. تمتلك كلتا الصفيحتَين الطبقيّتَين إجهاداتٍ بين الطبقات كبيرةً، ولكن واحداً من منحنيي الإجهادات يبدو أفضلَ من الآخر. وهكذا، سوف نقوم بشكلٍ أساسيّ، من أجل اختزال قسمٍ من تلك الإجهادات بين الطبقات، بمتناوب الرُّقاقات وبعثرتها بين بعضها البعض، بحيث لا تقع الرُّقاقات ذاتُ الزوايا المتماثلة قرب بعضها البعض. يعني ذلك أننا نحاول تجنُّبَ أيّ رُقاقات سميكةٍ على الإطلاق، أو أيّ رُقاقات سميكةٍ فعليّاً، لأنها تتسبّب عموماً بمشاكِل إجهادٍ عند الشفاه الحرّة، كما نوقش ذلك في الفقرة 6.4 مع بعض الحلول الأخرى لفصل الطبقات عند الشفاه الحرّة.

9.8.7 آثار القصّ العرضانيّ

مجال المشكلة التالية هو آثار القصّ العرضانيّ. هناك بعضُ الخصائص المميزة البارزة للموادّ المُركَّبة التي تؤثر بشكلٍ شديدٍ في هذا الوضعَ، ويعود ذلك إلى أن جساءةَ القصّ العرضانيّ – أي العمودي على مستوي الألياف، للمصفوفة أقلُّ بكثيرٍ من جساءة القصّ في مستوي الألياف. توجد جساءةُ قصّ لمادّة مُركَّبة في مستوٍ يتضمّن اتّجاهاً واحداً للألياف. يتضمّن القصّ اتّجاهَين اثنَين دوماً، وأحد الاتّجاهَين في المستوي هو اتّجاهٌ ليفيّ. جساءةُ القصّ هذه أكبرُ تماماً بقليلٍ من جساءة القصّ في مستوٍ عموديّ على محور الألياف. تهيمن للمصفوفة على جساءةِ القصّ في مستوٍ عموديّ على محور الألياف، وبالتالي لا تتأثّر هذه الجساءة بالألياف. لذلك، تكون جساءةُ القصّ هذه أقربَ بكثيرٍ إلى قيمتِها في المصفوفة نفسِها (قيمة منخفضة مقارنةً مع جساءة القصّ في المستوي).

يمكن لجساءة القصّ المنخفضة القيمة هذه أن تؤثِّر في انفعالات المادّة التي نتخيّلها بشكلٍ مثاليّ وكأنّها وسطٌ مستمرّ. علاوةً على ذلك، تكون جساءةُ القصّ في أيّ من مستويات المادة الرئيسيّة الثلاثة أقلَّ بكثير من معلمات يونغ في اتّجاه الألياف. سوف نميل في أغلب أوضاع الانحناء لأن ننظرَ إلى معامِل يونغ في اتّجاه الليف – إذا لم يتوفّر

لدينا شيءٌ أفضل– وأن نقولَ إنه العامِل النّاظِم. هناك معامِلُ يونغ واحد فقط من أجل المعدن، وتقارِب قيمُ معلمات القصّ أربعةَ أعشار قيمة هذا المعامِل. أمّا في حالة المادّة المُركَّبة، فإن معامِلَ القصّ الأعظميّ – الواقِع في مستوي الألياف– يكون عادةً أقلّ برتبةِ عظامةٍ واحدة من قيمة معامِل يونغ في اتّجاه الليف. تعني هذه الملاحظة أن القصَّ في نمط الانحناء لا بدّ وأن يلعب دوراً مختلفاً – وفي الحقيقةِ دوراً أكثر أهمّيّةً– في الموادّ المُركَّبة مقارنةً بدوره في المعادِن.

بما أن جساءةَ القصّ عموماً أقلّ بكثير في الموادّ المُركَّبة منها في المعادِن، لا تبقى النواظِمُ (normals) على السطح الأوسط عموديةً عليه بعد الانفعال. تعني هذه المُلاحظة أن التحليلَ الأساسيَّ في الشكلِ الموافِق لنظريّة التصفيح التقليديّة، الذي يضارِع ويماثِل مقابِلَه في المعادن، غيرُ قابلٍ للتطبيق في حالة الموادّ المُركَّبة، كما في حالة المعادِن. يكمن الاستنتاجُ الأساسيُّ الذي نتوصّل إليه في أن تأثيرَ القصّ العرضانيّ على الانحرافات، مثلاً، مهمٌّ من أجل الصفائح المُركَّبة التي تكون أرقَّ بكثيرٍ من الصفائح المعدنيّة. على سبيل المثال، يمكن لصفيحةٍ معدنيّةٍ أن تتطلَّب نسبةَ تباعدٍ إلى سماكةٍ بقيمة 10 أو أكثر قبل أن تختفيَ مدعاةُ القلق حول تأثير انفعالات القصّ. مع ذلك، قد تحتاج صفيحةٌ طبقيّةٌ مُركَّبة إلى نسبةِ تباعُدٍ إلى سماكةٍ قيمتُها 30 أو أكثر من أجل أن نتوقّف عن الاهتمام والقلق فيما يتعلّق بآثار القصّ العرضانيّة. يعني ذلك أننا معتادون على التفكير بأنه ينبغي فعلاً على الصفيحةِ متماثلة المناحي أن تكون سميكةً جداً قبل الحاجة للقلق حول آثار القصّ العرضانيّ.

يجب علينا أن نغيِّرَ طريقةَ التفكير هذه من أجل الموادّ المُركَّبة لأن الحدودَ الهندسيّةَ بين نسب التباعُد إلى السماكة التي تكون انفعالات القصّ من أجلِها مهمّةً وغيرَ مهمّة قد تغيّرت. لقد ذهبت هذه الحدودُ بعيداً وولجَت المجالَ الذي نتوقّع فيه أن نجدَ تصاميمَ بنيويةً حقيقيّةً.

إن مشكلةَ القصّ العرضانيّ موجودةٌ، ولكن ماذا يمكننا فعلُه إزاءَها؟ تتوفّر بعضُ عوامِل التصحيح البسيطةِ نوعاً ما والتي يمكن استعمالُها لتفصيل وتكييفِ الإجهادات والانحرافات التي نحصل عليها من تحليل نظريّة التصفيح التقليديّة. وهكذا، لا تحتاجُ بالضرورةِ إلى القيامِ بتحليلٍ دقيق يشمل آثارَ القصّ العرضانيّة من أجل كلّ صفيحة

طبقيّة مُركَّبة تتعامَل معها. هناك قضيّةٌ أخرى: تكون الصفيحةُ الطبقيّة نموذجيّاً أرقَّ من عنصرٍ معدنيّ مكافئ، وهذا يعني أنك قد رفعتَ آليّاً قيمةَ نسبة التباعُد إلى السماكة فيها. وهكذا، هناك ميلٌ طبيعيّ لتوجيه الصفائح الطبقيّة المُركَّبة الفعليّة بعيداً عن مجال أهمّيّة آثار القصّ العرضانيّة. وهكذا، وبالرغم من سماعِنا حول هذه المشكلة، هناك أوضاع كثيرةٌ لا نحتاج فيها إلى القلق بسببها. تتوفّر عوامِل تصحيحٍ، بالإضافةِ إلى تحليلٍ أجراه ويتني (Whitney) وباغانو (Pagano) [7–24] (انظر أيضاً الفصلَ السادس) من أجل حساب آثار القصّ العرضانيّ. علاوةً على ذلك، تشتمل برمجيّاتٌ حاسوبيّةٌ معاصِرةٌ عديدةٌ عن الصفائح الطبقيّة المُركَّبة على آثارِ القصّ العرضانيّ.

10.8.7 أمْثَلةُ الصفيحة الطبقيّة

لدينا بعضُ الإغراءاتِ القويّةِ فيما يخصّ أمْثَلةَ (optimization) الصفيحة الطبقيّة،التي فحصناها في الفقرة 7.7. يمكننا أن نشملَ عدَّة متغيرات تصميمٍ، كما يمكننا التكلُّمُ على ماهيّة الألياف التي سنتعامَل معها من أصلِ مجموعةٍ من الألياف يعرضها علينا مُصنِّعون متنوِّعون. فوق ذلك، يمكننا أن نتفحص مسألةَ أيّ المصفوفات، وقيمِ نسبِ الألياف والمصفوفة التي نتعامل معها، وأيّ توجُّه لكلّ من اتّجاهات الليف، وسماكات الرُّقاقات المتنوِّعة. تُعَدّ جميعُ هذه العوامِل المتنوِّعة متغيرات تصميمٍ ممكنةً، وينبغي، من أجل معالجتِها، أن يكون لديك مُخطَّطُ أمْثَلةٍ مُعقَّدٌ إلى حدٍّ ما من أجل بلوغ هدف تفصيل الصفيحة الطبقيّة فعليّاً من أجل متطلَّباتِ تصميمٍ خاصّة.

مع ذلك، توجد بعض المشاكل الكبيرة عند استخدامِ مُخطَّط أمْثَلةٍ، ويعود ذلك إلى أنك سوف تنتهي إلى تصميمٍ غير عمليٍّ للتصنيع بكل بساطة. قد نحكم، ولأسباب متنوِّعة، أن صفيحةً طبقيّةً سوف تحتاج إلى عددٍ أصغريٍّ ما من الطبقات. يمكن لأحد هذه الأسباب أن يجعلنا نحافِظ على كون الصفيحة الطبقيّة متناظرةً. لا نستطيع الآن مجرَّدَ القول ببساطة أننا سوف نستخدم طبقتَين فقط لا غير، وأن إحدى الطبقتَين بزاوية $0°$ والأخرى بزاوية $90°$ ، وسببُ ذلك هو أن الصفيحةَ الطبقيّة الناتجة ليست متناظرة. قد نحتاج عندها إلى زيادة سماكةِ هذه الصفيحة الطبقيّة بطبقةٍ واحِدة من أجل التخلُّص من مشكلة لاتناظُر المسألة. هذا الوضعُ مختلفٌ تماماً عنه في حالة المعدن. توجد هناك

عموماً سماكةٌ أصغريّة من أجل طبقةٍ معدنيّة، أي مقدارٌ أصغريّ يمكن تشغيلُه ميكانيكياً أو كيميائيّاً. سوف نقتصر على استعمالِ السماكةِ الأصغريّة المتوفِّرة، وإذا ظهر أن التصميمَ الأمثليّ أرقُّ من تلك السماكة الأصغريّة، فعندها سوف نرفض هذا الوضعَ الأمثليّ، لنعودَ إلى الوضع الأكثر سماكةً بقليل، لأنه أسهلُ على الصنع وأكثرُ ملاءمةً عمليّاً.

تتوفّر موادٌّ معدنيّةٌ متنوِّعةٌ ضمن سماكاتٍ مُعيَّنة، كما تتوفّر رُقاقاتٌ مُركَّبةٌ في سماكاتٍ مُحدَّدة. لن يُغيِّرَ مصنع الرقاقات مسبقة الإشباع (prepregger) طريقة عملِه فقط لأنك تريد طبقةً تبلغ سماكتُها ثلاثةَ أرباع السماكة التي يُنتِجها عادةً. سوف يُكلِّف مثلُ هذا التغيير أموالاً طائلةً. ولن يُغيِّرَ مصنع الرقاقات مسبقة الإشباع النسبَ الحجميّةَ للألياف فقط من أجل إرضائك، ما لم يكن طلبُك كبيراً بشكلٍ هائل. وهكذا، ينبغي استخدامُ بعض العناصرِ المعيارية المتوفِّرة في أيّ مُخطَّط أمْثَلةٍ، وهذا يُبطِل بعضاً من أغراض الأمْثَلة، أو، على الأقلّ، يُقيِّد نوعاً ما الإجاباتِ التي كان يمكن الحصول عليها من مُخطَّط الأمْثَلة.

من الممكن أن يكونَ الجانب الأكثرُ أهمّيّةً الذي يقود إلى الاستنتاج بأن الصفيحةَ الطبقيّة المَدعُوّة بالمُثلى لا يمكن دوماً استعمالُها هو وجوبُ امتلاكِك لنوعٍ ما من معطيات الأداء قائمةٍ على أداءِ الصفيحةِ الطبقيّة التي توصّلت إلى تصميمِها، مهما كانت، وإلاّ فإن الناسَ لن يدعوك تستعملها في التصميم لأسبابٍ متنوِّعة تتعلّق بالتجربة والأمان. ينبغي عليك أن تكون قادراً على البرهان على أنك تعرف متانة وأداء التعب للصفيحةِ الطبقيّة التي ترغب استعمالِها في تصميمٍ ما. إذا تبيّن في النهاية أن الصفيحةَ الطبقيّة المُثلى واحدةٌ مختلفةٌ جداً عن أيِّ شيءٍ تمّ إنتاجُه، فعندها يجب عليك مباشرةُ برنامجٍ توصيفِ خصائص مُكلِفٍ إلى حدٍّ ما من أجل تأهيل تلك الصفيحةِ الطبقيّة للاستعمال في بنية بنيوية مُركَّبة. إن فكرةَ تفصيل متغيرات التصميم المتنوِّعةِ بحيث يثبُت في النهاية أن الصفيحةَ الطبقيّة المُصمَّمة هي الأفضلُ فكرةٌ لطيفةٌ، ويمكن أن تكون مُفيدةً ضمن حدود. مع ذلك، ينبغي فرضُ هذه الحدود علينا من خلال الجدوى التشغيلية للأسباب المتنوِّعة المذكورة للتوّ.

11.8.7 خلاصة

لابد هنا من إيراد بعضَ الملاحظات المناسِبة كموجَز لفقرة فلسفة التصميم. تكون خصائصُ الموادّ المُركَّبة عادةً أفضلَ منها في المعدن متماثل المناحي، وبشكلٍ كافٍ لكي تُوفِّر وزناً شريطةَ التفكير الجديّ بها. إذا كنتَ ابتكاريّاً بشكلٍ كافٍ، فإنك قادرٌ على فعل ذلك، وقادرٌ على جعلِها تعمل. إن جوانب الأداء للموادّ المُركَّبة هي في الحقيقة أكثرُ تعقيداً منها في المعادن متماثلة المناحي، ولكن يمكن نمذجتُها بطرائقَ بسيطةٍ نسبيّاً. تحتاج هذه النمذجةُ إلى بعض الفهم الأساسيّ للميكانيك ذي الصلة. ليس من الضرورة دوماً أن نُجريَ نوعاً من التحليل المتطور يمكن أن يشملَ القصّ العرضانيّ. بدلاً من ذلك، قد تنظر إلى بعض الخطوط التوجيهيّة من أجل تحديد أين يغدو القصّ العرضانيّ مهمّاً، وإذا لم يكن مهمّاً في تطبيقِك الخاصّ، فقم بتخطّي هذه المرحلة. تكمن النقطةُ الأساسُ هنا في أنه ينبغي عليك تقصّي فيما إذا كانت منطقة المشاكِل الممكنةٌ مهمّةً أم لا، من أجل الحصول على تصميمٍ مسؤول.

يتمثَّل عملُ المُحلِّل أثناء تصميم البنية في تحديد وفهم مناطِق المشاكل التي يمكن أن تبرز (ليس بالضرورة وقوعُ هذه المشاكِل، ولكنها ممكنة)، وفي القدرة على التعامُل معها. أحياناً يبالِغ المُحلِّلون في خدمة أنفسهم من حيث إنهم يحاولون تبريرَ وتسويغَ عملهم. إذا كانوا يعملون، على سبيل المثال، على القصّ العرضانيّ أو على الإقران بين الانحناء والاستطالة، فإنهم قد يُظهِرون لك جميعَ الحالات التي تكون فيها هذه الآثارُ ظواهِرَ سلوكٍ هامّة. ينبغي أن تُلقي السؤالَ التالي في مجال التصميم: هل هذه الظاهِرة مهمّةٌ في تصميمي الخاصّ؟ يعني ذلك أنه ينبغي عليك تحديد هوّيّة موجِّهات التصميم الموافِقة لتصميمِك.

تقع على عاتِق المُصمِّم، بخلاف المحلِّل، مسؤوليّةٌ واحِدةٌ، تكمن في خلق وابتكار بنيةٍ تحقِّق متطلّبات التصميم. ينبغي على المُصمِّم أثناء فعل ذلك أن يتأكّد أن جميعَ مناطِق المشاكِل الممكنة قدّ تمّ تجنُّبُها، وهذا يُشبِه حالة الالتفاف حول الجبل، أو أنّ عليه تسلُّقَ الجبل والتعامُلَ مع كلٍّ من هذه المشاكِل مباشرةً، أي أن يأخذها بعين الاعتبار. يجب على المُصمِّم، من أجل اعتماد أيٍّ من هاتَين المقاربتَين، أن يُلِمّ قليلاً بسلوك الموادّ والبنى المُركَّبة. يتوجّب عليه أن يعرف معنى كلٍّ من مناطِق المشاكل هذه، بحيث يستطيع أن يتعرَّف فيما إذا كانت مهمّةً أم لا في تصميمه. ما لم يعرف المُصمِّم ميزات

الأداء البنيوي لمادّةٍ مُركَّبة أو بنية، فإنه على الأرجح لن يستطيعَ تصميمَ مادّةٍ مُركَّبةٍ أو بنيةٍ بنيويةٍ مناسبةٍ، بل قد يُصمِّم بسهولةٍ بنيةً خطِرةً.

9.7 موجز وخلاصة

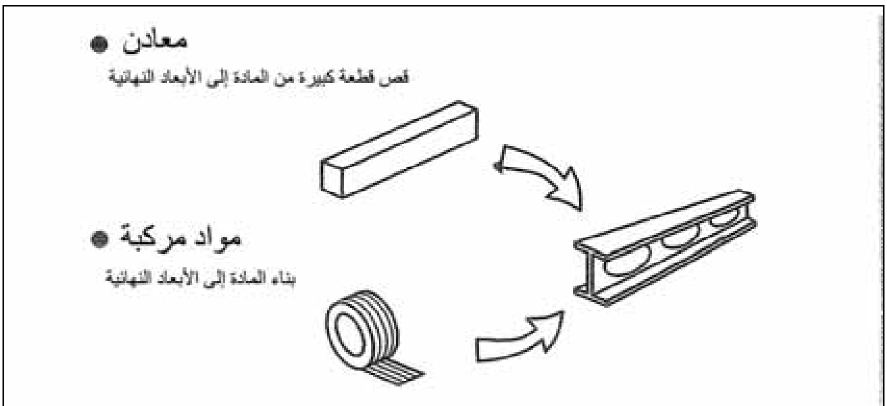
هناك مفتاحان للاستعمال المستقبليّ للموادّ المُركَّبة هما: (1) تحقيقُ كلفةٍ أقل للموادّ الخامّ، و(2) تطوير تقنياتِ تصنيعٍ ابتكاريّةٍ مناسبةٍ بشكلٍ فريدٍ لمميزات الموادّ المُركَّبة. تقود ثِنائيةُ المقاربتَين في الوقت الحاليّ إلى نجاحٍ كبيرٍ للبنى البنيوية المُركَّبة، ولكنهما تحملان أيضاً المفتاحَ نحو استعمالٍ أكبر للموادّ المُركَّبة في المستقبل. لنتناول هذَين المفتاحَين كلاً على حِدَة.

أوّلاً، يبقى دوماً بلوغُ كلفةٍ أقل للموادّ الخامّ من كلفتها الراهنة عامِلاً اقتصاديّاً مهمّاً. عندما ينخفض سعرُ مادّةٍ بالنسبة إلى مادّة أخرى، فإن نقطةَ المفاضلة عندها بين المادّتَين تتغيّر لأن الكلفةَ عامِلٌ يدخل في أغلب التصاميم. لا تعني هذه المقولة أنها تقتضي عدمَ اهتمامِ المهندسين بالكلفة في بعض التصاميم، بل يجب أن نشدِّد هنا على أن بعض البنى الخاصّةِ تكون فيها المتطلّبات الوظيفيّة هي القضيّةَ الأهمّ. هل يمكن لهذه البنى أن تقوم بالتشغيل المطلوب أم لا؟ لا تُشكِّل الكلفةُ في هذه الحالة القضيّةَ الرئيسيّة. نودّ بشكلٍ طبيعي أن تكون كلفةُ مكّوك الفضاء أرخصَ، ولكن هل نستطيع القيامَ بالتشغيل الذي يقوم به مكّوك الفضاء حاليّاً من خلال بنية أقل كلفةً؟ يمكننا أن نستعمل موادَّ أقلّ كلفةً، ولكن هل ستصمد هذه الموادّ، وهل ستنجو بعد سيرورة إعادة الدخول إلى الغلاف الجويّ، وهل سيقدر روّاد الفضاء على البقاء أحياء؟ إذا لم يستطِع روّادُ الفضاء النجاةَ، فمن الواضِح أنك ستعترف بأنه ينبغي علينا دفعُ التكلفةِ العالية من أجل القيام بالتشغيل المنشود، أي ضمان أمانِهم.

لنفترض أن اهتمامَنا قد تغيّر من بنى يلعب فيها الاعتبارُ الوظيفيّ وحدَه دورَ الموجِّه إلى شيءٍ مثل السيّارة حيث تلعب الكلفةُ أيضاً دوراً مهمّاً جداً. نستطيع أن نحقِّقَ التشغيل الوظيفيَّ عبر موادّ أخرى – مثل الفولاذ والألمنيوم والليف الزجاجي في بعض الأماكن، وموادّ بلاستيكيّة غير مُقوّاة في أماكِن أخرى–. يغدو السؤالُ بعدها: هل نستطيع أن نقومَ باستبدالِ موادّ يمكِّننا من منافسة كلفة هذه الموادّ الأخرى بغرض القيام بعملٍ لا نستطيع تحقيقَه من خلال جميع هذه الموادّ الأخرى؟ إن هذا نوعٌ مختلفٌ من الأسئلة،

وتصبح الكلفةُ هنا عامِلاً مُوجِّهاً فائقَ الأهميّة. ومع تناقُص تكاليف بنى المُركَّبة المتقدِّمة، نتوقّع أن نرى استعمالاتٍ أكثر فأكثر للموادّ المُركَّبة المتقدِّمة.

إن العنصرَ المفتاحيّ الثاني عن مفاهيم التصنيع الابتكاريّ مهمٌّ جداً من أجل البنى المُركَّبة، لأن الموادَّ المُركَّبة لها مقدراتٌ فريدة على قابليّة التشكيل للحصول على أقسامٍ متنوّعة. يكمن أحد أهمّ المظاهِر البنيوي لهذه المميزات الفريدة في أننا نميل مع وجود مادّةٍ مُركَّبة إلى بناء البنية، بناء المادّة البنيوية، في الحقيقة، بشكلِ طبقاتٍ على خلاف تصنيع البنى المعدنيّة حيث نأخذ غالباً قطعةً كبيرةً من المادّة، ونقوم بتقطيعِها إلى حجمِ وشكلِ البنية المطلوبة، كما في الشكل 7–64. وهكذا، نسير في اتّجاهَين متعاكسَين تماماً عندما نعتبر المعادنَ إزاء المادّ المُركَّبة. إن التخلص من كمياتٍ كبيرةٍ من كتلةٍ معدنيّة من أجل الوصولِ إلى عنصرٍ مفيدٍ أصغر، أو سيرورة تطريقِ كتلةٍ معدنيّة إلى الشكل المنشود عمليّتان مُكلفتان جداً وتستهلكان زمناً طويلاً على السواء. بخلاف ذلك، نستطيع في حالة الموادّ المُركَّبة أن نبنيَ الشكلَ نفسَه باستعمال موادٍ أقلّ، من ناحية الوزن أو الحجم، وبسيرورات تصنيعٍ أقل مثل التشغيل.



الشكل 7–64: الاختلاف الأساسي في التصنيع بين بنى المواد المركبة والمعدنية

يتطلّب تصنيعُ بنى المُركَّبة مستوياتِ وأنواعَ خبرةٍ من أجل بناء الطبقات والمعالجة الحرارية لا نجدهما عموماً في صناعات تصنيع المعادِن. من أجل ذلك، تُعَدّ البنية المُركَّبة بنية أكثرَ تخصصاً في الإنتاج من البنية المعدنيّة. إن بناءَ الطبقات سيرورة مختلفةٌ كلّيّاً، وهي غريبةٌ تماماً عن تِقانيّي إنتاج المعادِن. علينا بطريقةٍ ما أن نكسب هؤلاء الناس إلى الاتّجاه السائد في تصنيع بنى المُركَّبة قبل أن نرى فعلاً إنتاجاً واسعَ النظير للبنى المُركَّبة.

إن سيرورة الانتقال هذه من بيئة إنتاج المعادِن إلى بيئة إنتاج الموادّ المُركَّبة أكثر تعقيداً بكثير من مجرّد بناء ومعالجة الصفيحة الطبقية حرارياً. وتبرز قضايا تتعلّق بالتفتيش من أجل التأكُّد من أنّ المنتَج المُركَّب قد تمّ إنشاؤه بالطريقة الصحيحة. إن بعض تقانيات المعاينة والفحص هذه أعقدُ بكثيرٍ منها في حالة البنية المعدنيّة. في الحقيقة، ليست الصورةُ ورديةً مُزهِرةً تماماً من أجل الموادّ المُركَّبة. من غير الواقعيّ أن نقولَ: (1) أنْ لا مشاكِل، و(2) أنّ الموادّ المُركَّبة تمثِّل أفضلَ طريق نسلكه على الإطلاق.

تُستعمل الموادّ المُركَّبة الآن بشكلٍ أساسيّ في ما يُعرَف بمجالات التقانة العالية. وهنا، فيما يتعلّق بمفاتيح مستقبل الموادّ المُركَّبة، نسأل: متى سوف نتجاوزُ تطبيقات التقانة العالية ونصل إلى تطبيقات التقانة المنخفضة؟ متى سوف نصنع غسّالةً من موادّ مُركَّبة؟ مطلقاً، ربّما، وقد لا تأتي أبداً تلك المُفاضلةُ التصنيعيّة الأفضل للموادّ المُركَّبة؛ وهي بالتأكيد ليست موجودة الآن. يتعلّق مفتاحُ الإجابة عمّا إذا كانت المنتَجاتُ الاستهلاكية سوف تُصنَع من موادّ مُركَّبة أم لا بتقانات التصنيع. سوف يتزايد عددُ الناسّ الذين يقومون بتصنيع بنى مُركَّبة، ويعود ذلك ببساطة إلى أنهم قادرون – من أجل منشأتِهم الخاصّة– على تجميع كافّة السيرورات التي ينبغي إجراؤها من أجل بنيةٍ مُركَّبة، وهذا في الحقيقة قد لا يكون له مُماثِل في حالة البنية المعدنيّة.

عندما يستطيع جميعُ أناس التصنيع أن يضعوا جميعَ هذه السيرورات معاً، فإنهم سيكونون قد ولجوا مجالَ الأعمال في بنى المُركَّبة، وسيمثِّل ذلك وضعَ توسعٍ كبيرٍ ولزمنٍ طويل. رأينا مثل هذا الوضع سابقاً في حالة الطائرات والمركبات الفضائيّة. نراه ينشأ وينمو الآن من أجل السفن والغوّاصات. رأيناه سابقاً في عصي لعبة الغولف ومضارِب لعبة التنس. تمثِّل الرياضةُ التنافسيّةُ وضعاً خاصّاً جداً: يرغب لاعب الغولف

عموماً أن يتفوّق إمّا على نتائجه السابقة أو على أقرانه المنافِسين له، وسوف يدفعُ مبلغاً كبيراً من أجل تحقيق هذا التفوُّق. لا يُمثِّل كون كلفةِ مضرب التنس المُركَّب أكبرَ بمرّتَين من كلفة مضرب التنس الخشبي أيّ داعٍ إلى القلق. سوف يدفع لاعبو التنس أو الغولف وعن طيب خاطِرٍ ضعفَي كلفةِ عصي الغولف أو مضارب التنس التي لديهم إذا ظنّوا فعلاً أنهم سوف يحقّقون ذلك التفوّق الذي يشعرون أنهم يحتاجونه على منافسيهم.

لا نستطيع أن نتخيّل وضعاً مماثلاً لوضع عصي الغولف ومضارب التنس من أجل جميع المنتَجات الاستهلاكية، لأن هذه المنتَجات لا تملك كلُّها المميزات الذاتية من التنافس الأقصى. عندما نعتبر سيّارةً، علينا أن نكون واقعيّين، ونعترف بأن ثمنَ السيّارة يجب أن يكون منخفضاً كفايّة حتى يستطيع الناس شراءها. عدْ في تفكيرِك إلى أيّام هنري فورد (Henry Ford): لقد قام بصنع سيّارة يمكن بيعُها بحوالى 250$، وبالتالي كان كلُّ شخصٍ قادراً على شرائها. مثّلت القدرةُ على الشراء هذه النقطةَ الجميلةَ في تقانياته الهادِفة إلى الإنتاج الواسع. كان كلُّ شخصٍ قادراً على امتلاك سيّارة، وبالتالي قام كلُّ شخصٍ تقريباً باقتناء واحدة. بخلاف ذلك، لم يكن إلاّ الغنيّ مَنْ يستطيع شراءَ سيّارةٍ قبل أيّام هنري فورد. بمجرّد الوصول إلى وضع المُفاضلة حيث تتنافس الموادّ المُركَّبة وبشكلٍ فعّال في سوق السيّارات، سوف نرى تطبيقاتٍ أوسعَ بشكلٍ كبير، ولكن هناك مشاكِل على طول الطريق. ينبغي تحسينُ كلفة التصنيع من أجل أن تجدَ هذه التطبيقاتُ إمكانيّةً، في أيّ وقتٍ، للحدوث.

المراجع

7-1 George Lubin (ed.), *Handbook of Composites*. New York: Van Nostrand Reinhold, 1982.

7-2 Mel M. Schwartz (ed.), *Composite Materials Handbook*. New York: McGraw-Hill, 1984.

7-3 Michael F. Card and Robert M. Jones, *Experimental and Theoretical Results for Buckling of Eccentrically Stiffened Cylinders*, NASA Technical Note TN D-3639, October 1966.

7-4 Bryan R. Noton, Integrated Computer-Aided Manufacturing Cost/Design Guides for Airframes and Electronics, Battelle’s Columbus Laboratories, Columbus, Ohio, Undated.

7-5 *DoD-NASA Advanced Composites Design Guide*, Air Force Wright Aeronautical Laboratories, Wright-Patterson AFB, Ohio, July 1983.

7-6 *Plastics for Aerospace Vehicles*, *Part 1, Reinforced Plastics*, Military Handbook MILHDBK-17A, January 1971.

7-7 M. Goland and E. Reissner, "The Stresses in Cemented Joints." *Journal of Applied Mechanics*: March 1944, pp. A-17-A-27.

7-8 K. R. Berg, "Problems in the Design of Joints and Attachments, in Mechanics of Composite Materials." Paper presented at: Proceedings of the 5th Symposium on Naval Structural Mechanics, F. W. Wendt, H. Liebowitz, and N. Perrone (eds.), Philadelphia, Pennsylvania, 8-10 May 1967, Pergamon, New York, 1970, pp. 457-479.

7-9 L. J. Hart-Smith, "Design of Adhesively Bonded Joints." in: *Joining Fibre-Reinforced Plastics*, F. L. Mathews (ed.), Elsevier Applied Science, London; New York, 1987, pp. 271-311.

7-10 L. J. Hart-Smith, "Design and Empirical Analysis of Bolted or Riveted Joints." In: F. L. Mathews (ed.). *Joining Fibre-Reinforced Plastics*. London; New York: Elsevier Applied Science, 1987, pp. 227-269.

7-11 F. L. Mathews (ed.), *Joining Fibre-Reinforced Plastics*. London; New York: Elsevier Applied Science, 1987.

7-12 Lucien A. Schmit, "The Structural Synthesis Concept and Its Potential Role in Design with Composites." Paper presented at: *Mechanics of Composite Materials, Proceedings of the 5th Symposium on Naval Structural Mechanics*, F. W. Wendt, H. Liebowitz, and N. Perrone (eds.), Philadelphia, Pennsylvania, 8-10 May 1967, Pergamon, New York, 1970, pp. 553-582.

7-13 Stephen W. Tsai, *Composites Design 1986*. Dayton, Ohio: Think Composites, 1986.

7-14 M. E. Waddoups, L. A. McCullers, F. O. Olsen, and J. E. Ashton, "Structural Synthesis of Anisotropic Plates." Paper presented at: The AIAA/ASME 11th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Denver, Colorado, April 1970. (not in the Proceedings)

7-15 R. N. Hadcock [et al.], *Preliminary Analysis and Optimization Methods*, Grumman Aerospace Corp., Contract F33615-68-C-1301, Air Force Materials Laboratory, Wright-Patterson AFB, Ohio, August 1968.

7-16 Stephen W. Tsai and Nicholas J. Pagano, "Invariant Properties of Composite Materials." in: *Composite Materials Workshop*, S. W. Tsai, J. C. Halpin, and Nicholas J. Pagano (eds.), St. Louis, Missouri, 13-21 July 1967, Technomic, Stanford, Connecticut, 1968, pp. 233-253.

7-17 Stephen W. Tsai and Nicholas J. Pagano, Invariant Properties of Composite Materials, AFML-TR-67-379, March 1968.

7-18 Stephen W. Tsai, *Strength Characteristics of Composite Materials*, NASA CR-224, April 1965.

7-19 James E. Ashton, "Analysis and Design Methods for Composite Structures: … Overly Intimidating!, Structures, Structural Dynamics, and Materials Lecture." Paper presented at: AIAA/ASME/SAE 16th Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Denver, Colorado, 27-29 May 1975 (not in the Proceedings).

7-20 J. E. Ashton, "Approximate Solutions for Unsymmetrically Laminated Plates." *Journal of Composite Materials*: January 1969, pp. 189-191.

7-21 Robert M. Jones, "Buckling and Vibration of Unsymmetrically Laminated Cross-Ply Rectangular Plates." *AIAA Journal*: December 1973, pp. 1626-1632.

7-22 Robert M. Jones and Harold S. Morgan, "Deflection of Unsymmetrically Laminated Cross-Ply Rectangular Plates." Paper presented at: *Proceedings of the 12th Annual Meeting of the Society of Engineering Science*, 20-22 October 1975, Austin, Texas, pp. 155-167.

7-23 R. Byron Pipes and N. J. Pagano, "Interlaminar Stresses in Composite Laminates under Uniform Axial Extension." *Journal of Composite Materials*: October 1970, pp. 538- 548.

7-24 James M. Whitney and Nicholas Pagano, "Shear Deformation in Heterogeneous Anisotropic Plates." *Journal of Applied Mechanics*: December 1970, pp. 1031-1036.

ثبت المصطلحات
عربي ــ إنجليزي

(وصلات) بالضبط (باستخدام القطعة المُملِئة)	Shimmed
الاتجاهات الرئيسيّة للمادة	Principal Material Directions
آثار القص العرضاني	Transverse Shearing Effects
آثار بيئية	Environmental Effects
آثار حدوديّة	End Effects
أثر (تأثير) الطبقة الحدوديّة	Boundary Layer Effect
أثر في المعامل العرضاني	Effect on Transverse Modulus
إجرائية التحليل	Analysis Procedure
إجرائية التصميم الإنشائي (البنيوي)	Structural Design Process
إجرائية تحليل مقاومة الصفيحة الطبقية	Laminate Strength Analysis Procedure
إجرائية تساي لترتيب الصفائح الطبقية	Tsai's Laminate Ranking Procedure
إجهاد مستوي	Plane Stress
إجهاد مستوي (ثلاثي المناحي)	Plane Stress (Orthotropic)
الإجهادات الحرارية	Thermal Stresses
إجهادات القص العرضاني	Transverse Shearing Stresses
إجهادات بين الطبقات (الرقاقات)	Interlaminar Stresses
اختبار التواء (فتل) الأنبوب	Torsion-Tube Test
اختبار الجائز المتصالب	Cross-Beam Test

Uniaxial Tension Test	اختبار الشدّ المحوري
Rail Shear Test	اختبار قص السكة
Configuration Selection	اختيار (اصطفاء) التشكيل
Materials Selection	اختيار المواد
Rc7	آر ـ سي ـ سيفن
Bifurcation	ازدواجية الاتجاه، تشعُّب
Embedded Stiffening Strap	إسار (حزام) مقوٍّ مُحتبس
Vinyl Ester	استرات الفينيل
Shear-Extension	استطالة ـ قصّ
Extensional	استطاليّ
Postcuring Shapes of Laminates	أشكال الصفائح الطبقية ما بعد التسخين والشّيّ (المعالجة)
Postcuring Shapes	أشكال ما بعد المعالجة الحرارية
Mode Shapes	أشكال نمطية
Structural Reconfiguration	إعادة التشكيل الإنشائي (البنيوي)
Design Reconfiguration	إعادة تشكيل التصميم
Laminae Reorientation	إعادة توجيه الرقاقات
Least-Weight	الأقل وزناً
Fibers	ألياف
Boron Fibers	ألياف بور
Whiskers	ألياف شعرية (سبلات)
Graphite Fibers	ألياف غرافيت
Carbon Fibers	ألياف كربون
Energy Absorption	امتصاص الطاقة
Laminate Optimization	أمثلة الصفيحة الطبقية
Structural Optimization	الأمْثَلة الإنشائية
Buckling	انبعاج

Buckling of Laminated Plates	انبعاج الصفائح متعددة الطبقات
Fiber Buckling	انبعاج الليف
Crack Propagation	انتشار الكسر
Deflection	انحناء
Deflection of Plates	انحناء الصفائح
Nonalignment with Coordinate Directions	انزياح بالنسبة إلى اتجاهات الإحداثيات
Displacements	انزياحات
Weight-Sensitive Structures	إنشاءات (بنى) حسّاسة للوزن
Bending	انعطاف
Cylindrical Bending	انعطاف اسطواني
Bending of Laminated Plates	انعطاف الصفائح متعددة الطبقات
Implications	انعكاسات (نتائج)
Modes of Failure	أنماط الانهيار
Crack Extension Modes	أنماط (طرائق) استطالة (اتّساع) الشقّ
Modes	أنماط، أشكال
Catastrophic Failure	انهيار كارثيّ
Failures in Bonded Joints	انهيارات وصلاتٍ بالالتصاق
Failures in Bolted Joints	انهيارات وَصْلات بالبرغي
Vibration	اهتزاز
Vibration of Laminated Plates	اهتزاز الصفائح متعددة الطبقات
Intermediate	الأوسط
Preliminary	الأوليّ
Epoxy	إيبوكسي
Boron-Epoxy	إيبوكسي بور
Glass-Epoxy	إيبوكسي زجاجي
Graphite-Epoxy	إيبوكسي غرافيت

Kevlar 49®-Epoxy	إيبوكسي كيفلار 49
Fiberglass-Epoxy	إيبوكسي مقوّى بألياف زجاجية
Bonded	بالالتصاق
Bonded-Bolted	بالالتصاق والبرغي
Brute-Force Search	بحث بأسلوب قسري إجباري
Lay-Up of	بناء، توضّع
Stiffness-Sensitive Structures	بنى (إنشاءات) حساسة للجساءة
Stiffened Structures	بنى (إنشاءات) مُدعَّمة
Least-Cost Structures	البنى الأقل كلفة
Least-Weight Structures	البنى الأقل وزناً
Structural	بنيوي (إنشائي)
Bolted	بواسطة برغي
Boron-Aluminum	بور ألمنيوم
Polyester	بولي استر
Polyimide	بوليمير بولي إيميد (إيميد متعدّد)
Polysulfone	بوليمير بولي ـ سلفونات (سلفون متعدّد)
Bismaleimides	بوليمير بيسماليميد
Peek	بوليمير بيك (بولي ايتير ايتير كيتون)
Polymers	بوليميرات
Thermoset	بوليميرات التصلّب الحراري
Thermoplastic	بوليميرات التلدّن الحراري
Structural Polymers	بوليميرات إنشائية
Phenolics	بوليميرات فينولية
Merit Function	تابع الاستحقاق
Galvanic Corrosion	تآكل غالفاني
Contrast Between Metals and Composites	التباين بين المعادن والمواد المركّبة

Stacking Sequence	تتابع التنضيد
Laminate Stacking Sequence	تتابع تنضيد الصفيحة الطبقية
Homogeneity	تجانس
Contiguity	تجاور
Direction Cosines for	تجيبات الزوايا (التي يصنعها الشعاع) مع اتجاهات المحاور
Experimental Determination of	التحديد (القياس) التجريبي لـ
Experimental Confirmation	التحقُّق التجريبي
Design-Analysis	تحليل التصميم
Preliminary Design-Analysis	تحليل التصميم الأولي
Intermediate Design-Analysis	تحليل التصميم المتوسّط
Failure Analysis	تحليل العطب
Netting Analysis	تحليل شبكي
Analysis In Design	التحليل في التصميم
Transformation of	تحوّل
Transformation of Stiffnesses	تحوّلات معاملات الجساءة
Transformation of Stresses	تحويل الإجهادات
Transformation of Strains	تحويل التشوّهات
Ply Drops	تدرج انحدارات الرقاقة
Random Arrangement	ترتيب عشوائي
Stress Concentration	تركيز الإجهاد
Contracted Notation	الترميز المختزل
Index Notation	ترميز بالأدلّة
Mnemonic Notation	ترميز مساعد للذاكرة
Coupling	تزاوج
Bending-Extension Coupling	تزاوج استطالة ـ انعطاف
Shear-Shear Coupling	تزاوج قصّ ـ قصّ

Shear-Extension Coupling	تزاوج الاستطالة ـ القصّ
Bend-Twist Coupling	تزاوج انعطاف ـ فتل
Thermal Coupling	تزاوج حراري
Analogy to Plate Buckling	تشابه مع انبعاج الصفيحة
Structural Configuration	التشكيل الإنشائي
Roll-Forming	التشكيل بالدرفلة (الدحرجة)
Engineering Shear Strain	تشوّه القص الهندسي
Volumetric Strain	تشوّه حجمي
Free Thermal Strain	تشوّه حراري حرّ
Middle-Surface Strains	تشوّهات السطح الأوسط
Expansional Strains	تشوّهات تمدّديّة
Plastic Deformations	تشوّهات لدنة
Strains	تشوّهات نسبية
Narrow Optimum Design	التصميم الأمثلي الضيّق
Stiffener Design	تصميم الدعامة
Optimum Design	تصميم أمثلي
Wide Optimum Design	تصميم أمثلي عريض
Underdesign	تصميم ضعيف، تصميم أقل من المطلوب
Overdesign	تصميم مفرَط
Manufacturing of	تصنيع
Innovative Fabrication	تصنيع إبداعي (خلّاق)
Classification of	تصنيف
Applications of Composite Materials	تطبيقات المواد المركّبة
Fatigue	تعب
Strain And Stress Variation	تغيّر الإجهاد والتشوّه
Variations In Displacements	تغيّرات في الانزياحات (الانتقالات، الانسحابات)

Approximation	تقريب
Structural Optimization Techniques	تقنيات الأَمْثَلة الإنشائية
Solution Techniques	تقنيات الحلّ
Bounding Techniques	تقنيات حدّيّة
Laminate Life-Protection Techniques	تقنيات حماية عمر الصفيحة الطبقية
Variational Techniques	تقنيات متغيّراتية
Moire Technique	تقنية مواريه
Middle-Surface Curvatures	تقوسات السطح الأوسط
Particulate Reinforcement	تقوية بالحبيبات (الجسيمات)
Iteration	تكرار
Design-Analysis Iterations	تكرارات (إعادات) تحليل التصميم
Isotropy	تماثل المناحي
Expansionl	تمدّدي
Symmetry	تناظر
Frequencies	تواترات
Stress Distribution	توزّع الإجهاد
Strain Distribution	توزّع التشوّه
Weibul Distribution	توزّع وايبول
Tape Laying	توضع الشريطة
Holes in Laminates	ثقوب في الصفائح الطبقية
Orthotropic	ثلاثي المناحي
Orthotropy	ثلاثي المناحي
Bimetals	ثنائي المعدن
Elastic Constants	ثوابت المرونة
Engineering Constants	ثوابت هندسية
Beam	جائز ، شعاع

Stiffness	الجساءة
Longitudinal Stiffness	الجساءة (مقاومات التشوه) الطولية
Lamina Stiffness	جساءة (مقاومة التشوّه) الرقاقة
Reduced Bending Stiffness	جساءة الانعطاف المختزَلة
Stiffness Transverse to Fiber Direction	الجساءة العرضانية بالنسبة إلى اتجاه الليف
Shear Stiffness	جساءة القصّ
Reduced Stiffness	الجساءة المختزلة
Specific Stiffness	الجساءة النوعية
Stiffness in Arbitrary Coordinates	الجساءة في إحداثيات كيفية (اعتباطية)
Stiffness in Fiber Direction	الجساءة وفق اتّجاه الليف
Special Cases For	حالات خاصة من أجل
Plane Stress State	حالة إجهاد مستوي
Deterministic	حتمي
Design Load Limit	حدّ حمولة التصميم
Buckling-Critical	حدّيّ الانبعاج
Stiffness-Critical	حديّ الجساءة
Strength-Critical	حديّ المقاومة
Padding Up	حشو، تبطين
Elasticity Solution	حل المرونة
Ultimate Load	الحمل الأعظمي
First-Ply Failure Load	حمل الانهيار للرقاقة الأولى
Design Ultimate Load	حمل التصميم الأعظمي
Equivalent Mechanical Loads	الحمولات الميكانيكية التمكافئة
Transverse Load	حمولة عرضانية
Plywood	خشب رقائقي
Nodal Line	خط عقدي

Linear	خطية
Properties of	خواصّ
Mechanical Properties	الخواص الميكانيكية
Extrema Of Material Properties	خواصّ حدّيّة للمواد
Invariant Properties	خواصّ لا متغيّرة
Invariant Properties of	خواصّ لا متغيّرة
Temperature-Dependent Properties of	خواصّ مرتبطة بدرجة الحرارة
Mohr’s Circle	دائرة مور
Sensitivity Studies	دراسات الحساسية
Glass-Transition Temperature	درجة حرارة التحوّل الزجاجي
Stiffeners	دعامات
Open-Versus Closed-Section Stiffeners	دعامات مفتوحة المقطع إزاء دعامات مغلقة المقطع
Dummy Index	دليل متكرّر (وهمي)
Angle-Ply	ذات رقاقات مائلة
Cross-Ply	ذات رقاقات متصالبة
Lamina	رقاقة
Orthotropic Lamina	رقاقة ثلاثية المناحي
Specially Orthotropic Lamina	رقاقة ثلاثية المناحي خاصّة
Generally Orthotropic Lamina	رقاقة ثلاثية المناحي عامة
Anisotropic Lamina	رقاقة غير متماثلة المناحي
Woven Lamina	رقاقة محيكة
Unidirectionally Reinforced Lamina	رقاقة مقوّاة محورياً
Laminated Glass	زجاج متعدد الطبقات
Saint-Venant, Barre De	سانت ـ فونانت ـ بار دي
Pultrusion	سحب
Strain-Energy-Release Rate	سرعة (معدّل) تحرّر طاقة التشوّه

Fiber-Matrix Interface	السطح الفاصل (البيني) ليف ـ مادة رابطة
Load-Deflection Behavior	سلوك الانحناء الحمل
Mechanical Behavior of	السلوك الميكانيكي
Mechanical Behavior of Composite Materials	السلوك الميكانيكي للمواد المركّبة
Nonlinear Stress-Strain Behavior	سلوك تشوّه ـ إجهاد غير خطي
Linear Stress-Strain Behavior	سلوك تشوّه ـ إجهاد خطّي
Orthotropic Behavior	سلوك ثلاثي المناحي
Nonlinear Behavior	سلوك غير خطي
Anisotropic Behavior	سلوك غير متماثل المناحي
Isotropic Behavior	سلوك متماثل المناحي
Viscoelastic Behavior	سلوك مرن لزج
Micromechanical Behavior	سلوك ميكانيكي دقيق
Macromechanical Behavior	سلوك ميكانيكي عياني
Orthogrid	شبكة متعامدة
Isogrid	شبكة متماثلة
Staggered Square Array	شبكة مربّعة مترنّحة (متعاقبة الترتيب)
Kirchoff Free-Edge Condition	شرط الحافة الحرة لكيرشوف
Boundary Conditions	الشروط الحدودية
Beam Boundary Conditions	الشروط الحدودية للجائز
Plate Boundary Conditions	الشروط الحدوديّة للصفيحة
Boundary Conditions	شروط حدوديّة
Bimetallic Strip	شريطة ثنائية المعدن
Microcrack	شق مجهري
Initial Form	الشكل الأولي
Flaws	صدوع مجهرية

Plastic-Based Laminates	صفائح طبقية بلاستيكية
Special Orthotropic Laminates	صفائح طبقية ثلاثية المناحي خاصّة
Unsymmetric Cross-Ply Laminates	صفائح طبقية لا متناظرة ذات رقاقات متصالبة
Symmetric Angle-Ply Laminates	صفائح طبقية متناظرة ذات رقاقات مائلة
Antisymmetric Angle-Ply Laminates	صفائح طبقية معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة
Skew Plates	صفائح متخالفة التناظر
Laminated Plates	صفائح متعددة الطبقات
Eccentrically Stiffened Plates And Shells	صفائح وقشريات مقوّاة بشكل لامتمركز
Plate	صفيحة
Laminate	صفيحة طبقية
Angle-Ply Laminate	صفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة
Cross-Ply Laminate	صفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة
Quasi-Isotropic Laminate	صفيحة طبقية شبه متماثلة المناحي
Nonsymmetric Laminate	صفيحة طبقية غير متناظرة
Asymmetric Laminate	صفيحة طبقية لا متناظرة
Antisymmetric Laminate	صفيحة طبقية معاكسة التناظر
Regular Laminate	صفيحة طبقية منتظمة
Regular Symmetric Angle-Ply Laminate	صفيحة طبقية منتظمة متناظرة ذات رقاقات مائلة
Regular Symmetric Cross-Ply Laminate	صفيحة طبقية منتظمة متناظرة ذات رقاقات متصالبة
Regular Antisymmetric Angle-Ply Laminate	صفيحة طبقية منتظمة معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة
Isotropic Plate	صفيحة متماثلة المناحي
Tailoring of	ضبط
Laminate Tailoring	ضبط الصفيحة الطبقية
Tailoring of Composite Materials	ضبط المواد المركّبة
Strain Energy	طاقة التشوّه
Minimum Potential Energy	الطاقة الكامنة الدنيا

Total Potential Energy	الطاقة الكامنة الكلية
Minimum Complementary Energy	الطاقة المكمِّلة الدنيا
Potential Energy	طاقة كامنة
Stationary Potential Energy	طاقة كامنة مستقرة (ثابتة)
Semi-Inverse Method	طريقة المقلوب النصفي
Rayleigh-Ritz Method	طريقة رايلي ـ ريتز
Galerkin Method	طريقة غاليركين
Newton's Method	طريقة نيوتن
Apparent	ظاهري
Apparent for a Lamina	ظاهري لرقاقة
Apparent for Orthotropic Lamina	ظاهري للرقاقة ثلاثية المناحي
Materials Utilization Factor	عامل استعمال المواد
Contiguity Factor	عامِل التجاور
Stress Concentration Factor	عامل تركيز الإجهاد
Fiber Misalignment Factor	عامل عدم اصطفاف الليف
Complex Variable Mapping	عبر المطابقة بتابع ذي متغيّر (متحوّل) عقدي
Heterogeneity	عدم تجانس
Inhomogeneity	عدم تجانس
Anisotropy	عدم تماثل المناحي
Transverse to Fiber Direction	عرضاني بالنسبة إلى اتجاه الليف
Benign Failure	عطب سليم
Damage	عطب، ضرر
Stress-Strain Relations	علاقات إجهاد ـ تشوّه
Constitutive Relations	العلاقات الأساسية
Strain-Displacement Relations	علاقات التشوّه ـ الانزياح
Linear Strain-Displacement Relations	علاقات تشوّه ـ انزياح (انتقال، انسحاب) خطيّة

Strain-Stress Relations	علاقات تشوّه ـ إجهاد
Reciprocal Relations	علاقات عكسية
Mechanistic Relationships	علاقات ميكانيكية
Relation to Compliances for Orthotropic Materials	علاقة بمعاملات المطاوعة في المواد ثلاثية المناحي
Relation to Stiffnesses for Orthotropic Materials	علاقة معاملات جساءة المواد ثلاثية المناحي
Life	عمر، حياة
Manufacturing Processes	عمليات التصنيع
Fracture Process	عملية الكسر
Finite Elements	عناصر منتهية
Representative Volume Element	عنصر حجمي ممثِّل
Factors	عوامل
Fiber Selection Factors	عوامل اختيار الليف
Stress-Intensity Factors	عوامل شدّة تركيز الإجهاد
Quality Control Factors	عوامل مراقبة الجودة
Matrix Selection Factors	عوامل مصفوفة الاختيار
Initial Imperfections	عيوب ابتدائية
Nondeterministic	غير حتمي
Singular	غير قلوب، غير نظامي
Unequal In Tension and Compression	غير متساوٍ في الشد والضغط
Strain Assumptions	فرضيات التشوّه النسبي
Behavioral Restrictions and Assumptions	فرضيات وقيود السلوك
Kirchoff Hypothesis	فرضية كيرشوف
Finite Differences	فروقات منتهية
Delamination	فصل الطبقات
Separation of Variables	فصل المتغيّرات

Simplified Design Space	فضاء التصميم المبسّط
Debonding	فك الالتصاق
Design-Analysis Philosophy	فلسفة تحليل التصميم
Rule Of Mixtures	قاعدة المزائج
Cramer's Rule	قاعدة كرامر
Law Of Mixtures	قانون المزائج
Generalized Betti's Law	قانون بيتي المعمَّم
Hook's Law	قانون هوك
Hat	قبّعة
Shells	قشريات
Laminated Shells	قشريات متعددة الطبقات
Shells, Laminated	قشريات، متعدد طبقات
Brittle	قصف
Shear-Shear	قصّ ـ قصّ
Sandwich Core	قلب الشطيرة (الساندويش)
Honeycomb Core	قلب قرص العسل
Kirchoff Shear Force	قوة كيرشوف للقصّ
Molding of	قولبة
Sheet Molding	قولبة (تشكيل) الصفيحة
Resin-Transfer Molding	قولبة الراتنج بالانتقال
Laminate Forces And Moments	قوى وعزوم الصفيحة الطبقية
Measurement of	قياس
Measurement of Strength	قياس المقاومة
Measurements of Stiffness	قياسات الجساءة
Restriction on	قيد على
Constraints	قيود

Artificial Constraint	قيود اصطناعية
Restrictions on Micromechanical Behavior	قيود على السلوك الميكانيكي الدقيق
Restrictions on Theory	قيود على النظرية
Composite Structures Cost	كلفة البنى (الإنشاءات) المركبة
Life-Cycle Cost	كلفة دورة الحياة
Anisotropic	لا متماثل المناحي
Eccentricity	لا مركزية
Filament Winding	لفّ (التفاف) الألياف
Interlaminar	ما بين الطبقات
Orthotropic Material	مادة ثلاثية المناحي
Specially Orthotropic Material	مادة ثلاثية المناحي خاصّة
Matrix (Material)	مادة رابطة (حاضنة)
Anisotropic Material	مادة غير متماثلة المناحي
Isotropic Material	مادة متماثلة المناحي
Dispersion-Stiffened Composite Material	مادة مركّبة مقوّاة بالتبعثر
Hygroscopic	ماص للرطوبة
Principle of Stationary Potential Energy	مبدأ الطاقة الكامنة المستقرة (الثابتة)
Principle of Minimum Complementary Energy	مبدأ الطاقة المكمِّلة الأصغرية
Fourrier Series	متسلسلات فورييه
Cross-Linked	متصالبة
Design Requirements	متطلبات التصميم
Design Variables	متغيّرات التصميم
Branched	متفرّعة
Isotropic	متماثل المناحي
Transversely Isotropic	متماثل (موحّد) المناحي عرضانياً
Quasi-Isotropic	متماثل المناحي تقريباً

Transversely Isotropic	متماثل المناحي عرضانياً
Trifurcation	مثالثة الاتجاه، ثلاثية الاتجاهات (الفروع)
Determinant of	محدّد (معيّن)
Transformed Reduced	محوّل مختزَل
Reduced	مختزَل
Design-Analysis Stages	مراحل تحليل التصميم
Sheet Molding Compound	مركّب قولبة الصفيحة
Elasticity	المرونة
Advantages Of Composite Materials	مزايا المواد المركّبة
Laminate Design Problem	مسألة تصميم الصفيحة الطبقية
Reuter Matrix	مصفوفة رويتر
Ductile	مطاوع (لدن)
Compliance	مطاوعة
Equilibrium Equations	معادلات التوازن
Beam Equilibrium Equations	معادلات التوازن للجائز
Governing Equations	المعادلات الناظمة
Plate Buckling Equations	معادلات انبعاج الصفيحة
Plate Vibration Equations	معادلات اهتزاز الصفيحة
Plate Equilibrium Equations	معادلات توازن الصفيحة
Halpin-Tsai Equations	معادلات هالبين ـ تساي
Antisymmetric	معاكس التناظر
Curing	معالجة حرارية
Cocuring	معالجة حرارية مشتركة
Diffusion Coefficient	معامل الانتشار
Coefficient of Thermal Expansion	معامل التمدد الحراري
Bulk Modulus	معامل حجمي
Coefficients of Mutual Influence	معاملات التأثير المشترك

Design Parameters	معاملات التصميم
Coefficients of Thermal Expansion	معاملات التمدّد الحراري
Transformed Reduced Stiffnesses	معاملات الجساءة المتحوّلة والمختزَلة
Shear Moduli	معاملات القصّ
Compliances	معاملات المطاوعة
Compliances, Engineering Constants, Stiffnesses	معاملات المطاوعة، ثوابت هندسية، معاملات الجساءة
Coefficients Of Moisture Diffusion	معاملات انتشار الرطوبة
Coefficients Of Moisture Expansion	معاملات تمدّد الرطوبة
Young's Moduli	معاملات يونغ
Failure Criteria	معايير الانهيار
Biaxial Strength Criteria	معايير المقاومة ثنائية المحور
Design Failure Criteria	معايير فشل التصميم
Metal Versus Composite	معدن إزاء مادة مركّبة
Maximum Stress Failure Criterion	معيار إجهاد الانهيار الأعظمي
Maximum Stress Criterion	معيار الإجهاد الأعظمي
Maximum Strain Criterion	معيار التشوّه الأعظمي
Tsai-Hill Criterion	معيار تساي ـ هيل
Tsai-Hill Failure Criterion	معيار تساي ـ هيل للانهيار
Tsai-Wu Criterion	معيار تساي ـ وو
Tsai-Wu Tensor Failure Criterion	معيار تساي ـ وو الموتّري للانهيار
Maximum Strain Failure Criterion	معيار تشوّه الانهيار الأعظمي
Hoffman Criterion	معيار هوفمان
Hoffman Failure Criterion	معيار هوفمان للانهيار
Failure Envelopes	مغلّفات العطب (الفشل)
Trade-Off	مفاضلة، مبادلة: تنازل عن أمر ما مقابل أمرٍ آخر
Delamination-Suppression Concepts	مفاهيم التخلّص من انفصال الطبقات

Invariant Stiffness Concepts	مفاهيم الجساءة اللا متغيّرة
Stiffening Strip Concept	مفهوم الشريطة الداعمة
Softening Strip Concept	مفهوم تلدّن الشريطة
Statistical Approaches	مقاربات إحصائية
Discrete Element Approaches	مقاربات العناصر المنفصلة
Finite Element Approach	مقاربة العناصر المنتهية
Finite Difference Approach	مقاربة الفروقات المنتهية
Elasticity Approach	مقاربة المرونة
Mechanics of Materials Approach	مقاربة ميكانيك المواد
Mechanics of Materials Approach to Micromechanics	مقاربة ميكانيك المواد للميكانيك المجهري (الدقيق)
Comparison Of Measured And Predicted	مقارنة بين المُقاس والمتوقَّع
Interaction Strength	مقاومة التأثير المتبادل
Axial Stiffness	مقاومة التشوّه المحورية
Lamina Strength	مقاومة الرقاقة
Impact Resistance	مقاومة الصدم
Longitudinal Strength	المقاومة الطولية
Strength Transverse To Fiber Direction	المقاومة العرضانية بالنسبة لاتجاه الليف
Shear Strength	مقاومة القصّ
Transverse Strength	مقاومة عرضانية
Axial Strength	مقاومة محورية
Specific Strength	مقاومة نوعية
Strength In Fiber Direction	المقاومة وفق اتجاه الليف
Strength	مقاومة، (قوة)
Open-Versus Closed-Section	مقطع مغلق إزاء مقطع مفتوح
Unidirectionally Reinforced	مقوّى محورياً
Regular	منتظم

Clad Materials	مواد الغلاف
Polymer Matrix Materials	مواد ذات رابط بوليميري
Ceramic Matrix Materials	مواد ذات رابط سيراميكي
Carbon Matrix Materials	مواد ذات رابط كربوني
Thermoset-Matrix Materials	مواد ذات رابط متصلّب حرارياً
Thermoplastic-Matrix Materials	مواد ذات رابط متلدّن حرارياً
Metal Matrix Materials	مواد ذات رابط معدني
Composite Materials	مواد مركّبة
Particulate Composite Materials	مواد مركّبة حبيبيّة
Fibrous Composite Materials	مواد مركّبة ليفية
Laminated Composite Materials	مواد مركّبة متعددة الطبقات
Fiber-Reinforced Laminated Composite Materials	مواد مركبة متعددة الطبقات مقوّاة بالألياف
Strength Tensor	موتّر (تنسور) المقاومة
Tensor Shear Strain	موتّر (تنسور) تشوّه القص
Tsai-Wu Tensor Failure Criterion	موتّر (تنسور) معيار تساي - وو للانهيار
Compliance Matrix	موتّر (تنسور، مصفوفة) المطاوعة
Stiffness Tensor	موتّر الجساءة
Design Drivers	موجّهات التصميم
Strong Design Drivers	موجّهات التصميم القوي
Fracture Mechanics	ميكانيك الكسر
Macromechanics	ميكانيك عياني
Micromechanics	ميكانيك مجهري (دقيق)
Nastran	ناستران: برنامج للتحليل بطريقة العناصر المنتهية
Stiffness Ratio	نسبة الجساءة
Volume Fraction	النسبة الحجمية
Fiber-Volume Fraction	النسبة الحجمية للألياف

Orthotropic Modulus Ratio	نسبة المعامل ثلاثي المناحي
Poisson's Ratios	نسبة بواسون
Major Poisson's Ratio	نسبة بواسون الرئيسية
Cross-Ply Ratio	نسبة سماكات الرقاقات المتصالبة
Plate Aspect Ratio	نسبة شكل الصفيحة
Sandwich-Blade	نصل (شفرة) الشطيرة (الساندويش)
Nonsingular	نظامية، قلوبة
Classical Lamination Theory	نظرية التصفيح التقليدية
Reissner Variational Theorem	النظرية التغيّراتية لـريسنر
Shear Deformation Theory	نظرية تشوّه القصّ
Extensional Mode	نمط استطالي
Transverse Mode	نمط عرضاني
Shear Mode	نمط قصّ
Growth	نمو
Concentric Cylinder Model	نموذج الأسطوانة متحدة المركز
Self-Consistent Model	نموذج متّسق داخلياً
Maxima And Minima of Functions of a Single Variable	النهايات الحدّيّة العظمى والصغرى لتابع بمتحوّل واحد
Nomex	نوميكس
Hybrid	هجين
Composite Structures Weight	وزن البنى (الإنشاءات) المركبة
Structural Response Parameters	وسائط (بارامترات) الاستجابة الإنشائية
Batdorf Shell Curve Parameter	وسيط منحني قشرة باتدورف
Joints	وصلات

ثبت المصطلحات
إنجليزي ــ عربي

Advantages of Composite Materials	مزايا المواد المركّبة
Analogy to Plate Buckling	تشابه مع انبعاج الصفيحة
Analysis in Design	التحليل في التصميم
Analysis Procedure	إجرائية التحليل
Angle-Ply	ذات رقاقات مائلة
Angle-Ply Laminate	صفيحة طبقية ذات رقاقات مائلة
Anisotropic	لا متماثل المناحي
Anisotropic Behavior	سلوك غير متماثل المناحي
Anisotropic Lamina	رقاقة غير متماثلة المناحي
Anisotropic Material	مادة غير متماثلة المناحي
Anisotropy	عدم تماثل المناحي
Antisymmetric	معاكس التناظر
Antisymmetric Angle-Ply Laminates	صفائح طبقية معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة
Antisymmetric Laminate	صفيحة طبقية معاكسة التناظر
Apparent	ظاهري
Apparent for a Lamina	ظاهري لرقاقة
Apparent for Orthotropic Lamina	ظاهري للرقاقة ثلاثية المناحي
Applications of Composite Materials	تطبيقات المواد المركّبة

Approximation	تقريب
Artificial Constraint	قيود اصطناعية
Asymmetric Laminate	صفيحة طبقية لا متناظرة
Axial Stiffness	مقاومة التشوّه المحورية
Axial Strength	مقاومة محورية
Batdorf Shell Curve Parameter	وسيط منحني قشرة باتدورف
Beam	جائز، شعاع
Beam Boundary Conditions	الشروط الحدودية للجائز
Beam Equilibrium Equations	معادلات التوازن للجائز
Behavioral Restrictions and Assumptions	فرضيات وقيود السلوك
Bending	انعطاف
Bending of Laminated Plates	انعطاف الصفائح متعددة الطبقات
Bending-Extension Coupling	تزاوج استطالة ـ انعطاف
Bend-Twist Coupling	تزاوج انعطاف ـ فتل
Benign Failure	عطب سليم
Biaxial Strength Criteria	معايير المقاومة ثنائية المحور
Bifurcation	ازدواجية الاتجاه، تشعُّب
Bimetallic Strip	شريطة ثنائية المعدن
Bimetals	ثنائي المعدن
Bismaleimides	بوليمير بيسماليميد
Bolted	بواسطة برغي
Bonded	بالالتصاق
Bonded-Bolted	بالالتصاق والبرغي
Boron Fibers	ألياف بور
Boron-Aluminum	بور ألمنيوم
Boron-Epoxy	إيبوكسي بور

Boundary Conditions	شروط حدوديّة
Boundary Conditions	الشروط الحدودية
Boundary Layer Effect	أثر (تأثير) الطبقة الحدوديّة
Bounding Techniques	تقنيات حدّيّة
Branched	متفرّعة
Brittle	قصف
Brute-Force Search	بحث بأسلوب قسري إجباري
Buckling	انبعاج
Buckling of Laminated Plates	انبعاج الصفائح متعددة الطبقات
Buckling-Critical	حدّيّ الانبعاج
Bulk Modulus	معامل حجمي
Carbon Fibers	ألياف كربون
Carbon Matrix Materials	مواد ذات رابط كربوني
Catastrophic Failure	انهيار كارثيّ
Ceramic Matrix Materials	مواد ذات رابط سيراميكي
Clad Materials	مواد الغلاف
Classical Lamination Theory	نظرية التصفيح التقليدية
Classification of	تصنيف
Cocuring	معالجة حرارية مشتركة
Coefficient of Thermal Expansion	معامل التمدد الحراري
Coefficients of Moisture Diffusion	معاملات انتشار الرطوبة
Coefficients of Moisture Expansion	معاملات تمدّد الرطوبة
Coefficients of Mutual Influence	معاملات التآثير المشترك
Coefficients of Thermal Expansion	معاملات التمدّد الحراري
Comparison of Measured and Predicted	مقارنة بين المُقاس والمتوقَّع
Complex Variable Mapping	عبر المطابقة بتابع ذي متغيّر (متحوّل) عقدي
Compliance	مطاوعة

Compliance Matrix	موتّر (تنسور، مصفوفة) المطاوعة
Compliances	معاملات المطاوعة
Compliances, Engineering Constants, Stiffnesses	معاملات المطاوعة، ثوابت هندسية، معاملات الجساءة
Composite Materials	مواد مركّبة
Composite Structures Cost	كلفة البنى (الإنشاءات) المركبة
Composite Structures Weight	وزن البنى (الإنشاءات) المركبة
Concentric Cylinder Model	نموذج الأسطوانة متحدة المركز
Configuration Selection	اختيار (اصطفاء) التشكيل
Constitutive Relations	العلاقات الأساسية
Constraints	قيود
Contiguity	تجاور
Contiguity Factor	عامِل التجاور
Contracted Notation	الترميز المختزل
Contrast between Metals and Composites	التباين بين المعادن والمواد المركّبة
Coupling	تزاوج
Crack Extension Modes	أنماط (طرائق) استطالة (اتّساع) الشقّ
Crack Propagation	انتشار الكسر
Cramer's Rule	قاعدة كرامر
Cross-Beam Test	اختبار الجائز المتصالب
Cross-Linked	متصالبة
Cross-Ply	ذات رقاقات متصالبة
Cross-Ply Laminate	صفيحة طبقية ذات رقاقات متصالبة
Cross-Ply Ratio	نسبة سماكات الرقاقات المتصالبة
Curing	معالجة حرارية
Cylindrical Bending	انعطاف اسطواني
Damage	عطب، ضرر

Debonding	فك الالتصاق
Deflection	انحناء
Deflection of Plates	انحناء الصفائح
Delamination	فصل الطبقات
Delamination-Suppression Concepts	مفاهيم التخلّص من انفصال الطبقات
Design Drivers	موجّهات التصميم
Design Failure Criteria	معايير فشل التصميم
Design Load Limit	حدّ حمولة التصميم
Design Parameters	معاملات التصميم
Design Reconfiguration	إعادة تشكيل التصميم
Design Requirements	متطلبات التصميم
Design Ultimate Load	حمل التصميم الأعظمي
Design Variables	متغيّرات التصميم
Design-Analysis	تحليل التصميم
Design-Analysis Iterations	تكرارات (إعادات) تحليل التصميم
Design-Analysis Philosophy	فلسفة تحليل التصميم
Design-Analysis Stages	مراحل تحليل التصميم
Determinant of	محدّد (معيّن)
Deterministic	حتمي
Diffusion Coefficient	معامل الانتشار
Direction Cosines for	تجيبات الزوايا (التي يصنعها الشعاع) مع اتجاهات المحاور
Discrete Element Approaches	مقاربات العناصر المنفصلة
Dispersion-Stiffened Composite Material	مادة مركّبة مقوّاة بالتبعثر
Displacements	انزياحات
Ductile	مطاوع (لدن)
Dummy Index	دليل متكرّر (وهمي)

Eccentrically Stiffened Plates and Shells	صفائح وقشريات مقوّاة بشكل لامتمركز
Eccentricity	لا مركزية
Effect on Transverse Modulus	أثر في المعامل العرضاني
Elastic Constants	ثوابت المرونة
Elasticity	المرونة
Elasticity Approach	مقاربة المرونة
Elasticity Solution	حل المرونة
Embedded Stiffening Strap	إسار (حزام) مقوٍّ مُحتبس
End Effects	آثار حدوديّة
Energy Absorption	امتصاص الطاقة
Engineering Constants	ثوابت هندسية
Engineering Shear Strain	تشوّه القص الهندسي
Environmental Effects	آثار بيئية
Epoxy	إيبوكسي
Equilibrium Equations	معادلات التوازن
Equivalent Mechanical Loads	الحمولات الميكانيكية التمكافئة
Expansional Strains	تشوّهات تمدّديّة
Expansionl	تمدّدي
Experimental Confirmation	التحقُّق التجريبي
Experimental Determination of	التحديد (القياس) التجريبي لـ
Extensional	استطاليّ
Extensional Mode	نمط استطالي
Extrema of Material Properties	خواصّ حدّيّة للمواد
Factors	عوامل
Failure Analysis	تحليل العطب
Failure Criteria	معايير الانهيار

Failure Envelopes	مغلّفات العطب (الفشل)
Failures in Bolted Joints	انهيارات وصلات بالبرغي
Failures in Bonded Joints	انهيارات وصلاتٍ بالالتصاق
Fatigue	تعب
Fiber Buckling	انبعاج الليف
Fiber Misalignment Factor	عامل عدم اصطفاف الليف
Fiber Selection Factors	عوامل اختيار الليف
Fiberglass-Epoxy	إيبوكسي مقوّى بألياف زجاجية
Fiber-Matrix Interface	السطح الفاصل (البيني) ليف ـ مادة رابطة
Fiber-Reinforced Laminated Composite Materials	مواد مركبة متعددة الطبقات مقوّاة بالألياف
Fibers	ألياف
Fiber-Volume Fraction	النسبة الحجمية للألياف
Fibrous Composite Materials	مواد مركّبة ليفية
Filament Winding	لفّ (التفاف) الألياف
Finite Difference Approach	مقاربة الفروقات المنتهية
Finite Differences	فروقات منتهية
Finite Element Approach	مقاربة العناصر المنتهية
Finite Elements	عناصر منتهية
First-Ply Failure Load	حمل الانهيار للرقاقة الأولى
Flaws	صدوع مجهرية
Fourrier Series	متسلسلات فورييه
Fracture Mechanics	ميكانيك الكسر
Fracture Process	عملية الكسر
Free Thermal Strain	تشوّه حراري حرّ
Frequencies	تواترات
Galerkin Method	طريقة غاليركين

Galvanic Corrosion	تآكل غالفاني
Generalized Betti's Law	قانون بيتي المعمَّم
Generally Orthotropic Lamina	رقاقة ثلاثية المناحي عامة
Glass-Epoxy	إيبوكسي زجاجي
Glass-Transition Temperature	درجة حرارة التحوّل الزجاجي
Governing Equations	المعادلات الناظمة
Graphite Fibers	ألياف غرافيت
Graphite-Epoxy	إيبوكسي غرافيت
Growth	نمو
Halpin-Tsai Equations	معادلات هالبين ـ تساي
Hat	قبّعة
Heterogeneity	عدم تجانس
Hoffman Criterion	معيار هوفمان
Hoffman Failure Criterion	معيار هوفمان للانهيار
Holes in Laminates	ثقوب في الصفائح الطبقية
Homogeneity	تجانس
Honeycomb Core	قلب قرص العسل
Hook's Law	قانون هوك
Hybrid	هجين
Hygroscopic	ماص للرطوبة
Impact Resistance	مقاومة الصدم
Implications	انعكاسات (نتائج)
Index Notation	ترميز بالأدلّة
Inhomogeneity	عدم تجانس
Initial Form	الشكل الأولي
Initial Imperfections	عيوب ابتدائية

Innovative Fabrication	تصنيع إبداعي (خلّاق)
Interaction Strength	مقاومة التأثير المتبادل
Interlaminar	ما بين الطبقات
Interlaminar Stresses	إجهادات بين الطبقات (الرقاقات)
Intermediate	الأوسط
Intermediate Design-Analysis	تحليل التصميم المتوسّط
Invariant Properties	خواصّ لا متغيّرة
Invariant Properties of	خواصّ لا متغيّرة (صامدة)
Invariant Stiffness Concepts	مفاهيم الجساءة اللا متغيّرة
Isogrid	شبكة متماثلة
Isotropic	متماثل المناحي
Isotropic Behavior	سلوك متماثل المناحي
Isotropic Material	مادة متماثلة المناحي
Isotropic Plate	صفيحة متماثلة المناحي
Isotropy	تماثل المناحي
Iteration	تكرار
Joints	وصلات
Kevlar 49®-Epoxy	إيبوكسي كيفلار 49
Kirchoff Free-Edge Condition	شرط الحافة الحرة لكيرشوف
Kirchoff Hypothesis	فرضية كيرشوف
Kirchoff Shear Force	قوة كيرشوف للقصّ
Lamina	رقاقة
Lamina Stiffness	جساءة (مقاومة التشوّه) الرقاقة
Lamina Strength	مقاومة الرقاقة
Laminae Reorientation	إعادة توجيه الرقاقات
Laminate	صفيحة طبقية

Laminate Design Problem	مسألة تصميم الصفيحة الطبقية
Laminate Forces and Moments	قوى وعزوم الصفيحة الطبقية
Laminate Life-Protection Techniques	تقنيات حماية عمر الصفيحة الطبقية
Laminate Optimization	أمثلة الصفيحة الطبقية
Laminate Stacking Sequence	تتابع تنضيد الصفيحة الطبقية
Laminate Strength Analysis Procedure	إجرائية تحليل مقاومة الصفيحة الطبقية
Laminate Tailoring	ضبط الصفيحة الطبقية
Laminated Composite Materials	مواد مركّبة متعددة الطبقات
Laminated Glass	زجاج متعدد الطبقات
Laminated Plates	صفائح متعددة الطبقات
Laminated Shells	قشريات متعددة الطبقات
Law of Mixtures	قانون المزائج
Lay-Up of	بناء، توضّع
Least-Cost Structures	البنى الأقل كلفة
Least-Weight	الأقل وزناً
Least-Weight Structures	البنى الأقل وزناً
Life	عمر، حياة
Life-Cycle Cost	كلفة دورة الحياة
Linear	خطية
Linear Strain-Displacement Relations	علاقات تشوّه ـ انزياح (انتقال، انسحاب) خطيّة
Linear Stress-Strain Behavior	سلوك تشوّه ـ إجهاد خطّي
Load-Deflection Behavior	سلوك الانحناء الحمل
Longitudinal Stiffness	الجساءة (مقاومات التشوه) الطولية
Longitudinal Strength	المقاومة الطولية
Macromechanical Behavior	سلوك ميكانيكي عياني
Macromechanics	ميكانيك عياني

Major Poisson's Ratio	نسبة بواسون الرئيسية
Manufacturing of	تصنيع
Manufacturing Processes	عمليات التصنيع
Materials Selection	اختيار المواد
Materials Utilization Factor	عامل استعمال المواد
Matrix (Material)	مادة رابطة (حاضنة)
Matrix Selection Factors	عوامل مصفوفة الاختيار
Maxima and Minima of Functions of a Single Variable	النهايات الحدّيّة العظمى والصغرى لتابع بمتحوّل واحد
Maximum Strain Criterion	معيار التشوّه الأعظمي
Maximum Strain Failure Criterion	معيار تشوّه الانهيار الأعظمي
Maximum Stress Criterion	معيار الإجهاد الأعظمي
Maximum Stress Failure Criterion	معيار إجهاد الانهيار الأعظمي
Measurement of	قياس
Measurement of Strength	قياس المقاومة
Measurements of Stiffness	قياسات الجساءة
Mechanical Behavior of	السلوك الميكانيكي
Mechanical Behavior of Composite Materials	السلوك الميكانيكي للمواد المركّبة
Mechanical Properties	الخواص الميكانيكية
Mechanics of Materials Approach	مقاربة ميكانيك المواد
Mechanics of Materials Approach to Micromechanics	مقاربة ميكانيك المواد للميكانيك المجهري (الدقيق)
Mechanistic Relationships	علاقات ميكانيكية
Merit Function	تابع الاستحقاق
Metal Matrix Materials	مواد ذات رابط معدني
Metal Versus Composite	معدن إزاء مادة مركّبة
Microcrack	شق مجهري

Micromechanical Behavior	سلوك ميكانيكي دقيق
Micromechanics	ميكانيك مجهري (دقيق)
Middle-Surface Curvatures	تقوسات السطح الأوسط
Middle-Surface Strains	تشوّهات السطح الأوسط
Minimum Complementary Energy	الطاقة المكمِّلة الدنيا
Minimum Potential Energy	الطاقة الكامنة الدنيا
Mnemonic Notation	ترميز مساعد للذاكرة
Mode Shapes	أشكال نمطية
Modes	أنماط ، أشكال
Modes of Failure	أنماط الانهيار
Mohr's Circle	دائرة مور
Moire Technique	تقنية مواريه
Molding of	قولبة
Narrow Optimum Design	التصميم الأمثلي الضيّق
Nastran	ناستران : برنامج للتحليل بطريقة العناصر المنتهية
Netting Analysis	تحليل شبكي
Newton's Method	طريقة نيوتن
Nodal Line	خط عقدي
Nomex	نوميكس
Nonalignment With Coordinate Directions	انزياح بالنسبة إلى اتجاهات الإحداثيات
Nondeterministic	غير حتمي
Nonlinear Behavior	سلوك غير خطي
Nonlinear Stress-Strain Behavior	سلوك تشوّه ـ إجهاد غير خطي
Nonsingular	نظامية ، قلوبة
Nonsymmetric Laminate	صفيحة طبقية غير متناظر
Open-Versus Closed-Section	مقطع مغلق إزاء مقطع مفتوحة

Open-Versus Closed-Section Stiffeners	دعامات مفتوحة المقطع إزاء دعامات مغلقة المقطع
Optimum Design	تصميم أمثلي
Orthogrid	شبكة متعامدة
Orthotropic	ثلاثي المناحي
Orthotropic Behavior	سلوك ثلاثي المناحي
Orthotropic Lamina	رقاقة ثلاثية المناحي
Orthotropic Material	مادة ثلاثية المناحي
Orthotropic Modulus Ratio	نسبة المعامل ثلاثي المناحي
Orthotropy	ثلاثي المناحي
Overdesign	تصميم مفرَط
Padding Up	حشو ، تبطين
Particulate Composite Materials	مواد مركّبة حبيبيّة
Particulate Reinforcement	تقوية بالحبيبات (الجسيمات)
Peek	بوليمير بيك (بولي ايتير ايتير كيتون)
Phenolics	بوليميرات فينولية
Plane Stress	إجهاد مستوي
Plane Stress (Orthotropic)	إجهاد مستوي (ثلاثي المناحي)
Plane Stress State	حالة إجهاد مستوي
Plastic Deformations	تشوّهات لدنة
Plastic-Based Laminates	صفائح طبقية بلاستيكية
Plate	صفيحة
Plate Aspect Ratio	نسبة شكل الصفيحة
Plate Boundary Conditions	الشروط الحدوديّة للصفيحة
Plate Buckling Equations	معادلات انبعاج الصفيحة
Plate Equilibrium Equations	معادلات توازن الصفيحة
Plate Vibration Equations	معادلات اهتزاز الصفيحة
Ply Drops	تدرج انحدارات الرقاقة

Plywood	خشب رقائقي
Poisson's Ratios	نسبة بواسون
Polyester	بولي استر
Polyimide	بوليمير بولي إيميد (إيميد متعدّد)
Polymer Matrix Materials	مواد ذات رابط بوليميري
Polymers	بوليميرات
Polysulfone	بوليمير بولي ـ سلفونات (سلفون متعدّد)
Postcuring Shapes	أشكال ما بعد المعالجة الحرارية
Postcuring Shapes Of Laminates	أشكال الصفائح الطبقية ما بعد التسخين والشي (المعالجة)
Potential Energy	طاقة كامنة
Preliminary	الأوليّ
Preliminary Design-Analysis	تحليل التصميم الأولي
Principal Material Directions	الاتجاهات الرئيسيّة للمادة
Principle of Minimum Complementary Energy	مبدأ الطاقة المكمِّلة الأصغرية
Principle of Stationary Potential Energy	مبدأ الطاقة الكامنة المستقرة (الثابتة)
Properties of	خواصّ
Pultrusion	سحب
Quality Control Factors	عوامل مراقبة الجودة
Quasi-Isotropic	متماثل المناحي تقريباً
Quasi-Isotropic Laminate	صفيحة طبقية شبه متماثلة المناحي
Rail Shear Test	اختبار قص السكة
Random Arrangement	ترتيب عشوائي
Rayleigh-Ritz Method	طريقة رايلي ـ ريتز
Rc7	آر ـ سي ـ سيفن
Reciprocal Relations	علاقات عكسية

Reduced	مختزَل
Reduced Bending Stiffness	جساءة الانعطاف المختزَلة
Reduced Stiffness	الجساءة المختزلة
Regular	منتظم
Regular Antisymmetric Angle-Ply Laminate	صفيحة طبقية منتظمة معاكسة التناظر ذات رقاقات مائلة
Regular Laminate	صفيحة طبقية منتظمة
Regular Symmetric Angle-Ply Laminate	صفيحة طبقية منتظمة متناظرة ذات رقاقات مائلة
Regular Symmetric Cross-Ply Laminate	صفيحة طبقية منتظمة متناظرة ذات رقاقات متصالبة
Reissner Variational Theorem	النظرية التغيّراتية لـريسنر
Relation to Compliances for Orthotropic Materials	علاقة بمعاملات المطاوعة في المواد ثلاثية المناحي
Relation to Stiffnesses for Orthotropic Materials	علاقة معاملات جساءة المواد ثلاثية المناحي
Representative Volume Element	عنصر حجمي ممثِّل
Resin-Transfer Molding	قولبة الراتنج بالانتقال
Restriction on	قيد على
Restrictions on Micromechanical Behavior	قيود على السلوك الميكانيكي الدقيق
Restrictions on Theory	قيود على النظرية
Reuter Matrix	مصفوفة رويتر
Roll-Forming	التشكيل بالدرفلة (الدحرجة)
Rule of Mixtures	قاعدة المزائج
Saint-Venant, Barre De	سانت ـ فونانت ـ بار دي
Sandwich Core	قلب الشطيرة (الساندويش)
Sandwich-Blade	نصل (شفرة) الشطيرة (الساندويش)
Self-Consistent Model	نموذج متّسق داخلياً
Semi-Inverse Method	طريقة المقلوب النصفي

Sensitivity Studies	دراسات الحساسية
Separation of Variables	فصل المتغيّرات
Shear Deformation Theory	نظرية تشوّه القصّ
Shear Mode	نمط قصّ
Shear Moduli	معاملات القصّ
Shear Stiffness	جساءة القصّ
Shear Strength	مقاومة القصّ
Shear-Extension	استطالة ـ قصّ
Shear-Extension Coupling	تزاوج الاستطالة ـ القصّ
Shear-Shear	قصّ ـ قصّ
Shear-Shear Coupling	تزاوج قصّ ـ قصّ
Sheet Molding	قولبة (تشكيل) الصفيحة
Sheet Molding Compound	مركّب قولبة الصفيحة
Shells	قشريات
Shells, Laminated	قشريات، متعدد طبقات
Shimmed	(وصلات) بالضبط (باستخدام القطعة المُملِئة)
Simplified Design Space	فضاء التصميم المبسّط
Singular	غير قلوب، غير نظامي
Skew Plates	صفائح متخالفة التناظر
Softening Strip Concept	مفهوم تلدّن الشريطة
Solution Techniques	تقنيات الحلّ
Special Cases for	حالات خاصة من أجل
Special Orthotropic Laminates	صفائح طبقية ثلاثية المناحي خاصّة
Specially Orthotropic Lamina	رقاقة ثلاثية المناحي خاصّة
Specially Orthotropic Material	مادة ثلاثية المناحي خاصّة
Specific Stiffness	الجساءة النوعية

Specific Strength	مقاومة نوعية
Stacking Sequence	تتابع التنضيد
Staggered Square Array	شبكة مربّعة مترنّحة (متعاقبة الترتيب)
Stationary Potential Energy	طاقة كامنة مستقرة (ثابتة)
Statistical Approaches	مقاربات إحصائية
Stiffened Structures	بنى (إنشاءات) مُدعَّمة
Stiffener Design	تصميم الدعامة
Stiffeners	دعامات
Stiffening Strip Concept	مفهوم الشريطة الداعمة
Stiffness	الجساءة
Stiffness in Arbitrary Coordinates	الجساءة في إحداثيات كيفية (اعتباطية)
Stiffness in Fiber Direction	الجساءة وفق اتّجاه الليف
Stiffness Ratio	نسبة الجساءة
Stiffness Tensor	موتّر الجساءة
Stiffness Transverse to Fiber Direction	الجساءة العرضانية بالنسبة إلى اتجاه الليف
Stiffness-Critical	حديّ الجساءة
Stiffnesses	الجساءة
Stiffness-Sensitive Structures	بنى (إنشاءات) حساسة للجساءة
Strain and Stress Variation	تغيّر الإجهاد والتشوّه
Strain Assumptions	فرضيات التشوّه النسبي
Strain Distribution	توزّع التشوّه
Strain Energy	طاقة التشوّه
Strain-Displacement Relations	علاقات التشوّه ـ الانزياح
Strain-Energy-Release Rate	سرعة (معدّل) تحرّر طاقة التشوّه
Strains	تشوّهات نسبية
Strain-Stress Relations	علاقات تشوّه ـ إجهاد
Strength	مقاومة، (قوة)

Strength in Fiber Direction	المقاومة وفق اتجاه الليف
Strength Tensor	موتّر (تنسور) المقاومة
Strength Transverse to Fiber Direction	المقاومة العرضانية بالنسبة إلى اتجاه الليف
Strength-Critical	حديّ المقاومة
Stress Concentration	تركيز الإجهاد
Stress Concentration Factor	عامل تركيز الإجهاد
Stress Distribution	توزّع الإجهاد
Stress-Intensity Factors	عوامل شدّة تركيز الإجهاد
Stress-Strain Relations	علاقات إجهاد ـ تشوّه
Strong Design Drivers	موجّهات التصميم القوي
Structural	بنيوي (إنشائي)
Structural Configuration	التشكيل الإنشائي
Structural Design Process	إجرائية التصميم الإنشائي (البنيوي)
Structural Optimization	الأمْثَلة الإنشائية
Structural Optimization Techniques	تقنيات الأمْثَلة الإنشائية
Structural Polymers	بوليميرات إنشائية
Structural Reconfiguration	إعادة التشكيل الإنشائي (البنيوي)
Structural Response Parameters	وسائط (بارامترات) الاستجابة الإنشائية
Symmetric Angle-Ply Laminates	صفائح طبقية متناظرة ذات رقاقات مائلة
Symmetry	تناظر
Tailoring of	ضبط
Tailoring of Composite Materials	ضبط المواد المركّبة
Tape Laying	توضع الشريطة
Temperature-Dependent Properties of	خواصّ مرتبطة بدرجة الحرارة
Tensor Shear Strain	موتّر (تنسور) تشوّه القص
Thermal Coupling	تزاوج حراري

Thermal Stresses	الإجهادات الحرارية
Thermoplastic	بوليميرات التلدّن الحراري
Thermoplastic-Matrix Materials	مواد ذات رابط متلدّن حرارياً
Thermoset	بوليميرات التصلّب الحراري
Thermoset-Matrix Materials	مواد ذات رابط متصلّب حرارياً
Torsion-Tube Test	اختبار التواء (فتل) الأنبوب
Total Potential Energy	الطاقة الكامنة الكلية
Trade-Off	مفاضلة، مبادلة: تنازل عن أمر ما مقابل أمرٍ آخر
Transformation of	تحوّل
Transformation of Stiffnesses	تحوّلات معاملات الجساءة
Transformation of Strains	تحويل التشوّهات
Transformation of Stresses	تحويل الإجهادات
Transformed Reduced	محوّل مختزَل
Transformed Reduced Stiffnesses	معاملات الجساءة المتحوّلة والمختزَلة
Transverse Load	حمولة عرضانية
Transverse Mode	نمط عرضاني
Transverse Shearing Effects	آثار القص العرضاني
Transverse Shearing Stresses	إجهادات القص العرضاني
Transverse Strength	مقاومة عرضانية
Transverse to Fiber Direction	عرضاني بالنسبة إلى اتجاه الليف
Transversely Isotropic	متماثل (موحّد) المناحي عرضانياً
Transversely Isotropic	متماثل المناحي عرضانياً
Trifurcation	مثالثة الاتجاه، ثلاثية الاتجاهات (الفروع)
Tsai's Laminate Ranking Procedure	إجرائية تساي لترتيب الصفائح الطبقية
Tsai-Hill Criterion	معيار تساي ـ هيل
Tsai-Hill Failure Criterion	معيار تساي ـ هيل للانهيار

Tsai-Wu Criterion	معيار تساي ـ وو
Tsai-Wu Tensor Failure Criterion	معيار تساي ـ وو الموتّري للانهيار
Tsai-Wu Tensor Failure Criterion	موتّر (تنسور) معيار تساي ـ وو للانهيار
Ultimate Load	الحمل الأعظمي
Underdesign	تصميم ضعيف، تصميم أقل من المطلوب
Unequal in Tension and Compression	غير متساوٍ في الشد والضغط
Uniaxial Tension Test	اختبار الشدّ المحوري
Unidirectionally Reinforced	مقوّى محورياً
Unidirectionally Reinforced Lamina	رقاقة مقوّاة محورياً
Unsymmetric Cross-Ply Laminates	صفائح طبقية لا متناظرة ذات رقاقات متصالبة
Unsymmetric Laminate	صفيحة طبقية لا متناظرة
Variational Techniques	تقنيات متغيّراتية
Variations in Displacements	تغيّرات في الانزياحات (الانتقالات، الانسحابات)
Vibration	اهتزاز
Vibration of Laminated Plates	اهتزاز الصفائح متعددة الطبقات
Vinyl Ester	استرات الفينيل
Viscoelastic Behavior	سلوك مرن لزج
Volume Fraction	النسبة الحجمية
Volumetric Strain	تشوّه حجمي
Weibul Distribution	توزّع وايبول
Weight-Sensitive Structures	إنشاءات (بنى) حسّاسة للوزن
Whiskers	ألياف شعرية (سبلات)
Wide Optimum Design	تصميم أمثلي عريض
Woven Lamina	رقاقة محيكة
Young's Moduli	معاملات يونغ

فهـــرس

ـ ث ـ

ـ ج ـ

ـ ح ـ

ـ خ ـ

ـ ز ـ

ـ س ـ

ـ ش ـ

ـ غ ـ

ـ ف ـ

ـ ق ـ

ـ ك ـ

ـ ن ـ

ـ هـ ـ

الملحق (أ)

المصفوفات والموترات

يُفيد ترميز المصفوفة والموتر عند التعامل مع أنظمة المعادلات. تعتبر نظرية المصفوفة مجموعة عمليات مباشرة في الجبر الخطي وتم تغطيتها في الفقرة أ.1. ويعتبر ترميز الموتر الذي يعالج في الفقرة أ.2 شكلَ تصنيف يتراوح التعقيد فيه تصاعدياً من الأعداد (موترات من المرتبة صفر) والمتجهات (موترات من المرتبة الأولى) حتى الموترات من المرتبة الثانية وما بعدها.

تتعلق العمليات الرياضياتية في دراسة ميكانيك المواد المركبة بقوةٍ باستعمال نظرية المصفوفات. وتكون نظرية الموترات غالباً أداةً مناسبة مع أنه يمكن تجنب مثل هذا الترميز المنهجي بدون خسارةٍ كبيرة. مهما يكن، تكون بعض خصائص المواد المركبة أكثر وضوحاً وتقييماً إذا كان القارئ مُلمّاً بنظرية الموتر.

أ.1 جبر المصفوفات

أ.1.1 تعاريف المصفوفة

المصفوفة هي شبكة (Array) مستطيلة من العناصر. تمتلك الشبكة m صفوفاً (Rows) و n وأعمدة (Columns) وتسمى مصفوفة مستطيلة من المرتبة (m,n). في حال كان m=n، تسمى الشبكة مصفوفةً مربعة من المرتبة n. تسمى عناصر الشبكة [A] بواسطة الرمز A_{ij} أي العنصر في الصف من المرتبة i (i^{th}) والعمود من المرتبة j (j^{th}) في [A]. من هنا، تعتبر المصفوفة شبكةً:

$$[A]=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \qquad (\text{أ}.1)$$

تتساوى شبكتان [A] و[B] فقط إذا امتلكتا نفس العدد من الصفوف والأعمدة وتساوى جميع عناصرهما المتوافقة، أي أنه:

$$A_{ij} = B_{ij} \qquad i = 1, m \qquad j = 1, n \tag{2.أ}$$

تتألف مصفوفة صف من صفٍ وحيدٍ وتمتلك المرتبة (1,n):

$$\left[A\right] = \left[A_1 A_2 \cdots A_n\right] \tag{3.أ}$$

تمتلك مصفوفة عمود (Column Matrix) من عمودٍ وحيدٍ وتمتلك المرتبة (n,1):

$$\left[A\right] = \left\{A\right\} = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} \tag{4.أ}$$

حيث تستعمل الحاصرتان (Braces) للتمييز بين مصفوفة عمود ومصفوفة عامة (على الرغم من عدم استعمال ذلك في هذا الكتاب).

يُرمز لمنقول (Transpose) مصفوفة بواسطة اللاحقة العلوية (Superscript) T:

$$\left[A\right]^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \tag{5.أ}$$

ويتم الحصول عليه بواسطة تبديل الصفوف والأعمدة في المعادلة (أ.1).

في مصفوفة مربعة، يمتد الخط القطري الرئيسي من الزاوية العليا اليسرى إلى الزاوية السفلى اليمنى للمصفوفة. بهذا، يمتلك الخط القطري الرئيسي العناصر A_{ii}. وتمتلك المصفوفة المتناظرة (المربعة) عناصر متناظرة حول الخط القطري الرئيسي، أي أن:

$$A_{ij} = A_{ji} \tag{6.أ}$$

والطريقة الأخرى للتعبير عن ذلك هي $[A]^T = [A]$.

تتمثل مصفوفة قطرية بواسطة مصفوفة مربعة تساوي جميع عناصرها الصفر باستثناء عناصر الخط القطري الرئيسي (أي أن جميع العناصر خارج الخط القطري الرئيسي تساوي الصفر):

$$\begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & A_{mn} \end{bmatrix} \tag{أ.7}$$

إذا كانت العناصر على الخط القطري الرئيسي لمصفوفة قطرية متساوية، تسمى المصفوفة مصفوفةً لا موجَّهة (Scalar). وتمتلك واحدةٌ من المصفوفات اللاموجهّة الهامة جميع عناصر المحور القطري الرئيسي تساوي الواحد، وتسمى هذه المصفوفة مصفوفة التطابق (Identity Matrix) أو مصفوفة الوحدة (Unit Matrix).

$$[I] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{أ.8}$$

يسمى مُعيّن (Determinant) مصفوفة مربعة من المرتبة الثانية بالمُعيّن من المرتبة الثانية ويُعرّف كما يلي:

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} = A_{11}A_{22} - A_{12}A_{21} \tag{أ.9}$$

بينما في مُعيّن من المرتبة الثالثة:

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} = A_{11}\begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} - A_{12}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} + A_{13}\begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \tag{أ.10}$$

وبالاستقراء الرياضياتي، ومن أجل مُعيّن من المرتبة n، وإذا كان M_{1i} المُعيّن من المرتبة n-1 المُتشكل بحذف الصف الأول والعمود رقم i^{th} من D

$$D = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{vmatrix} = A_{11}M_{11} - A_{12}M_{12} + \cdots + (-1)^{1+n} A_{1n}M_{1n} \tag{أ.11}$$

هذا يعني أن مُعيّناً من المرتبة n يُعرّف بدلالة مُعيّن من المرتبة n-1. يسمى المُعيّن M_{1i} في المعادلة (أ.11) قاصر (Minor) العنصر A_{1i} وتسمى الكمية $(-1)^{1+i} M_{1i}$ تمام العامل (Cofactor) لـــ A_{1i} أي إن:

$$a_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \qquad \text{(أ.12)}$$

يمكن تقدير أي مُعيّن بواسطة النشر وفق أي صفٍ أو عمودٍ، أي إن:

$$D = \sum_{i=1}^{n} A_{ij}\, a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} A_{ij}\, a_{ij} \qquad \text{(أ.13)}$$

حيث لا تُجمع القرينة (Index) الحرة.

تتضمن بعض الخصائص الأساسية للمُعيّنات:

(أ) إذا ضُرب كل عنصرٍ من صفٍ أو عمودٍ بـــ k، يكون المُعيّن قد ضُرب بـــ k.

(ب) إذا كان صفان أو عمودان متناسبين، يكون المُعيّن معدوماً.

(ت) إذا تم تبادل صفين أو عمودين، تتغير إشارة المُعيّن.

(ث) إذا تم تبادل الصفوف والأعمدة، لا يتغير المُعيّن.

إن مصفوفة تمام العامل لمصفوفة مربعة هي مصفوفة تمام عوامل كل عنصرٍ، أي إن:

$$a = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad \text{(أ.14)}$$

أ.2.1 عمليات المصفوفات

الجمع

يمكن جمع مصفوفتين [A] و [B]، فقط إذا كان لهما نفس العدد من الصفوف والأعمدة على التوالي. عندئذٍ، يتم الحصول على المجموع [C] بجمع العناصر المتوافقة في [A] و [B]:

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij} \qquad (أ.15)$$

وعلى سبيل المثال:

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} \end{bmatrix} \qquad (أ.16)$$

ومن الواضح أن الجمع تبادليٌ (Commutative)، أي إن:

$$[A]+[B]=[B]+[A] \qquad (أ.17)$$

وتشاركيٌ (Amoiotive)، أي إن:

$$[[A]+[B]]+[C]=[A]+[[B]+[C]] \qquad (أ.18)$$

الطرح

يتم الحصول على ناتج طرح مصفوفتين بطرح العناصر المتوافقة في [A] و[**B**]:

$$C_{ij} = A_{ij} - B_{ij} \qquad (أ.19)$$

شريطة أن يكون نفس العدد من الصفوف والأعمدة في [A] و [**B**]. ولا يكون الطرح تبادلياً ولا تشاركياً.

الضرب

إن أبسط شكل عملية ضرب مصفوفة هو ضرب بالمصفوفة [A] بالعدد s حيث تُضرب كل عناصر [A] بـــ s:

$$s[A] = s\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} sA_{11} & sA_{12} \\ sA_{21} & sA_{22} \end{bmatrix} \qquad (أ.20)$$

يُعرّف جداء مصفوفتين [A][B] فقط عندما يكون عدد الصفوف في [B] مساوياً لعدد الأعمدة في [A]. ويقال هنا إن [B] يكون مُسبق الضرب بـــ [A] أو كبديلٍ إن [A] يكون لاحق الضرب بـــ [B]. يتم الحصول على جداء [A][B] أولاً بضربٍ كل عنصرٍ من الصف رقم i^{th} في [A] بالعنصر الموافق في العمود رقم j^{th} في [B] ومن ثم بجمع هذه النتائج:

$$[C]=[A][B]=\left[A_{ik}B_{kj}\right] \quad (أ.21)$$

حيث يتم الجمع على k من 1 إلى رقم العمود في [A]. على سبيل المثال:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_{11} \\ B_{21} \\ B_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_{11}B_{11}+A_{12}B_{21}+A_{13}B_{31} \\ A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}+A_{23}B_{31} \\ A_{31}B_{11}+A_{32}B_{21}+A_{33}B_{31} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} C_{11} \\ C_{21} \\ C_{31} \end{bmatrix} \quad (أ.22)$$

ومن أجل مصفوفة [B] أكثر تعقيداً ذات n عمودٍ بينما يمتلك [A] m صفٍ (تذكر أن [A] يجب أن يمتلك p عمودٍ وأن [B] يجب أن يمتلك p صفٍ)، سيكون للمصفوفة [C] m صفٍ وn عمودٍ. يعني ذلك أن الجداء في المعادلتين (أ.21) و (أ.22) يتكرر عدداً من المرات مساوٍ لعدد الأعمدة في [B]. لاحظ أنه بالرغم من أن الجداء [A][B] يمكن أن يُعطى بالمعادلة (أ.21)، فإن الجداء[B][A] لا يتحدد مباشرةً إلا إذا امتلك [B] و[A] نفس العدد من الصفوف والأعمدة. بهذا لا يمكن ضرب [A] بـــ [B] إذا كان [A][B] معرفاً إلا إذا كان [B] و [A] مربعين. علاوة على ذلك، حتى إذا كان كلٌ من [A][B] و[B][A] معرفين، فليس هناك ضمانة أن [B][A]= [A][B]. هذا يعني أن جداء المصفوفات ليس تبادلياً (Commutative).

قلب المصفوفات

يُرمز إلى مقلوب (Inverse) مصفوفة بواسطة اللاحقة العلوية 1- ويُعَرَّف كما يلي:

$$[A]^{-1}=\frac{[a]^T}{|A|} \quad (أ.23)$$

(يسمى منقول مصفوفة تمام العامل بالمصفوفة المرافقة (Adjoint) ويمتلك الخاصية

$$[A][A]^{-1}=[A]^{-1}[A]=[1] \quad (أ.24)$$

ولا يمكن لمُعيّن [A] في المعادلة (أ.23) أن يتلاشى، وإلا فالمعادلة (أ.23) ليست معرفة ويُقال عن المصفوفة [A] إنها مصفوفة مفردة (Singular Matrix) غير قلوبة أو غير نظامية.

حل المعادلات الخطية

يكمن الاستعمال الرئيسي لمقلوب مصفوفة في حل المعادلات الخطية أو تطبيق التحويلات. إذا كان:

$$\{Y\}=[A]\{X\} \quad (أ.25)$$

حيث $\{Y\}$ و $\{X\}$ مصفوفات عمودية، عندها:

$$[A]^{-1}\{Y\}=[A]^{-1}[A]\{X\}=\{X\} \quad (أ.26)$$

تُعرف النتيجة السابقة والمعادلة (أ.23) على أنها قاعدة كرامر (Cramer). إذا كان $\{Y\}$ في المعادلة (أ.25) مساوياً الصفر، عندها يكون نظام المعادلات:

$$[A]\{X\}=0 \quad (أ.27)$$

متجانساً (Homogeneous). وإذا كانت [A] لا فردية قلوبً (نظاميً) (أي مقلوبها موجود $[A]^{-1}$)، عندها يكون:

$$\{X\}=[A]^{-1}\{0\}=\{0\} \quad (أ.28)$$

يسمى هذا الحل من أجل $\{X\}$ حيث تساوي كل المجاهيل الصفر بالحل البديهي. لهذا، يوجد حلٌ غير بديهي للمعادلة (أ.27)، فقط عندما تكون المصفوفة [A] غير قلوبة، أي عندما $|A|=0$.

متفرقات

تشتمل بعض عمليات المصفوفة ذات الأهمية على:

$$\left[[A]^{-1}\right]^{T}=\left[[A]^{T}\right]^{-1} \quad (أ.29)$$

أي إن منقول مقلوب مصفوفة يساوي مقلوب المنقول، وأيضاً:

$$([A][B][C])^{T}=[C]^{T}[B]^{T}[A]^{T} \quad (أ.30)$$

$$([A][B][C])^{-1}=[C]^{-1}[B]^{-1}[A]^{-1} \quad (أ.31)$$

التي تُعرف بقوانين النقل والقلب على التوالي.

أ.2 الموترات

تُستعمل المتجهات (vectors) لوصف عددٍ من الكميات الفيزيائية مثل القوة والانزياح والسرعة، إلخ. ومع ذلك، لا تكفي المتجهات (vectors) لتمثيل كل الكميات

الفيزيائية الهامة. وعلى سبيل المثال، لا يمكن تمثيل الإجهاد والانفعال وقوانين الإجهاد-انفعال بواسطة المتجهات (vectors)، ولكن يمكن تمثيلها بواسطة الموترات. وتعتبر الموترات (Tensors) على الخصوص تعميماً مفيداً للمتجهات. وتكمن السمة المفتاحية للموترات في أنها تتحول وفق أشكالٍ خاصةٍ بواسطة دوران المحاور الإحداثية. يعطي تساي [A-1] معالجةً كاملةً لنظرية الموترات تفيد في تحليل المواد المركبة. ويشكل ما يلي الأساسيات الجوهرية.

سيتم مناقشة الموترات الديكارتية أي الموترات في نظام الإحداثيات الديكارتية. يتطلب تحديد موقع نقطةٍ في الإحداثيات الديكارتية ثلاث كميات مستقلة. وتكون مجموعة الكميات هذه x_i حيث يتمثَّل x_i بواسطة (x_1, x_2, x_3). وتأخذ الدالة i في x_i القيم 1, 2, 3 بسبب الإحداثيات الثلاثة في الحيز ثلاثي الأبعاد. كما تعني الأدلة (Indices) i و j في a_{ij} أن a_{ij} يمتلك إذاً تسع مركبات. وبالتشابه، يمتلك b_{ijk} 27 مركبة ويمتلك c_{ijkl} 81 مركبة، إلخ. تُشكل الأدلة جزءً مما يسمى الترميز بالأدلة. ويشير عدد اللاحقات السفلية على الرمز إلى مرتبة الموتر. على سبيل المثال، يُمثِّل a موتراً من المرتبة صفر (عدديٍ) و a_i موتراً من المرتبة واحد (متجه) و a_{ij} موتراً من المرتبة الثانية و c_{ijkl} موتراً من المرتبة الرابعة، إلخ. يكون عدد المركبات اللازمة لوصف موترٍ من المرتبة k في حيزٍ عدد أبعاده n

$$N= n^k \qquad (\text{أ}.32)$$

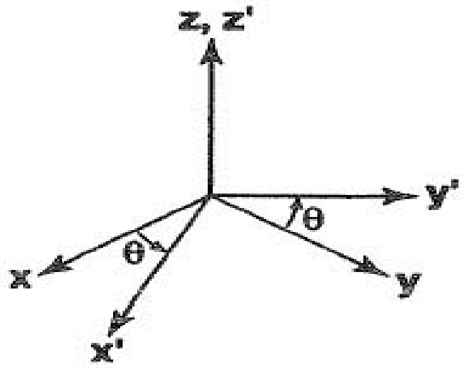
سيتم استعمال اصطلاح المدى واصطلاح الجمع. وينص *اصطلاح المدى* (range) على أن اللاحقة السفلية التي تظهر مرةً واحدةً على جانبٍ واحدٍ في عبارةٍ تأخذ القيم 1 و2 و3. وينص *اصطلاح الجمع* (summation) على أن اللاحقة السفلية التي تظهر مرتين على جانبٍ واحدٍ في عبارةٍ تُجمع من 1 إلى 3. تسمى الدليل المكررة بالدليل الدمية (Dummy Index) الوهمية.

أ.2.1 تحويل المحاور الإحداثية

لنعتبر سلوك موترات متعددة لدى تحويل المحاور الإحداثية في الشكل أ-**1** حيث يتم الدوران حول الخط القطري z. يعني ذلك أن الإحداثيات x, y, z تتحول إلى

الإحداثيات x', y', z' حيث ينطبق الاتجاه z مع الاتجاه z'. تكون جيبات تمام الاتجاهات (التي يصنعها المتجه) في هذا التحويل:

$$[a_{ij}] = [T] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(أ.33)}$$



الشكل أ–1: تدوير المحاور الإحداثية في المستوي x-y

حيث يكون α_{ij} جيب تمام الزاوية بين الاتجاه i^{th} في النظام x', y', z' والاتجاه j^{th} في النظام x, y, z ، أي من أجل كل التحويلات (وليس فقط الدوران الخاص السابق)

$$\alpha_{ij} = \cos(x'j, x_j) \qquad \text{(أ.34)}$$

هكذا، يمكن كتابة تحويل الإحداثيات بواسطة ترميز الدليل:

$$x'_i = \alpha_{ij} x_j \qquad \text{(أ.35)}$$

أو:

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \\ x'_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \\ x'_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \end{aligned} \qquad \text{(أ.36)}$$

أو بواسطة الشكل المصفوفي:

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \qquad (\text{أ}.37)$$

وسيستعمل هذا النوع من التحويل للمساعدة في تعريف مراتب متعددة من الموترات. وسيعرَّف كل موتر على قاعدة نوع التحويل الذي يحققه. تتحول الموترات وفق العلاقات:

$$x'_{ij\cdots ki} = \alpha_{im}\alpha_{jn}\cdots\alpha_{ko}\alpha_{1p}x_{mn\cdots op} \qquad (\text{أ}.38)$$

أ.2.2 تعريف مراتب الموتر المتعددة

العدد (Scalar) هو موتر من المرتبة صفر يمتلك $3^0=1$ مركبة. وحيث إنه يمتلك مقداراً فقط وليس اتجاهاً، فلا يحتاج الأمر إلى علاقات تحويل. وتشمل الأمثلة على الأعداد السرعة (وليس متجه السرعة) والعمل والطاقة.

المتجة هو موتر من المرتبة الأولى يمتلك $3^1=3$ مركبة. وتتحول المتجهات (vectors) وفق العلاقة:

$$A'_i = \alpha_{ij}A_j \qquad (\text{أ}.39)$$

حيث يُمثل A'_i المتجه المُحوَّل و a_{ij} تجيبات اتجاه التحويل و A_j المتجه الأصلي. وتشمل الأمثلة على المتجهات (vectors) الانزياحات والإحداثيات وشعاع السرعة والقوى والعزوم.

يمتلك موتر من المرتبة الثانية $3^2=9$ مركبة ويتحول على النحو التالي:

$$A'_{ij} = \alpha_{ik}\alpha_{ji}A_{ki} \qquad (\text{أ}.40)$$

ويكون كلٌ من الإجهاد والإنفعال موتراً من المرتبة الثانية.

يمتلك موتر من المرتبة الرابعة $3^4=81$ مركبة ويتحول على النحو التالي:

$$A'_{ijkl} = \alpha_{im}\ \alpha_{jn}\alpha_{ko}\alpha_{ip}\alpha_{mnop} \qquad \text{(أ.41)}$$

وتعتبر الجساءة ومعاملات المطاوعة في علاقات الإجهاد- انفعال والانفعال- إجهاد موترات من المرتبة الرابعة لأنها تربط موترين من المرتبة الثانية:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} \qquad \text{(أ.42)}$$

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijkl}\sigma_{kl} \qquad \text{(أ.43)}$$

أ.3.2 الترميز المختزل

الترميز المختزل (Contracted) هو إعادة ترتيب الحدود بحيث إن عدد الأدلة (Indices) يقلُّ بالرغم من تزايد مداها. في حالة الموترات من المرتبة الثانية، ينخفض عدد الأدلة من 2 إلى 1 ويزداد المدى من 3 إلى 9. تُختزل الإجهادات والانفعالات كما في الجدول أ-1. وتمتلك موترات معاملات الجساءة ومعاملات المطاوعة من المرتبة الرابعة في المعادلات (أ.42) و (أ.43) دليلين بدلاً من 4 أدلة حرة مع مدىً جديدٍ قدره 9. ويبقى عدد المركبات 81 ($3^4=9^2$).

الجدول أ-1: ترميز الموتر مقابل الترميز المختزل

الإجهادات		الانفعالات	
ترميز الموتر	**الترميز المختزل**	**ترميز الموتر**	**الترميز المختزل**
σ_{11}	σ_1	ε_{11}	ε_1
σ_{22}	σ_2	ε_{22}	ε_2
σ_{33}	σ_3	ε_{33}	ε_3
$\sigma_{23}=\tau_{32}$	σ_4	$2\varepsilon_{23}=\gamma_{23}$	ε_4
$\sigma_{31}=\tau_{31}$	σ_5	$2\varepsilon_{31}=\gamma_{31}$	ε_5
$\sigma_{12}=\tau_{12}$	σ_6	$2\varepsilon_{12}=\gamma_{12}$	ε_6
$\sigma_{32}=\tau_{32}$	σ_7	$2\varepsilon_{32}=\gamma_{32}$	ε_7
$\sigma_{13}=\tau_{13}$	σ_8	$2\varepsilon_{13}=\gamma_{13}$	ε_8
$\sigma_{21}=\tau_{21}$	σ_9	$2\varepsilon_{21}=\gamma_{21}$	ε_9

في الترميز المختزل، تُكتب علاقات الإجهاد- انفعال وانفعال- إجهاد في المعادلات (أ.42) و(أ.43) على النحو التالي:

$$\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j \qquad \text{(أ.44)}$$

$$\varepsilon_i = S_{ij}\sigma_j \qquad \text{(أ.45)}$$

من الواضح أن عدد الأدلة الحرة لا يشير بعد إلى مرتبة الموتر. كما أن المدى على الأدلة لا يشير بعد إلى عدد أبعاد الحيز. إذا كان موترا الإجهاد والانفعال متناظرين (يكونا كذلك في حال عدم تطبيق مزدوجات على العنصر)، يصبح عندها:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad \varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \qquad \text{(أ.46)}$$

وينخفض عندئذٍ عدد الإجهادات والانفعالات المستقلة إلى ستة لكلٍ منها، كما في الجدول 2-1. يؤدي هذا النوع من التناظر إلى تخفيض عدد المركبات المستقلة في C_{ij} و S_{ij} من 81 إلى 36 في الحيز ثلاثي الأبعاد. ويمكن أيضاً بيان أن C_{ij} و S_{ij} يمكن أن يكونا متناظرين (انظر الفقرة 2.2)، أي أن

$$C_{ij} = C_{ji} \qquad S_{ij} = S_{ji} \qquad \text{(أ.47)}$$

وعندها، ينخفض أيضاً عدد المركبات المستقلة في C_{ij} و S_{ij} من 36 إلى 21 في الحيز ثلاثي الأبعاد. كما يصبح عندها موتر الجساءة (يعتبر موتر المطاوعة مشابهاً)

$$C_{ij} = [C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{15} & C_{25} & C_{35} & C_{45} & C_{55} & C_{56} \\ C_{16} & C_{26} & C_{36} & C_{46} & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \qquad \text{(أ.48)}$$

حيث تكون علاقة مركبة C_{ij} مع مركبة C_{ijkl} معقدةً على الأرجح.

أ.2.4 الشكل المصفوفي لتحويلات الموتر

يمكن بسهولة كتابة الموترات بواسطة شكل المصفوفة. ويمكن، على سبيل المثال، تمثيل متجهٍ بواسطة مصفوفة عمود:

$$a_i = [A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} \quad \text{(أ.49)}$$

أو مصفوفة صف:

$$a_i = [A] = [A_1 \quad A_2 \quad A_3] \quad \text{(أ.50)}$$

ويمكن كذلك كتابة موترٍ من المرتبة الثانية:

$$a_{ij} = [A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad \text{(أ.51)}$$

أو بواسطة الترميز المختزل على شكل مصفوفة عمودٍ (أو صفٍ):

$$a_i = [A] = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \\ A_9 \end{bmatrix} \quad \text{(أ.52)}$$

يمكن كتابة موترٍ من المرتبة الرابعة على شكل شبكةٍ 9 x 9 بالتشابه مع المعادلة (أ.51)، لكنها تُختصر بشكلٍ كبيرٍ أحياناً بواسطة الترميز المختزل إلى شبكةٍ (Array) متناظرةٍ 6 x 6.

يُعبر عموماً في هذا الكتاب عن علاقات الإجهاد− انفعال على شكل مصفوفةٍ باستعمال الترميز المختزل. وينبغي تحويل كلٍ من الإجهادات والانفعالات، وكذلك علاقات الإجهاد− انفعال. وتتحول، أولاً، الإجهادات من أجل دوران حول الخط القطري z كما في الشكل أ−1 وفق ما يلي:

$$\{\sigma'\} = [T]\{\sigma\} \quad \text{(أ.53)}$$

أو:

$$\begin{bmatrix}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ \sigma'_3\\ \sigma'_4\\ \sigma'_5\\ \sigma'_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 0 & 0 & 0 & 2\cos\theta\sin\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & 0 & 0 & 0 & -2\cos\theta\sin\theta\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0\\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0\\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & 0 & 0 & 0 & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ \sigma_4\\ \sigma_5\\ \sigma_6\end{bmatrix} \quad \text{(أ.54)}$$

وتختصر هذه العلاقة من أجل بعدين إلى:

$$\begin{bmatrix}\sigma'_1\\ \sigma'_2\\ \tau'_{12}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos^2\theta & \sin^2\theta & 2\cos\theta\sin\theta\\ \sin^2\theta & \cos^2\theta & -2\cos\theta\sin\theta\\ -\cos\theta\sin\theta & \cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta-\sin^2\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \tau_{12}\end{bmatrix} \quad \text{(أ.55)}$$

وتُعرف هذه العلاقة في تمثيلٍ بياني بدائرة مورس (Mohr's) الشهيرة. تتحول الانفعالات بطريقةٍ مشابهة، كما هو مبين في الفقرة 6.2 من أجل حالة إجهادٍ في المستوي. وتُعتبر تحويلات الجساءة والمطاوعة معقدةً جداً حتى من أجل تدويرٍ بسيطٍ حول محورٍ كما في المعادلة (أ.33). تُعطى العبارات الكاملة من قبل تساي [A−1]. ومن أجل حالات الإجهاد في المستوي، تُعطى تحويلات معاملات الجساءة المختزلة في الفقرة 6.2.

المراجع

A-1 Stephen W. Tsai, *Mechanics of Composite Materials, Part II, Theoretical Aspects*, Air Force Materials Laboratory Technical Report, AFML-TR-66-149, November 1966.

الملحق (ب)

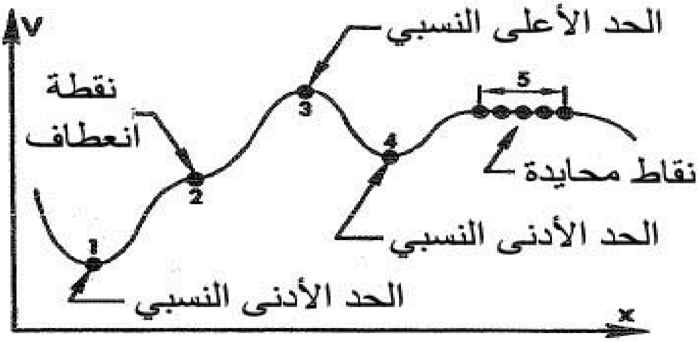
الحدود الأعظمية والحدود الدنيا لدالات متغير وحيد

يعرف معظم طلاب الهندسة جيداً أن المشتق الأول لدالة مستمرةٍ ينعدم عند الحدود الأعظمية والحدود الدنيا للدالة. وقليلٌ منهم يتذكر أن إشارة المشتق الثاني تُحدد ما إذا كانت القيمة الثابتة المحددة بالمشتق الأول المعدوم أعظميةً أم دنيا. حتى أن عدداً أقل منهم يعرف ما العمل إذا حصل أن كان المشتق الثاني معدوماً. من هنا، يأتي هذا الملحق لوضع وجود الحدود الأعظمية والحدود الدنيا النسبية لدالة على أساسٍ ثابتٍ.

لنعتبر الدالة V للمتغير الوحيد x، V(x)، حيث يأخذ قيمةً ثابتةً عند $x = x_1$، أي إن:

$$\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_1} = 0 \qquad (\text{ب}.1)$$

حيث يمكن أن تكون القيمة الثابتة لـــ V حداً نسبياً أعظمياً أو حداً نسبياً أدنى أو نقطةً محايدةً أو نقطة انعطافٍ (Inflection) كما في الشكل ب−1. هنا، تتحقق المعادلة (ب−1) في النقاط ,2 ,3 ,4 ,1 و 5. وبالمعاينة، تمتلك الدالة V(x) حداً نسبياً أدنى في النقاط 1 و 4 وحداً نسبياً أعظمياً في النقطة 3 ونقطة انعطافٍ في النقطة 2. ويظهر أيضاً في الشكل ب−1 في الموقع 5 تتابعاً من النقاط المعتدلة (Neutral) حيث ينعدم فيها كل مشتقات V(x). وكمثالٍ فيزيائي بسيطٍ على هذه القيم الثابتة، يمكن اعتبار خرزةٍ على سلكٍ يمتلك نفس الشكل ب−1. يعني ذلك أن الحد الأدنى لـــ V(x) (الطاقة الكامنة الكلية للخرزة) يوافق توازناً مستقراً، وأن الحد الأعظمي ونقطة الانعطاف يوافقان توازناً غير مستقرٍ، وأن النقطة المحايدة توافق توازناً محايداً.

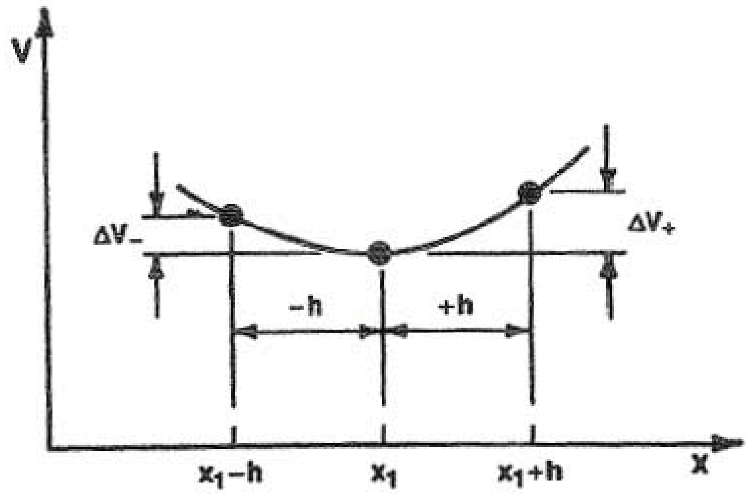


الشكل ب−1: قيم واقفة لـــ V(x)

من أجل تحديد السمة الخاصة لنقطةٍ واقفة (Stationary)، أنشر أولاً V(x) بواسطة متسلسلة تايلور عند النقطة الثابتة $x = x_1$:

$$V(x_1 + h) = V(x_1) + h\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_1} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_1} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3V}{dx^3}\Big|_{x=x_1} + \cdots \quad (ب-2)$$

حيث يكون h باراميتر النشر (Expansion parameter) حول x_1 كما في الشكل ب−2.



الشكل ب−2: نشر متسلسلة تايلر لـــ V(x) حول $x=x_1$

عندها، يكون التغير ΔV في V :

$$\Delta V = h\frac{dV}{dx}\Big|_{x=x_1} + \frac{h^2}{2!}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_1} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3V}{dx^3}\Big|_{x=x_1} + \cdots \quad \text{(ب.3)}$$

مهما يكن، وبناءً على تعريف النقطة الواقفة في المعادلة (ب.1)، يتلاشى الحد الأول في معادلة ΔV (ب.3) مهما كانت قيمة وطول h، وهكذا يكون:

$$\Delta V = \frac{h^2}{2!}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_1} + \frac{h^3}{3!}\frac{d^3V}{dx^3}\Big|_{x=x_1} + \frac{h^4}{4!}\frac{d^4V}{dx^4}\Big|_{x=x_1} + \cdots \quad \text{(ب.4)}$$

ستحدد طبيعة ΔV نوع القيمة الواقفة عند $x= x_1$. ونبغي بشكلٍ خاص تفحص الحد المهيمن في متسلسلة تايلور لــ ΔV وذلك لتحديد فيما إذا كان ΔV موجباً دائماً (حدٌ نسبي أدنى) أو سالباً دوماً (حدٌ نسبي أعظمي) أو سالباً أحياناً وموجباً أحياناً (نقطة انعطاف) أو معدوماً دائماً (نقطة محايدة). وكي يكون ΔV موجباً، يجب أن يكون الحد الطليعي في متسلسلة تايلور، المعادلة (ب.4)، الذي يُعتبر بالمعاينة أكبر حدٍ لأن h هو عددٌ صغيرٌ جداً، موجباً، أي إن:

$$\frac{h^2}{2!}\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_1} > 0 \quad \text{(ب.5)}$$

لكن حتى لو كان يمكن أن يمتلك h قيماً موجبةً أو سالبةً، وبسبب تربيع h، فإن:

$$\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_1} > 0 \quad \text{(ب.6)}$$

يكفي من أجل قيمةٍ دنيا لــ V(x) عند $x= x_1$. ويقود استدلال عقلي مشابه إلى:

$$\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_1} < 0 \quad \text{(ب.7)}$$

كأمرٍ كافٍ من أجل قيمةٍ عظمى لــ V(x) عند $x= x_1$. إلا أنه إذا كان:

$$\frac{d^2V}{dx^2}\Big|_{x=x_1} = 0 \quad \text{(ب.8)}$$

عندها لا يبقى حد المشتق الثاني في متسلسلة تايلور الحد المهيمن.

بناءً على ذلك، فالحد التالي في متسلسلة تايلور:

$$\frac{h^3}{3!}\frac{d^3V}{dx^3}\Big|_{x=x_1} \qquad (ب.9)$$

يجب أن يُدرس. ومن الواضح ومهما كانت قيمة (غير المعدومة) المشتق الثالث، أن الحد في المعادلة (ب.9) يمكن أن يكون موجباً أو سالباً لأن h يمكن أن يمتلك قيماً موجبةً أو سالبةً ولأن h مكعب. وهكذا، تتوافق قيمةٌ غير معدومة للمشتق الثالث لـــ V(x) عند $x= x_1$ مع نقطة انعطاف لـــ V(x) لأن ΔV يمكن أن يكون موجباً أو سالباً.

إذا كان الحد المتعلق بالمشتق الثالث في المعادلة (ب.9) في متسلسلة تايلور معدوماً، عندها، يكون الحد التالي الأعلى:

$$\frac{h^4}{4!}\frac{d^4V}{dx^4}\Big|_{x=x_1} \qquad (ب.10)$$

هو الحد المهيمن. ينبغي بالطبع أن يكون المشتق الثاني معدوماً أيضاً كي نحتاج أبداً لاعتبار الحد الثالث للمشتق. ومن الواضح أن الاستنتاجات التي تم التوصل إليها من أجل الحد الثاني للمشتق تكون صالحةً أيضاً من أجل الحد الرابع للمشتق في المعادلة (ب.10).

هكذا، وبالاستقراء الرياضياتي، تكون قواعد تحديد طبيعة القيمة الثابتة لـــ V(x) عند $x= x_1$

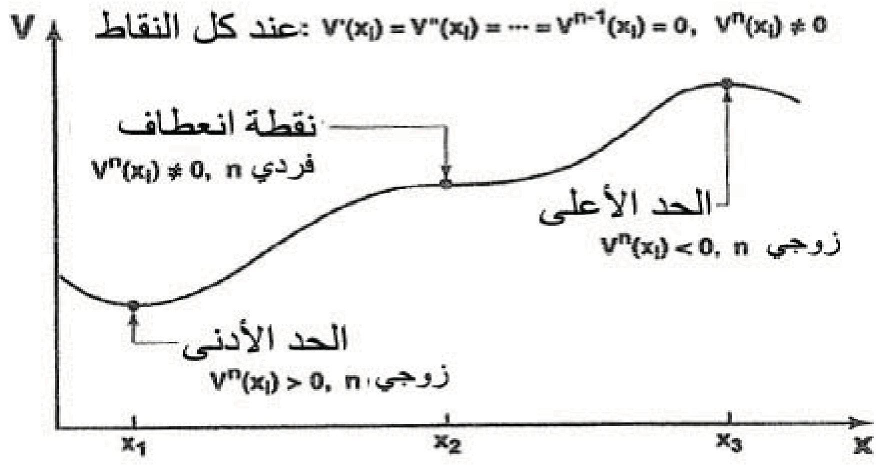
(1) إذا كان المشتق الأول غير المعدوم المُقدَّر عند $x= x_1$ مزدوجاً وأكبر من الصفر، يكون عندها $V(x_1)$ حداً نسبياً أدنى.

(2) إذا كان المشتق الأول غير المعدوم المُقدَّر عند $x= x_1$ مزدوجاً وأقل من الصفر، يكون عندها $V(x_1)$ حداً نسبياً أعظمي.

(3) إذا كان المشتق الأول غير المعدوم المُقدَّر عند $x= x_1$ مفرداً، يكون عندها $V(x_1)$ نقطة انعطاف.

(4) إذا كانت جميع المشتقات معدومةً، يكون عندها $V(x_1)$ نقطة محايدة.

يبيّن الشكل ب−3 ترسيماً تخطيطياً لهذه القواعد.



الشكل ب-3: الحد الأعلى (الأعظمي) والأدنى ونقاط الانعطاف لدالة المتغير وحيد

تُشكل الأمثلة البسيطة التالية مساعداتٍ مفيدةٍ لفهم القواعد السابقة.

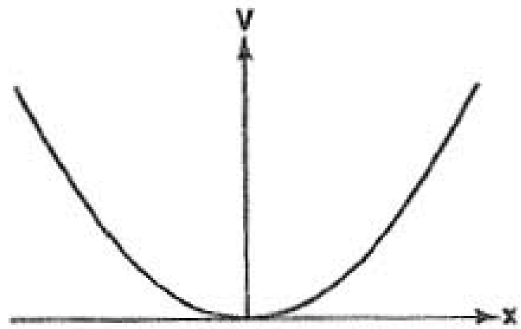
(1) $V = x^2$ (مرسوم في الشكل ب-4)

$V' = 2x$

$V' = 0$ عند $x=0$

$V''\Big|_{x=0} = 2$

∴ يكون $V(0)$ حداً نسبياً أدنى



الشكل ب-4: $V=x^2$

(2) $V = x^3$ (مرسوم في الشكل ب−5)

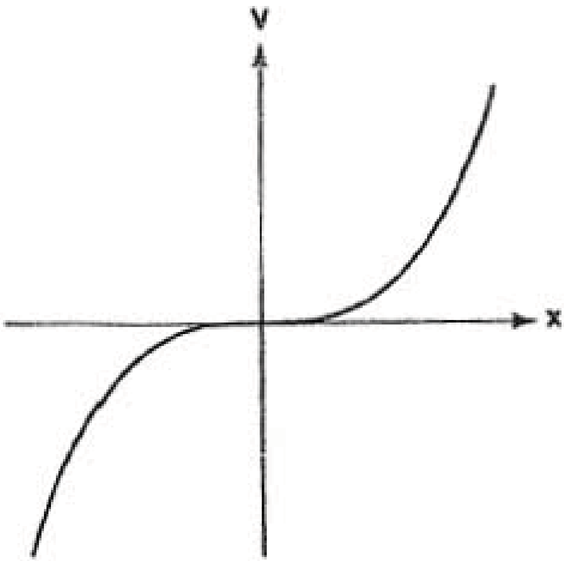
$V' = 3x^2$

$V' = 0$ عند $x=0$

$$V'' \Big|_{x=0} = 6x \Big|_{x=0} = 0$$

$$V''' \Big|_{x=0} = 6$$

∴ يكون $V(0)$ نقطة انعطاف



الشكل ب−5: $V=x^3$

(3) $V = x^4$ (مرسوم في الشكل ب−6)

$V' = 4x^3$

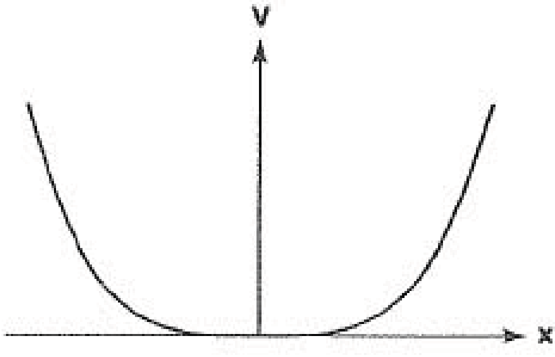
$V' = 0$ عند $x=0$

$$V'' \Big|_{x=0} = 12x^2 \Big|_{x=0} = 0$$

$$V''' \Big|_{x=0} = 24x \Big|_{x=0} = 0$$

$$V'''' \Big|_{x=0} = 24$$

∴ يكون $V(0)$ حداً أدنى



الشكل ب−6: $V=x^4$

(4) $V= x^{10}$ (مرسوم في الشكل ب−7)

$V' = 10x^9$

$V' = 0$ عند $x=0$

وبالاستقراء الرياضي

$$V'' \Big|_{x=0} = 0$$

.

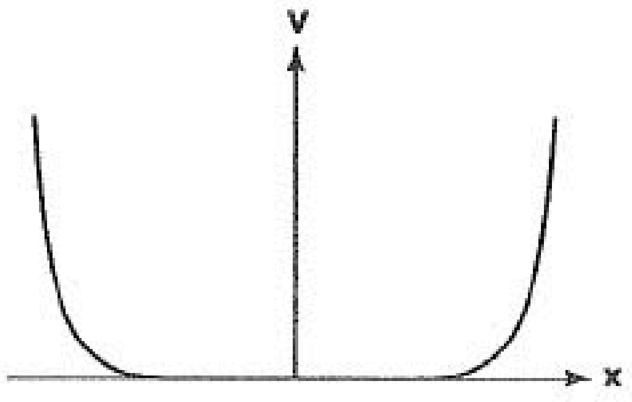
.

.

$$V^{IX} \Big|_{x=0} = 0$$

$$V^{X} \Big|_{x=0} = 10!$$

∴ يكون $V(0)$ حداً أدنى



الشكل ب-7 $V=x^{10}$

إذا كان V تابعاً لأكثر من متغير، عندئذٍ يتم الحصول على معايير أكثر تعقيداً للحصول على الحدود الأعظمية والحدود الدنيا. على العموم، لكن ليس دائماً، تُعتبر المشتقات الجزئية الثانية لدالة بالنسبة لكل متغيرات كافيةً لتحديد طبيعة القيمة الواقفة لـــ V. ومن أجل مثل هذه الدالات، يجب تفحص نظرية الأشكال التربيعية كما وصفها لانغهار [B-1].

المراجع

B-1: Henry L. Langhaar, *Energy Methods in Applied Mechanics*. New York: Wiley, 1962, pp. 308-328. (Also Krieger Publishing, Malabar, Florida, 1982).

الملحق (ج)

منحنيات إجهاد– انفعال نموذجية

يتم عرض منحنيات إجهاد– انفعال نموذجية من أجل المواد المقواة بالألياف شائعة الاستعمال مثل الإيبوكسي– ألياف زجاجية والإيبوكسي– بورون والإيبوكسي– غرافيت المُمَثِل. ولا تعتبر هذه المنحنيات دقيقةً بشكلٍ كافٍ من أجل استعمالات التصميم.

ج.1 منحنيات الإجهاد– انفعال إيبوكسي– ألياف زجاجية

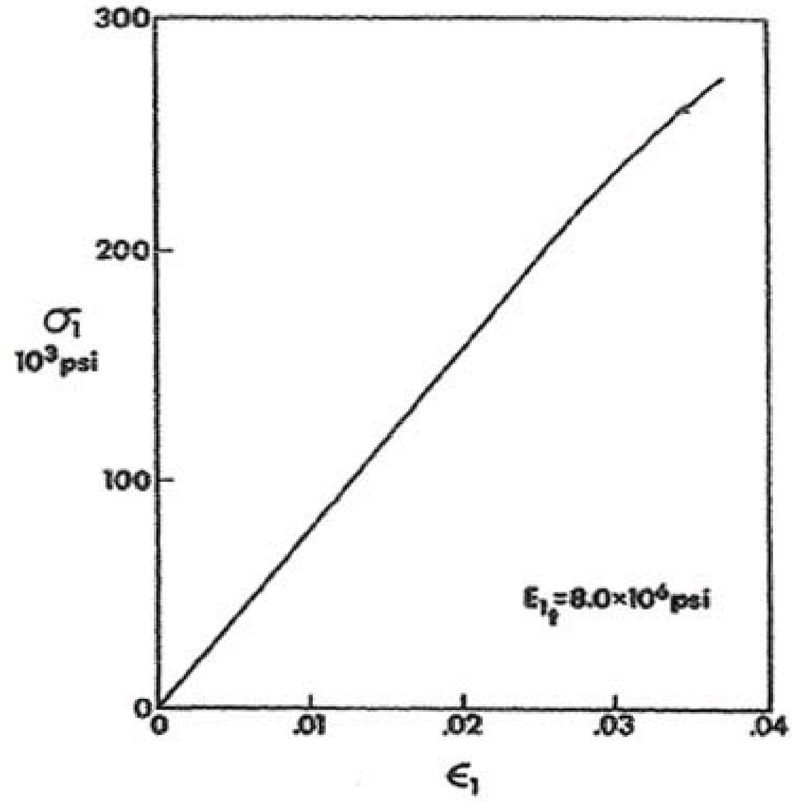
تعطي الأشكال ج–1 حتى ج– 5 منحنيات الإيبوكسي– ألياف زجاجية طراز 3M XP251S [C-1]. تُعطى هذه المنحنيات على السواء من أجل سلوك الشد وسلوك الضغط للإجهادات المباشرة. لاحظ أن السلوك في اتجاه الليف يكون جوهرياً خطياً في الشد وفي الضغط على السواء. وفي الاتجاه العرضاني بالنسبة إلى اتجاه الليف، يكون السلوك خطياً تقريباً في الشد، لكنه غير خطيٍ تماماً في الضغط. كما يكون منحنى الإجهاد– انفعال غير خطيٍ بشكلٍ كبيرٍ في القص. تكون نسب بواسون (غير مبينة في الأشكال) جوهرياً ثوابت قيمها $\nu_{12} = 0.25$ و $\nu_{12} = 0.09$.

ج.2 منحنيات الإجهاد– انفعال إيبوكسي– بورون

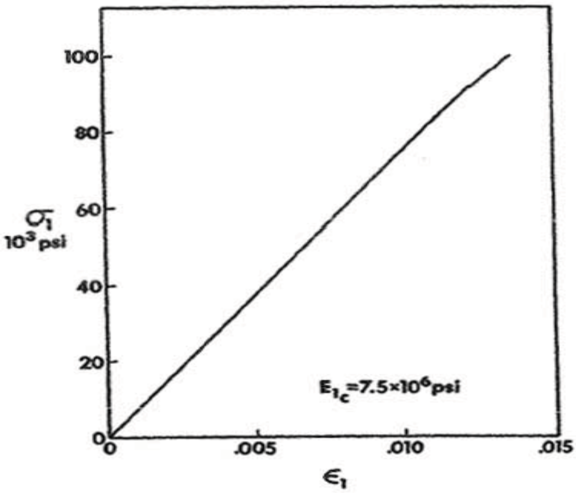
تُبين الأشكال ج.6 إلى ج.11 منحنيات الإيبوكسي– بورون [C–2]. وكما هو الحال مع الإيبوكسي– ألياف زجاجية، يكون السلوك وفق اتجاه الليف جوهرياً خطياً في الشد وفي الضغط على السواء. وفي الاتجاه العرضاني بالنسبة إلى الألياف، يكون السلوك خطياً تقريباً في الشد وغير خطيٍ بعض الشيء في الضغط. أخيراً، يكون السلوك غير خطيٍ تماماً في القص. وتتناقص نسبة بواسون ν_{12} في الشد وتتزايد في الضغط.

ج.3 منحنيات الإجهاد– انفعال إيبوكسي– غرافيت

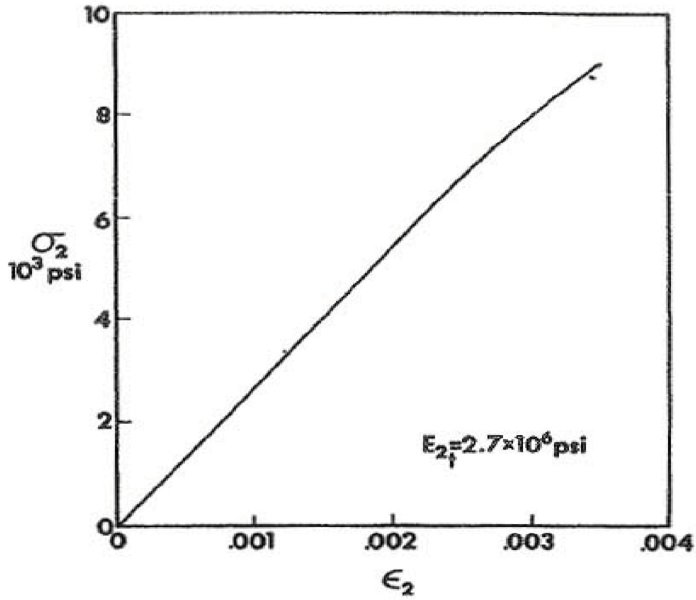
تتشابه منحنيات الإيبوكسي– غرافيت Narmco 5605 في الأشكال ج–12 حتى ج–17 [C–2] من حيث الشكل مع منحنيات الإيبوكسي– بورون.



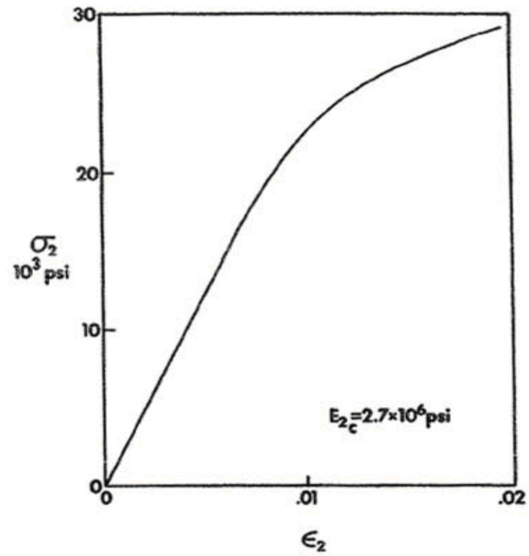
الشكل ج–1: منحنى شد σ_1 -ε_1 للإيبوكسي – ليف زجاجي 3M XP251S (عن [C-1])



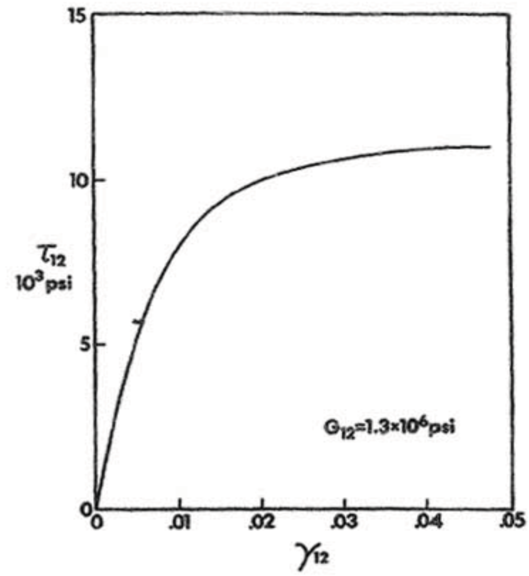
الشكل ج–2: منحنى الضغط σ_1 -ε_1 للإيبوكسي – ليف زجاجي 3M XP251S (عن [C-1])



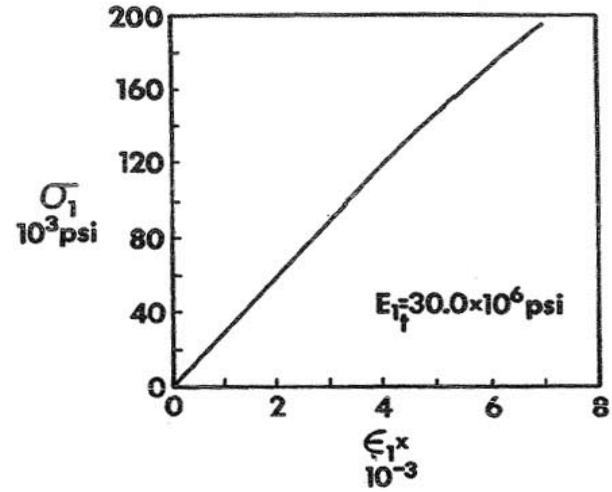
الشكل ج–3: منحنى شد σ_2 -ε_2 للإيبوكسي – ليف زجاجي 3M XP251S (عن [C-1])



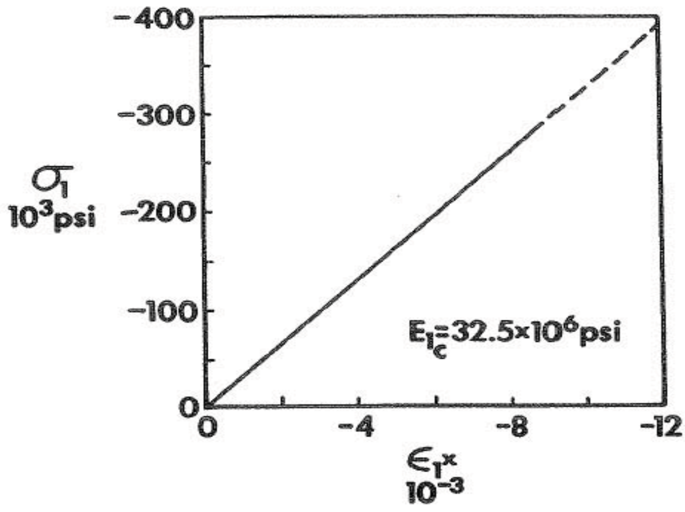
الشكل ج–4: منحنى الضغط σ_2 -ε_2 للإيبوكسي– ليف زجاجي 3M XP251S (عن [C-1])



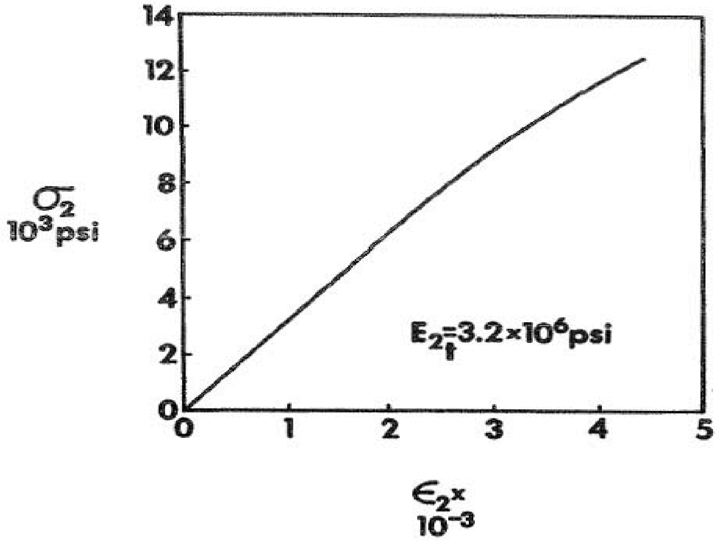
الشكل ج–5: منحنى إجهاد القص– الانفعال للإيبوكسي– ليف زجاجي 3M XP251S (عن [C-1])



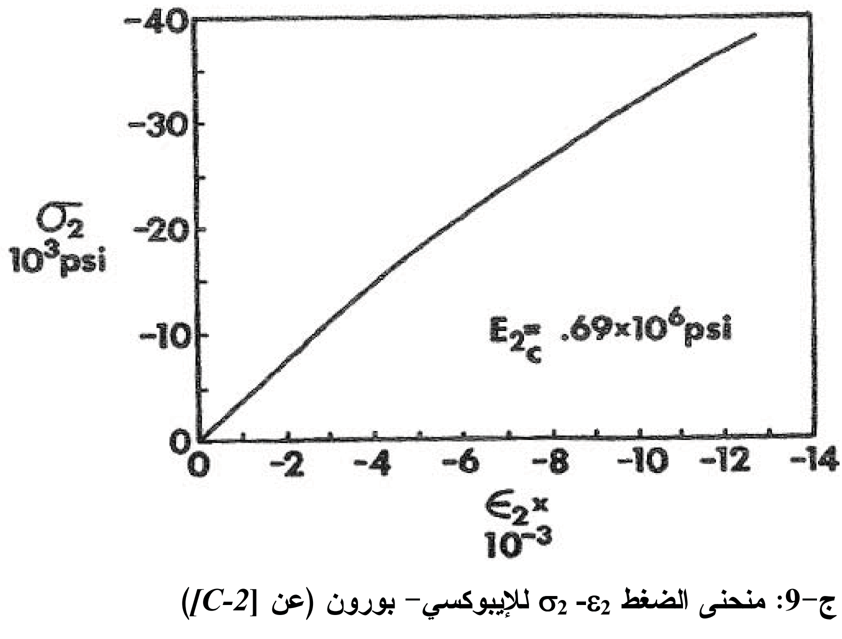
الشكل ج–6: منحنى الشد σ_1 -ε_1 للإيبوكسي– بورون (عن [C-2])



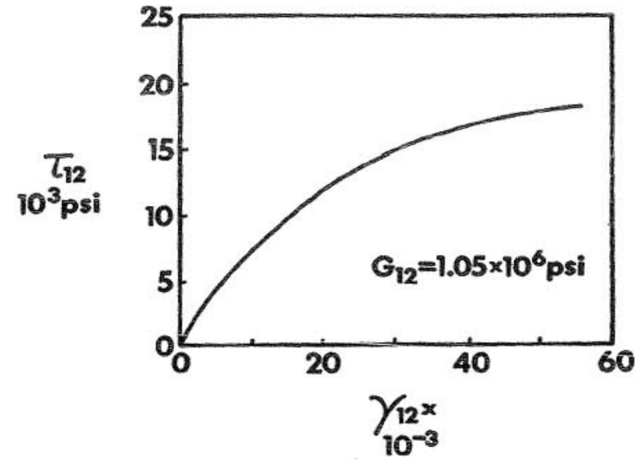
الشكل ج–7: منحنى الضغط σ_1 -ε_1 للإيبوكسي – بورون (عن [C-2])



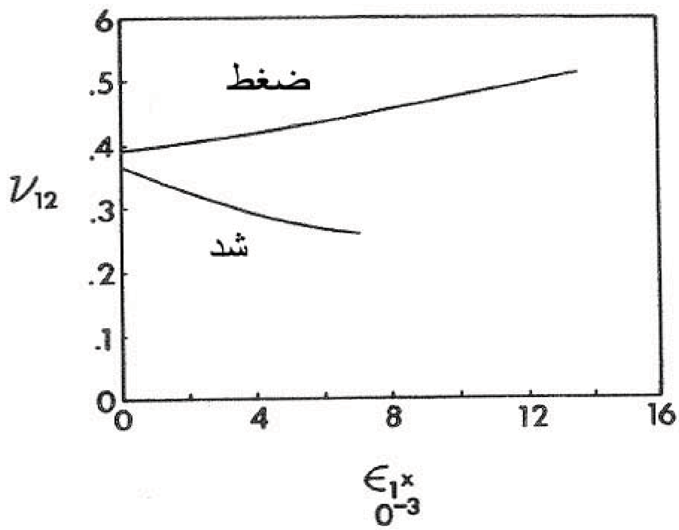
الشكل ج–8: منحنى الشد ε_2- σ_2 للإيبوكسي– بورون (عن [C-2])



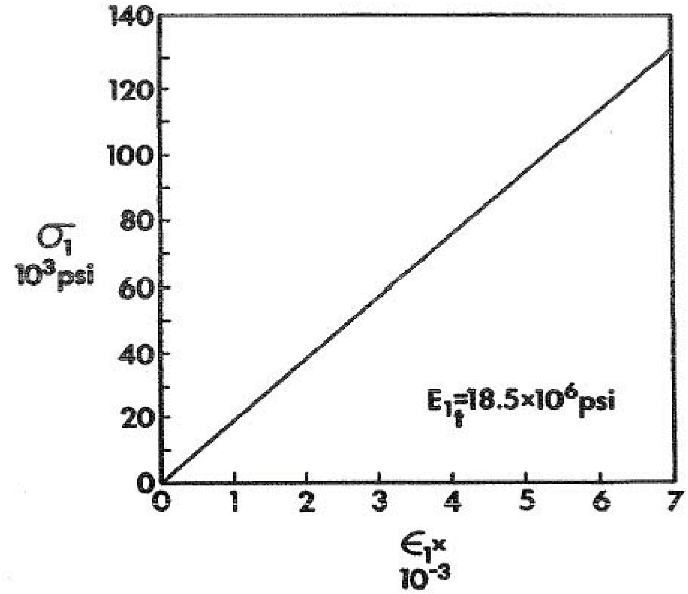
الشكل ج–9: منحنى الضغط ε_2- σ_2 للإيبوكسي– بورون (عن *[C-2]*)



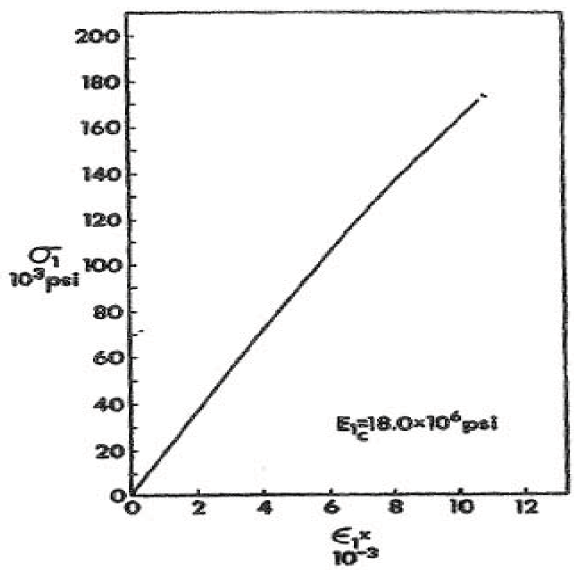
الشكل ج–10: منحنى اجهاد القص – انفعال للإيبوكسي– بورون (عن *[C-2]*)



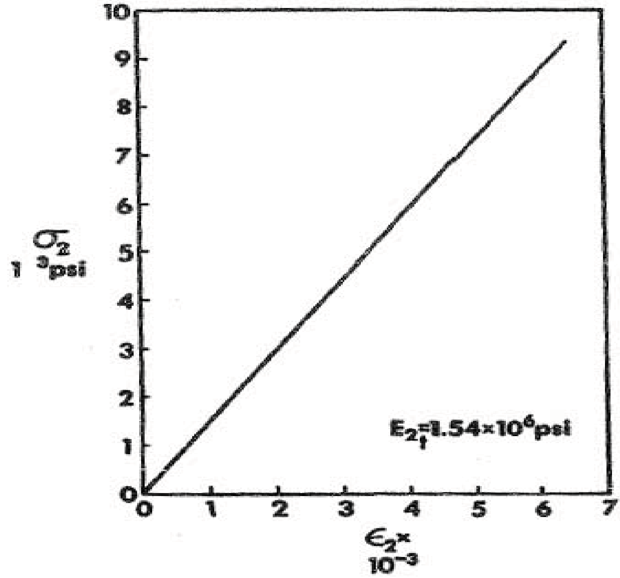
الشكل ج–11: منحنيات نسبة بواسون للإيبوكسي – بورون (عن [C-2])



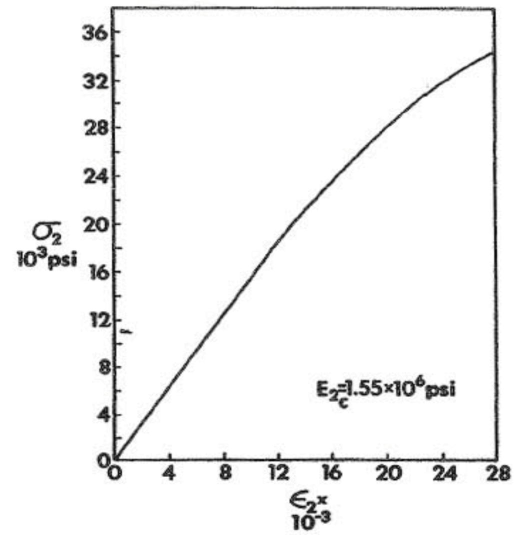
الشكل ج−12: منحنى الشد σ_1 -ε_1 للإيبوكسي − غرافيت نارمكو 5605 (عن [C-2])



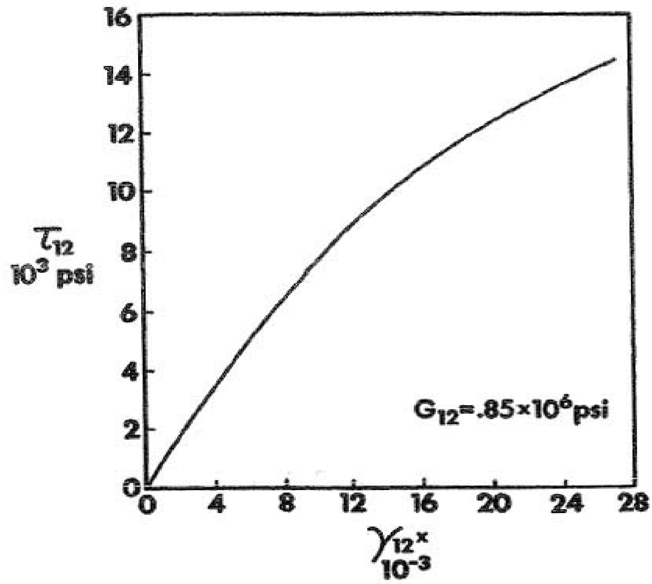
الشكل ج−13: منحنى الضغط σ_1 -ε_1 للإيبوكسي − غرافيت نارمكو 5605 (عن [C-2])



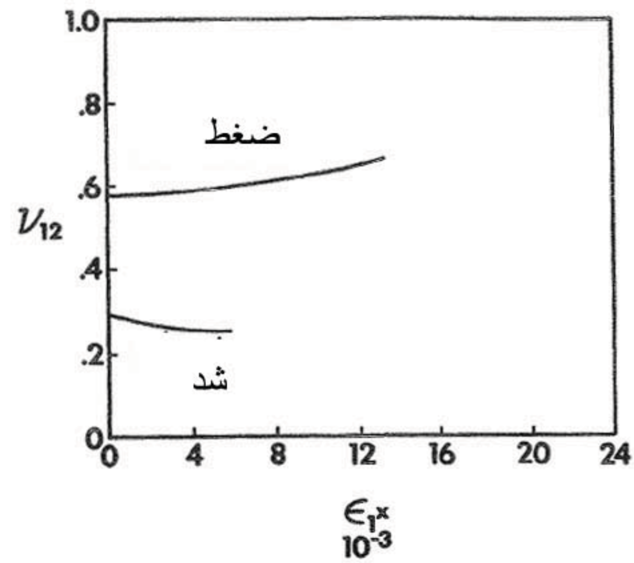
الشكل ج–14: منحنى الشد σ_2 -ε_2 للإيبوكسي – غرافيت نارمكو 5605 (عن [C-2])



الشكل ج–15: منحنى الضغط σ_2 -ε_2 للإيبوكسي – غرافيت نارمكو 5605 (عن [C-2])



الشكل ج–16: منحنى إجهاد القص – انفعال للإيبوكسي – غرافيت نارمكو 5605 (عن [C-2])



الشكل ج–17: منحنيات نسبة بواسون للإيبوكسي – غرافيت نارمكو 5605 (عن [C-2])

المراجع

C-1 *Plastics for Aerospace Vehicles*, Part 1, Reinforced Plastics, Military Handbook MILHDBK-17A, January 1971.

C-2 J. E. Ashton, J. C. Halpin, and P. H. Petit, *Primer on Composite Materials: Analysis.* Westport, CT: Technomic, 1969.

الملحق (د)

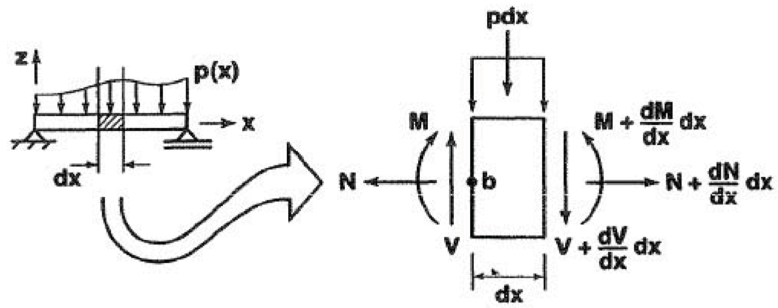
المعادلات الناظمة لتوازن العارضة وتوازن الصفيحة والانبعاج والاهتزاز

د.1 مقدّمة

يتم اشتقاق معادلات التوازن لعارضة من أجل توضيح عملية الاشتقاق والاستفادة منها كمراجعةٍ تمهيداً لمعالجة الصفائح. ويتم بعد ذلك اشتقاق معادلات التوازن لصفيحةٍ لاستعمالها في الفصل الخامس. وفيما بعد، يتم مناقشة معادلات انبعاج الصفيحة. وفي كل حالةٍ، يجري إظهار الشروط الحدودية. ولا يحتاج الأمر في أي مكانٍ للإشارة إلى العارضات والصفائح متعددة الطبقات. وينطبق كل ما يتم اشتقاقه هنا على أي نوعٍ من العارضات والصفائح لأنه يتم فقط استعمال المفاهيم الأساسية للتوازن والانبعاج أو الاهتزاز.

د.2 اشتقاق معادلات توازن العارضة

لنعتبر العنصر التفاضلي لعارضة مُحمَّلةٍ محورياً وجانبياً كما في الشكل د-1. يتم هنا إظهار القوة الخط القطريية وقوة القص والعزم والحمل الجانبي مع التغيرات التي تحصل على طول العنصر التفاضلي.



الشكل د-1: مخطط الجسم الحر لعنصر عارضة

من توازن القوة في الاتجاه x،

$$-N+\left(N+\frac{dN}{dx}\right)=0 \qquad \text{(د.1)}$$

وهذا ما يُبسَّط إلى:

$$\frac{dN}{dx}=0 \qquad \text{(د.2)}$$

وما لم يتم إدخال حمولات محورية على طول العارضة،، تكون إذاً، القوة الخط القطريية ثابتةً.

من توازن القوة في الاتجاه z،

$$V-pdx-\left(V+\frac{dV}{dx}dx\right)=0 \qquad \text{(د.3)}$$

وهذا ما يُبسَّط إلى:

$$p=-\frac{dV}{dx} \qquad \text{(د.4)}$$

هكذا، يسبب الحمل الجانبي تغيراً في قوة القص من نقطةٍ إلى أخرى على طول العارضة.

ومن توازن العزم حول النقطة b في الشكل د-1،

$$M+\left(pdx\right)\frac{dx}{2}+\left(V+\frac{dV}{dx}dx\right)dx-\left(M+\frac{dM}{dx}dx\right)=0 \qquad \text{(د.5)}$$

وبإهمال حدود المرتبة العالية في $(dx)^2$،

$$Vdx - \left(\frac{dM}{dx}\right)dx = 0 \qquad (د.6)$$

حيث:

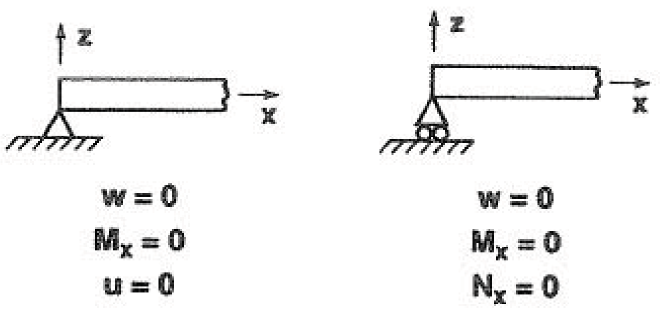
$$V = \frac{dM}{dx} \qquad (د.7)$$

وهكذا، تسبب قوة القص تغيراً في العزم من نقطةٍ إلى أخرى على طول العارضة.

تكون الشروط الحدودية عند نهايات العارضة:

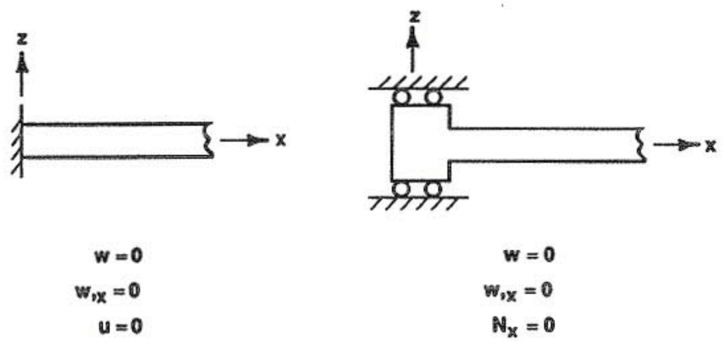
$$\begin{array}{lcl} N = \overline{N} & \text{أو} & U = \overline{U} \\ M = \overline{M} & \text{أو} & W' = \overline{W'} \\ V = \overline{V} & \text{أو} & W = \overline{W} \end{array} \qquad (د.8)$$

حيث يُمثِّل u و w الانزياحات وفق الاتجاهين x و z على التوالي، وتشير الفتحة إلى المشتق بالنسبة إلى x. تكون الشروط الحدودية في العمود الأيسر كميات قوةٍ مفروضةٍ (أو عزم)، وتكون الشروط الحدودية في العمود الأيمن انزياحات مفروضة أو ميول. ويمكن فقط فرض إما القوى (أو العزم) أو الانزياحات. وهكذا، هناك ثلاثة شروط حدودية عند كل نهاية من العارضة. فمن أجل عارضة ذي نهاية بسيطة الاستناد، كما في الشكل د–2 على سبيل المثال، لا يوجد تقوس عرضاني أو عزم (دوران حر) وإنما هناك شرطان حدوديان محوريان ممكنان.



الشكل د–2: الشروط الحدودية لعارضة ذي نهاية بسيطة الاستناد

وكبديلٍ، يمكن أن تمتلك نهاية العارضة تقييد دوران كامل بدون انزياحٍ عرضاني، أي إن تكون مُثبتة. ومع ذلك، يوجد شرط حدودي ثالث في الشكل د−3 تماماً كما في الشكل د−2. هذا يعني أنه يجب وجود شرط محوري على الانزياح أو القوة إضافة إلى الشروط التي يُعتقد عموماً أنها تتضمن شرط النهاية المُثبتة. لاحظ أن عنصر التثبيت في نهاية العارضة يمنع الدوران والانحراف العرضاني. وسيتم لاحقاً استعمال عنصرٍ مشابهٍ من أجل الصفائح. وتتعلق، حالياً، إمكانية لزوم تطبيق جميع الشروط الحدودية الثلاثة في مرتبة المعادلة التفاضلية الناتجة (تقريبية حكماً) عندما تُعوض علاقات القوة − انفعال والعزم − تقوس في المعادلات (د.2) و (د.4) و (د.7).



الشكل د−3: الشروط الحدودية لعارضة ذي نهاية مثبتة

لاحظ أن معادلة القص، المعادلة (د.6)، يمكن استبدالها محل معادلة الحمولة العرضانية، المعادلة (د.4) للحصول على:

$$p = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right) = \frac{d^2M}{dx^2} \qquad (د.9)$$

أو بعد استبدال علاقة العزم− تقوس التقريبية:

$$M = -EIw'' \qquad (د.10)$$

نحصل على:

$$p = EIw'''' \qquad (د.11)$$

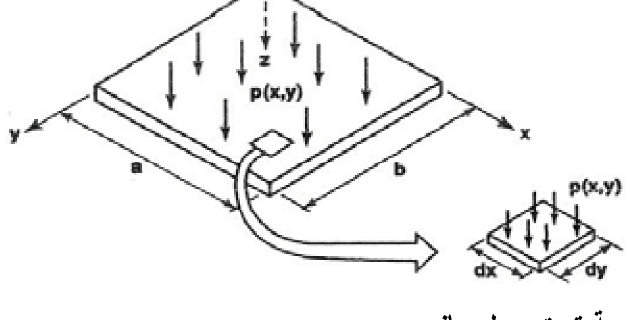
وهكذا، تمتلك معادلة تفاضلية من المرتبة الرابعة مثل المعادلة (د.11) أربعة شروط حدودية هي الشرط الثاني والثالث من شروط المعادلة (د.8) عند كل نهاية من العارضة. وينطبق

الشرط الحدودي الأول في المعادلة (د.8) على معادلة توازن القوة الخط القطريية، المعادلة (د.2) أو مكافئها بدلالة الانزياح (u).

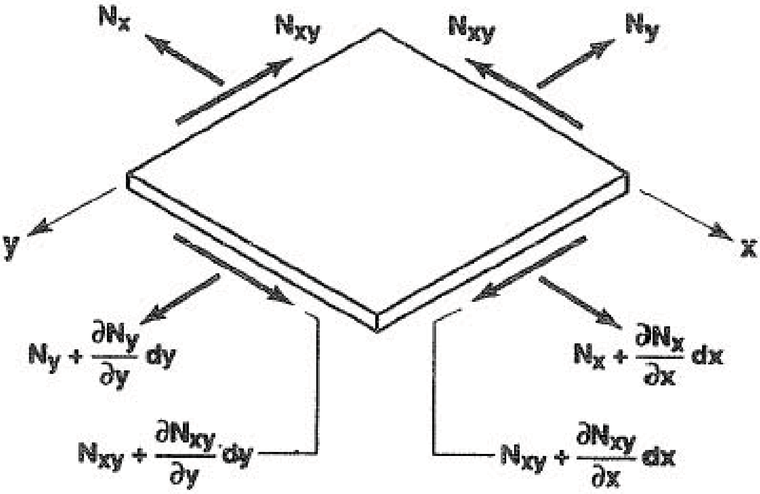
ستساعدك هذه المراجعة للاشتقاق البسيط السابق في فهم الاشتقاق التالي لمعادلات توازن الصفيحة. ويكمن الاختلاف الرئيسي بين مسائل الصفيحة والعارضة في أن العارضات تكون أحادية البعد والصفائح ثنائية البعد. لهذا، تكون المعادلات الناظمة للعارضات معادلات تفاضلية عادية بينما تقترن الصفائح بمعادلات تفاضلية جزئية. زد على ذلك، أنه عند اشتقاق المعادلات التفاضلية الناظمة، سيكون هناك، بالضرورة، معادلات توازن قوى ومعادلات توازن عزوم أكثر في حالة الصفائح منه في حالة العارضات.

د.3 اشتقاق معادلات توازن الصفيحة

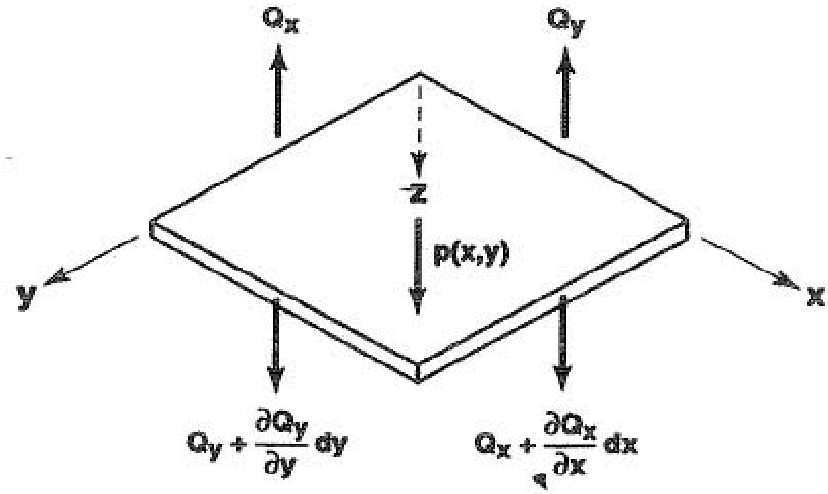
اعتبر عنصر الصفيحة التفاضلي مع القوى في المستوي في واحدة العرض N_y, N_x, و N_{xy} والعزوم في واحدة العرض M_x, M_y و M_{xy} إضافة إلى قوى القص في واحدة العرض Q_x, Q_y والخاضع للضغط الجانبي p(x,y). وللتأكيد، يُعبَّر عن جميع كميات القوى والعزوم في واحدة العرض لعنصر الصفيحة أي إنها جميعاً شدات موضعية. يبين الشكل د-4 العنصر التفاضلي بدون القوى والعزوم المقيدة، أي إن العنصر التفاضلي في الشكل د-4 *ليس* مخطط جسمٍ حر! وبهدف الوضوح، يتم عرض كلٍ من الأنظمة الثلاثة المقيدة، القوى في المستوي والقوى الجانبية والعزوم في واحدة العرض، ضمن شكلٍ منفصلٍ، على الرغم من أنها تؤثر جميعها بشكلٍ متزامن. وفي الأشكال د-5 ود-6 و د-7، يتم على التوالي التعبير عن تغيرات القوى والعزوم كجداء المشتقات الجزئية في الطول الموافق للعنصر التفاضلي.



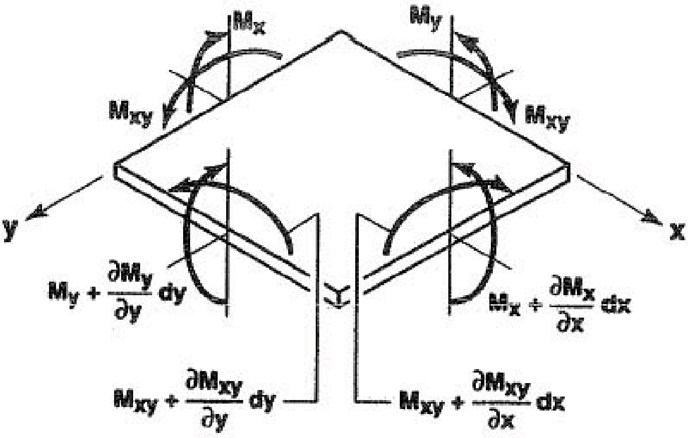
الشكل د-4: صفيحة تحت حمل جانبي



الشكل د–5: القوى في المستوي على عنصر تفاضلي



الشكل د–6: قوى جانبية على عنصر تفاضلي



الشكل د–7: عزوم على عنصر تفاضلي

من الشكل د–5 ومن أجل قوى في المستوي، يؤدي توازن القوى في الاتجاه x:

$$-N_x dy - N_{xy} dx + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dy\right) dx + \left(N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\right) dy = 0 \quad (\text{د}.12)$$

وبعد حذف الحدود المتشابهة والتقسيم على dxdy:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (\text{د}.13)$$

وبطريقةٍ مشابهةٍ، يؤدي توازن القوة في الاتجاه y إلى:

$$-N_{xy} dy - N_y dx + \left(N_y + \frac{\partial N_y}{\partial y} dy\right) dx + \left(N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx\right) dy = 0 \quad (\text{د}.14)$$

وبعد حذف الحدود المتشابهة والتقسيم على dxdy:

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (\text{د}.15)$$

فيما يتعلق بالقوى الجانبية من الشكل د–6، يؤدي توازن القوة في الاتجاه z إلى:

$$-Q_x dy - Q_y dx + \left(Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\right) dx + \left(Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\right) dy + p\, dx\, dy = 0 \quad (\text{د}.16)$$

وبعد حذف الحدود المتشابهة والتقسيم على dxdy:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+p=0 \qquad (17.د)$$

من توازن العزم حول الخط القطري x حيث تساهم العزوم في الشكل د–7 والقوى الجانبية في الشكل د–6 (لكن القوى في المستوي في الشكل د–5 لا تساهم لأنها إما موازية أو عمودية على الخط القطري x):

$$M_{xy}dy+M_y dx-\left(M_y+\frac{\partial M_y}{\partial y}dy\right)dx-\left(M_{xy}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}dx\right)dy \qquad (18.د)$$

$$-Q_x dy\frac{dy}{2}+\left(Q_y+\frac{\partial Q_y}{\partial y}dy\right)dxdy+\left(Q_x+\frac{\partial Q_x}{\partial x}dx\right)dy\frac{dy}{2}+p\,dx\,dy\frac{dy}{2}=0$$

وبعد حذف الحدود المتشابهة وإهمال الحدود ذات المرتبة العالية في $dx(dy)^2$ والتقسيم على dxdy:

$$Q_y=\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y} \qquad (19.د)$$

وبطريقةٍ مشابهةٍ، يؤدي توازن العزم حول الخط القطري y إلى:

$$Q_x=\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \qquad (20.د)$$

يمكن استبدال معادلتي قوى القص Q_x و Q_y، المعادلتين (د.20) و (د.19)، في معادلة توازن القوة وفق الاتجاه z، المعادلة (د.17) للحصول على:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial_y}\right)+p=0 \qquad (21.د)$$

أو:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\partial y}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}=-p \qquad (22.د)$$

ويمكن أن تظهر الشروط الحدودية لصفيحةٍ على أنها عند الحواف x= ثابت:

$$
\begin{aligned}
N_x &= \overline{N_x} \quad \text{أو} \quad u = \overline{u} \\
N_{xy} &= \overline{N}_{xy} \quad \text{أو} \quad v = \overline{v} \\
M_x &= \overline{M}_x \quad \text{أو} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \overline{w}}{\partial x}
\end{aligned}
\qquad (\text{د}.23)
$$

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \overline{M}_{xy} \quad \text{أو} \quad w,_{xy} = \overline{w},_{xy} \\
Q_x &= \overline{Q_x} \quad \text{أو} \quad w = \overline{w}
\end{aligned}
\qquad (\text{د}.23)
$$

وعند الحواف y = ثابت:

$$
\begin{aligned}
N_y &= \overline{N_y} \quad \text{أو} \quad v = \overline{v} \\
N_{xy} &= \overline{N}_{xy} \quad \text{أو} \quad u = \overline{u} \\
M_y &= \overline{M}_y \quad \text{أو} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \overline{w}}{\partial y}
\end{aligned}
\qquad (\text{د}.24)
$$

$$
\begin{aligned}
M_{xy} &= \overline{M}_{xy} \quad \text{أو} \quad w,_{xy} = \overline{w},_{xy} \\
Q_y &= \overline{Q_y} \quad \text{أو} \quad w = \overline{w}
\end{aligned}
$$

في نظرية الصفيحة، تُختزل المسألة من انفعال جسمٍ صلبٍ إلى انفعال سطحٍ باستعمال فرضية كيرشوف (يبقى كل ناظم على السطح الأوسط غير المشوه مستقيماً وعمودياً بعد الانفعال، إلخ، كما تم مناقشته في الفصل الرابع). نعمل بعد ذلك على تطبيق الشروط الحدودية على هذا السطح الذي يكون عموماً السطح الأوسط للصفيحة. ويجب عدم الاندهاش من أن الشروط الحدودية للجسم الصلب غير المُقرَّب (المحدد) لا تكون نفسها في الجسم الصلب المُقرَّب (المحدد) بواسطة سطحٍ. تنشأ المشكلة عند تطبيق هذه الشروط الحدودية على مجموعةٍ تقريبية من معادلات التوازن التي تنتج عندما تُستبدل علاقات القوة– انفعال وعزم– تقوس في المعادلات (د.13) و(د.15) و(د.22). فإذا استبدلنا، على سبيل المثال، علاقات العزم– تقوس التقريبية:

$$M_x = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_x + \nu\kappa_y)$$

$$M_y = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}(\kappa_y + \nu\kappa_x) \qquad \text{(د.25)}$$

$$M_{xy} = \frac{Et^3}{24(1-\nu^2)}\kappa_{xy}$$

وعبارات الانحراف التقريبي:

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$\kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \qquad \text{(د.26)}$$

$$\kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

تُصبح المعادلة (د.22) عندئذٍ:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{P}{D} \qquad \text{(د.27)}$$

يمكن أن تأخذ هذه المعادلة التفاضلية من المرتبة الرابعة شرطين حدوديين فقط على كل حافةٍ وذلك من مجموع ثمانية شروط حدودية. من هنا، يجب أن تُحدِّدْ بعض مراحل التقريبات التي تقود إلى المعادلة (د.27) الشروط الحدودية من تلك المبينة في المعادلات (د.23) إلى (د.24) وذلك لأن ثلاثة شروط حدودية هنا تحصل من أجل كل حافة ضمن مجموع اثنى عشر شرطاً حدودياً. تم حل هذه المعضلة تاريخياً من قبل كيرشوف الذي أثبت أن الشروط الحدودية المتسقة مع المعادلة التفاضلية التقريبية، المعادلة (د.27)، هي:

$$K_x = Q_X - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \overline{K}_x \qquad \text{أو} \qquad w = \overline{w}$$

$$M_x = \overline{M}_x \qquad \text{أو} \qquad w,_x = \overline{w},_x$$

$$K_y = Q_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} = \overline{K}_y \qquad \text{أو} \qquad w = \overline{w}$$

(د.28)

$$M_y = \overline{M}_y \qquad \text{أو} \qquad w,_y = \overline{w},_y$$

حيث تسمى k_x و k_y بقوى قص كيرشوف.

لاحظ أن الشروط الحدودية في المستوي لا تُظهر هذه المعضلة. فإذا تم استبدال علاقات القوة− إجهاد التقريبية على سبيل المثال:

$$N_x = \frac{Et}{1-v^2}\left(u,_x + vv,_y\right)$$

$$N_y = \frac{Et}{1-v^2}\left(v,_y + vu,_x\right) \qquad (\text{د}.29)$$

$$N_{xy} = \frac{Et}{2(1+v)}\left(u,_y + v,_x\right)$$

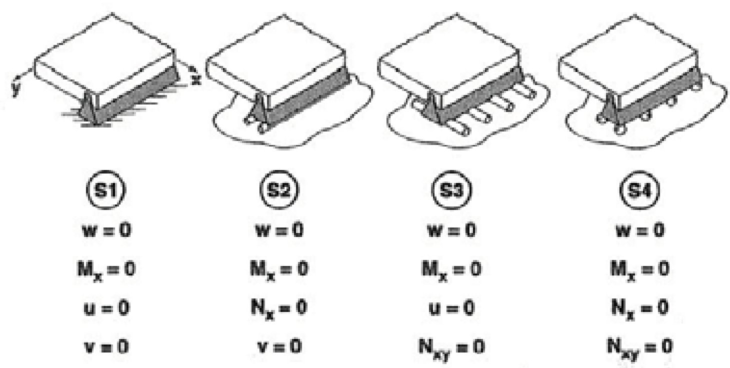
في معادلات التوازن في المستوي، المعادلات (د.13) و(د.15)، يكون عندها:

$$\begin{aligned} &u,_{xx} + vv,_{xy} + (1-v)\left(u,_{yy} + v,_{xy}\right) = 0 \\ &(1-v)\left(u,_{yx} + v,_{xx}\right) + v,_{yy} + vu,_{xy} = 0 \end{aligned} \qquad (\text{د}.30)$$

تمتلك هذه المجموعة من المعادلات التفاضلية الجزئية شرطين حدوديين عند كل حافةٍ يتمثلان بواسطة الخيارين الأولين في المعادلتين (د.23) و(د.24). عندما يُؤخذ بعين الاعتبار الشرط الحدودي الهندسي لتقييد الحافة في الاتجاه z، تكون قوة قص كيرشوف غير فعالة كشرطٍ حدودي.

يبيّن الشكل د−8 أنواع الشروط الحدودية التي توجد عندها من أجل حافةٍ بسيطة الاستناد ذات قيم x ثابتة مع التفسير الهندسي لشروطها في المستوي. في الشروط الحدودية لكل الحواف (الأطراف) الأربعة بسيطة التحميل، يمنع الحامل ذو الحافة على شكل سكين الانزياح العرضاني، w، ويسمح بالدوران الحر (حول السطح الأوسط للصفيحة الأمر الذي يصعب إظهاره) بحيث يكون العزم معدوماً، أي أن $M_x=0$. من أجل الشروط S1، لا يمكن لقاعدة الحامل ذي الحافة على شكل سكين الحركة، لهذا،

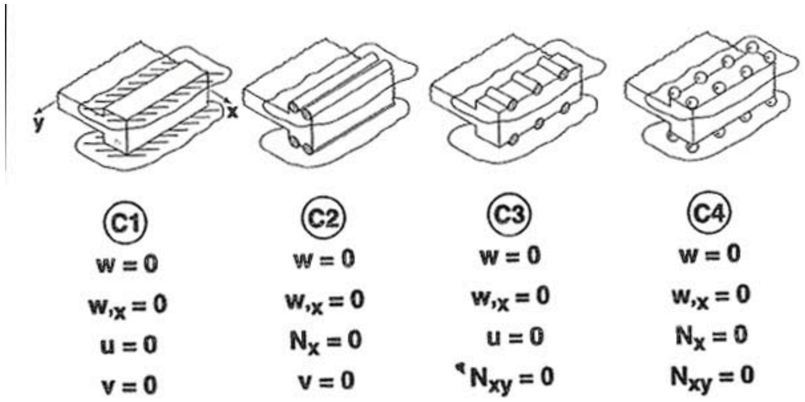
يجب أن تكون الانزياحات في المستوي، u و v مساويةً الصفر. من أجل الشروط S2، يتدحرج الحامل ذو الحافة على شكل سكين بدون مقاومة في الاتجاه x، لكن لا يمكنه الحركة في الاتجاه y، لهذا يكون $N_x=0$ $(u\neq 0)$ و v=o. من أجل الشروط S3، يتدحرج الحامل ذو الحافة على شكل سكين بدون مقاومة في الاتجاه y، لكن لا يمكنه الحركة في الاتجاه x، لهذا يكون $N_{xy}=0$ $(v\neq 0)$ و u=o.أخيراً، من أجل الشروط S4، يمكن للحامل ذي الحافة على شكل سكين أن يتدحرج بدون مقاومة في الاتجاه x والاتجاه y على السواء، لهذا، يكون $N_x=0$ $(u\neq 0)$ و $N_{xy}=0$ $(v\neq 0)$.



الشكل د–8: الشروط الحدودية لصفيحة ذات حافة بسيطة الاستناد

تعتبر الشروط الحدودية الأربعة المشابهة للحواف (لأطراف) المثبتة أكثر صعوبة في الإدراك. إن الانطباع الأول حول ماهية الحافة المثبتة يمكن أن يكون الشرط C1 لعدم وجود الانزياحات، u، v و w ولعدم وجود دوران، $\partial w/\partial x$. ومع ذلك، تُفهم الحافة المثبتة عموماً على أنها تعني فقط أن الانزياح العرضاني، w، ودوران الحافة، $\partial w/\partial x$، يساويان كلاهما الصفر بدون تحديد أي شروطٍ للانزياح في المستوي. بناءً على ذلك، يسبب نظام التثبيت في الشكلين د–3 ود–9 تقييد كلٍ من الانزياح العرضاني، w، ودوران الحافة، $\partial w/\partial x$. وتحدد طريقة استناد نظام التثبيت نفسه الشروط الحدودية في المستوي. وهكذا، إذا كان نظام التثبيت لا يستطيع الحركة في المستوي x-y، يكون عندها u=0 و v=0 من أجل الشرط الحدودي C1. أو إذا كان نظام التثبيت يستطيع التدحرج في الاتجاه x، يكون عندها $N_x=0$ لكن v=0 لأنه لا يحصل انزياح في الاتجاه

y من أجل الشرط الحدودي C2. وفيما بعد، إذا كان نظام التثبيت يستطيع التدحرج في الاتجاه y لكن ليس في الاتجاه x، يكون عندها $N_{xy}=0$ و $u=0$. أخيراً، إذا كان نظام التثبيت يستطيع التدحرج في كلا الاتجاهين x و y كما لو كان محمولاً على كراتٍ عديمة الاحتكاك،عندها، تكون القوى في المستوي مساويةً الصفر، أي إن $N_x=0$ و $N_{xy}=0$.



الشكل د-9: الشروط الحدودية لصفيحة ذات حافة مثبتة

اعترف الآن بوجود تناقض ظاهري في النظرية التقليدية للصفيحة. أولاً، رأينا من توازن القوة في الاتجاه z أنه يجب أن توجد قوى قص عرضانية Q_x و Q_y لموازنة الضغط الجانبي، p. ومع ذلك، لا يمكن لقوى القص هذه إلا أن تكون فقط محصلة بعض إجهادات القص العرضانية، أي إن:

$$Q_x = \int \tau_{xz} dz \qquad Q_y = \int \tau_{yz} dz \qquad (\text{د}.31)$$

ومع ذلك، فقد تم إهمال إجهادات القص العرضانية هذه ضمنياً عندما تبنينا فرضية كيرشوف للخطوط التي كانت ناظمية على السطح الأوسط غير المشوه، التي تبقى ناظمية بعد الانفعال في الفقرة 2.2.4 حول نظرية التصفيح التقليدية. تُفسَّر هذه الفرضية على أنها تعني أن انفعالات القص العرضانية تساوي الصفر، وهكذا، وبواسطة علاقات الإجهاد- انفعال، تكون إجهادات القص العرضانية مساوية الصفر. تم أيضاً تبني فرضية كيرشوف كجزءٍ من النظرية التقليدية للصفيحة في الفقرة 1.2.5.

يكمن التناقض في أن إجهادات القص العرضانية τ_{xy} و τ_{yz} يجب ألاّ تساوي الصفر، كما تم برهانه في معادلات التوازن، ومع ذلك، نفترض أن هذه الإجهادات

تساوي الصفر وفق فرضية كيرشوف. أين تقع الحقيقة؟ تعتبر بالطبع معادلات التوازن أساسيةً لمجمل مناقشاتنا، لهذا، يجب أن توجد إجهادات القص العرضانية. بناءً على ذلك، وعلى الرغم من أننا تجاهلنا افتراضياً إجهادات القص العرضانية، يمكننا الآن حساب محصلاتها باستعمال علاقات التوازن في المعادلتين (د.19) و (د.20). ومع ذلك، ليس لدينا معلومات حول توزع إجهادات القص العرضانية عبر سماكة الصفيحة.

يمكننا إعادة تفحص مسألة العارضة لتحديد توزع إجهادات القص العرضانية τ_{xz}. ونعرف أن محصلة τ_{xz} تساوي V التي يمكننا الحصول عليها من المعادلة (د.7)، أي إن:

$$V = \frac{dM}{dx} \tag{د.32}$$

ينتج توزع τ_{xz} من أجل عارضة متماثلة المناحي ومستطيل المقطع من تكامل معادلة الإجهاد– توازن:

$$\tau_{xz,z} = -\sigma_{x,x} \tag{د.33}$$

للحصول على:

$$\tau_{xz} = \frac{V}{2l}\left[\frac{t^2}{4} - z^2\right] \tag{د.34}$$

وهو توزع إجهاد القص المعروف على شكل قطعٍ مكافئ.

مهما يكن، يصلح الاشتقاق السابق فقط من أجل عارضات مستطيلة المقطع. ومن أجل العارضات غير مستطيلة المقطع، فإن التوزع على شكل قطعٍ مكافئ ليس صحيحاً. ومن أجل عارضات متعددة الطبقات أيضاً، فإن التوزع على شكل قطعٍ مكافئ يكون يقيناً غير صحيحٍ بسبب عدم تجانس الطبقة. في الحقيقة، يجب علينا، من أجل العارضات متعددة الطبقات، توقع أشكال توزع إجهادات مختلفة في كل طبقة كما يبيّن الشكل 6–19 من أجل العارضات العريضة (فُسِّرت حينها كانحناء اسطواني لشريطٍ طويلٍ، أي صفيحةٍ خاصة).

بناءً على ذلك، وجدنا صعوبة في تحديد توزع إجهادات القص العرضانية في عارضة وأقل صعوبة من ذلك في صفيحة. تُوصف إجرائيات تحديد توزع إجهاد القص العرضاني التقريبي في الصفائح في الفقرة 2.5.6.

لقد لاحظنا أن حركة وتحريك مسألة الصفيحة (والعارضة) لا يكونان متسقين. ومع ذلك، تعتبر مظاهر عدم الاتساق هذه جزءاً متأصلاً من ميكانيك المواد الذي يجب أن يتضمن بعض مظاهر عدم الاتساق، وإلاّ يمكن أن يصبح ميكانيك المواد نظرية المرونة.

د.4 معادلات انبعاج الصفيحة

لا يمكن اشتقاق معادلات انبعاج الصفيحة ذاتياً من توازن عنصرٍ تفاضلي. بدلاً من ذلك، تُمثِّل مسألة الانبعاج الابتعاد عن حالة التوازن عندما تصبح هذه الحالة غير مستقرة لأن الحمولة في المستوي تكون عاليةً جداً. يترافق الابتعاد عن حالة التوازن بموجاتٍ أو انبعاجاتٍ في سطح الصفيحة. يعني ذلك أن الصفيحة لا يمكن أن تبقى مستويةً عند تجاوز حمل الانبعاج. يعتبر توصيف العملية اللازمة لاشتقاق معادلات الانبعاج طويلاً جداً للعرض هنا. وبدلاً من ذلك، انظر جونز [D–1] وتيموشنكو وجير [D–2] أو برش وألمورث [D–3].

عوضاً عن الانزياحات والقوى والعزوم في حالة مسألة التوازن أو الانعطاف، تُصاغ مسألة الانبعاج بدلالة تغيرات الانزياحات والقوى والعزوم عن قيمها في حالة التوازن قبل الانبعاج. وهكذا، بدلاً من الانزياحات u, v وw، نمتلك δu و δv و δw كانزياحات انبعاج (إضافةً إلى الانزياحات التي حصلت في حالة التوازن قبل الانبعاج). ويمكن أن تتألف مثل هذه الانزياحات فقط من تقصير نهاية عمود بدون انزياحٍ جانبيٍ. وبدلاً من N_x و N_y و N_{xy} و M_x وM_y و M_{xy}، لدينا أيضاً δN_x و δN_y و δN_{xy} و δM_x و δM_y و δM_{xy}. يعتبر التمثيل البياني للشروط الحدودية للانبعاج مطابقاً للشروط الحدودية للتوازن في الأشكال د–8 ود–9.

تعتبر مسألة الانبعاج *منفصلةً* عن مسألة التوازن. لهذا، تُصاغ الشروط الحدودية للانبعاج بشكلٍ مختلفٍ نوعاً ما عن تلك في مسألة التوازن. وعلى سبيل المثال، تكون كل الشروط الحدودية للانبعاج متجانسةً، أي إن الجوانب اليمنى في كل معادلات المتغير تساوي الصفر. وعلى سبيل المثال، على طول الحافة x= ثابت:

$$\delta N_x = 0 \quad \text{أو} \quad \delta u = 0$$
$$\delta M_x = 0 \quad \text{أو} \quad \partial(\delta w)/\partial x = 0$$
$$\delta K_x = 0 \quad \text{أو} \quad \delta w = 0 \qquad (د.35)$$
$$\delta N_{xy} = \quad \text{أو} \quad \delta v = 0$$

في مسألة الانبعاج، يتم إدخال الحمل في حالة التوازن السابقة للانبعاج، وتكون قيمة الحمل هدف مسألة القيمة الذاتية أو القيمة الخاصة أو القيمة المميزة. هذا يعني أن حمل الانبعاج هو القيمة الذاتية أو القيمة الخاصة أو القيمة المميزة لمسألة الانبعاج. وتظهر القيمة الذاتية في المعادلات التفاضلية الناظمة، لكن ليس في الشروط الحدودية.

د.5 معادلات اهتزاز الصفيحة

تعتبر مسألة الاهتزاز مماثلةً تماماً لمسألة الانبعاج. وبناءً على ذلك، وبسبب التعقيد المشابه، لن يتم محاولة اشتقاق معادلات الاهتزاز. وتكون الشروط الحدودية للاهتزاز مطابقةً للشروط الحدودية للانبعاج.

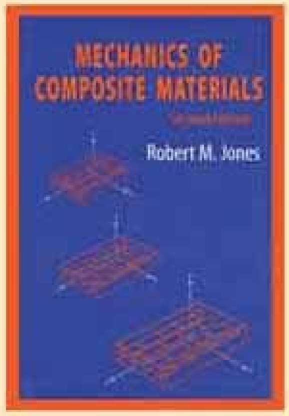
المراجع

D-1 Robert M. Jones, *Buckling of Bars, Plates, and Shells* (to be Published).

D-2 Stephen P. Timoshenko and James M. Gere, *Theory of Elastic Stability*. 2nd ed. New York: McGraw-Hill, 1961.

D-3 D. O. Brush and B. O. Almroth, *Buckling of Bars, Plates, and Shells*. New York: McGraw-Hill, 1975.

ميكانيك المواد المركَّبة(*)



(*) الكتاب الأول من المواد المتقدمة

سلسلة كتب التقنيات الاستراتيجية والمتقدّمة

1. المياه
2. البترول والغاز
3. البتروكيمياء
4. النانو
5. التقنية الحيوية
6. تقنية المعلومات
7. الإلكترونيات والاتصالات والضوئيات
8. الفضاء والطيران
9. الطاقة
10. المواد المتقدمة
11. البيئة

السلسلة: تضم هذه السلسلة ترجمة لأحدث الكتب عن التقنيات التي يحتاج إليها الوطن العربي في البحث والتطوير ونقل المعرفة إلى القارئ العربي.

الكتاب: يغطّي الكتاب مواضيعَ متعددة في حقل المواد المركّبة، تربط بين المفاهيم الأساسية والحديثة، ومنها: الميكانيك الميكروي والماكروي، ونظرية التصفيح، وثني الألواح، واللّيّ والاهتزاز... وغيرها، مع مقارنات شاملة للجوانب النظرية والعملية، إضافة إلى البحث في العلاقة بين الانفعال والإجهاد، وفي الثوابت الهندسية والمعالجات الخاصة بالميكانيك الميكروي عبر استخدام مقاربات من ميكانيك المواد والمرونة، فضلاً عن تأثير إِقران الانحناء بالتمدد، وإِقران الانحناء بالالتواء.

أخيراً، يتميّز هذا الكتاب بأهميّة خاصة كونُه يرصد تطوّرات الثورة الصناعية التي تحققت منذ 1960 في إطار ميكانيك المواد المركبة، وبالتالي فهو يشكل مرجعاً استعادياً للمتخصصين، ومرجعاً دراسياً للطلاب الجامعيين.

المؤلف: **روبرت م. جونز:** أستاذ متمرس في العلوم الهندسية والميكانيك في معهد التقنيات المتعددة (بولي تكنيك)، وفي الجامعة الرسمية في بلاكسبورغ، فيرجينيا. وهو أيضاً مؤسس ومدير مركز تكنولوجيا فيرجينيا للمواد المركبة، ومؤسس الأكاديمية الأميركية للميكانيك (AAM).

المترجم: **رفيع جبره:** أستاذ فيزياء وهندسة المواد في المعهد العالي للعلوم التطبيقية والتكنولوجيا (HIAST)، دمشق، سورية.

مدينة الملك عبدالعزيز للعلوم والتقنية KACST

المنظمة العربية للترجمة

الثمن: 40 دولاراً أو ما يعادلها

ISBN 978-9953-82-426-0

المواد المركبة